

LIMITE ET CONTINUITE

I) LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT COMPLEMENTS (limite à droite et à gauche et opérations sur les limites)

1)Rappelles :

Soient P et Q deux fonction polynôme et $x_0 \in \mathbb{R}$
et $a \in \mathbb{R}^*$ alors :

1) $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ si $Q(x_0) \neq 0$

3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ 4) $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$

5) $\lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0$ si $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

5) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ si $x_0 \geq 0$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$ 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Limite de la somme

$\lim f$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme ind

Ces propriétés sont vraies si x tend vers $a+$; $a-$;
 $+\infty$ ou $-\infty$

Limites des produits

$\lim f$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f \times g$	$\ell \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme ind	Forme ind	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Limites des inverses

$\lim f$	$\ell \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

Limites des quotients

$\lim f$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	$\pm \infty$	0	ℓ	0	$\pm \infty$
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm \infty$	$\pm \infty$	$?$	$?$

2)Exercices : RAPPELLES

Exercice1 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1}$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}$

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x$

6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

Solutions : 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1} = \frac{3}{1} = 3$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x^4}{14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2} = -\infty$

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5}{2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x$?

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x = +\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} = +\infty$

Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$

on trouve une formes indéterminée : " $+\infty - \infty$ "

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{(\sqrt{x^2+x} + x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}} + x} \text{ or } x \rightarrow +\infty \text{ donc } |x| = x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$$

6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$ On pose $x - \frac{\pi}{4} = h$

donc $x \rightarrow \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan \left(h + \frac{\pi}{4} \right)}{h}$$

or : $\tan \left(h + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan h + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan h \times \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan h + 1}{1 - \tan h}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{1 - \tan h} \times \frac{\tan h}{h} = \frac{2}{1} \times 1 = 2$$

Limites à droite et à gauche

Exercice2 : (Limites à droite et à gauche)

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de f en $x_0 = -1$

Solution : Déterminons $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x)$?

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

Si : $-1 < x < 1$: $f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = -\frac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} -\frac{x+1}{x-1} = 0$

Si : $x < -1$: $f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = \frac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x+1}{x-1} = 0$

donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = 0$ donc : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$

Exercice3 : Soient les fonctions tels que :

$$f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x) \text{ et } g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$$

$$k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)} \text{ et } h(x) = \frac{x^2+1}{x^3} \sin x$$

1) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

3) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

4) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

Solution :

1) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ et $f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x+1 = 5 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2} -3x^2+x = -10$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \sqrt{5} \times (-10) = -10\sqrt{5}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x+1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+1} = +\infty$

Et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2+x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2 = -\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

• 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$? et $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}+1 = +\infty$

Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

• 2) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$? et $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$

$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x}+1 = \sqrt{3}+1$ et $\lim_{x \rightarrow 3} -2x^2+1 = -17$ et

$\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^2 = 0^+$ donc : $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$?

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} \frac{\sin x}{x}$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et puisque : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2+1 = 1$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$$

et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} = +\infty$ alors : $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$

4) $k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)}$ donc : $D_k =]-\infty; 0[\cup]0; 2[\cup]2; +\infty[$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} -3x+1 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^2-2x = 0$

Etude du signe de : $x^2 - 2x$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$x(x-2)$	$+$	0	$-$	$+$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2x = 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 2x = 0^+$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} k(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2} -3x+1 = -5$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 2x = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 2x = 0^-$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 2^+} k(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} k(x) = +\infty$

II) CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

NUMÉRIQUE EN UN POINT :

1) Activité : Considérons la fonction f définie

$$\text{par : } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 1}; \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = -4 \end{cases}$$

1) Déterminer D_f 2) a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

b) Comparer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ et $f(1)$

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

2) a)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-5)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x - 5 = -4$$

2) b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

On dit que f est continue en $x_0 = 1$

2) Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle de centre a . On dit que la fonction f est continue en a si elle admet une limite finie en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Exemple 1 : Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 3}; \text{ si } x \neq 3 \text{ et } f(3) = 7$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 3$

Solution : on a : $f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} = x + 4$ D.EC

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} x + 4 = 7 = f(3)$$

Alors : $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$

Donc : f est continue en $x_0 = 3$

Exercice 4 : Considérons la fonction f définie

$$\text{Par : } f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}; \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$

Solution :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}+1)\tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} \times \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = 1 \times \frac{1}{2} = f(0)$$

Alors : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

Donc : f est continue en $x_0 = 0$

Exercice 5 : Considérons la fonction f définie

$$\text{Par : } f(x) = \frac{\sin(x-2)}{x^2-2x}; \text{ si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 2 \text{ et } f(2) = \frac{1}{2}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 2$

Solution : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = \frac{1}{2} = f(2)$ Alors :

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ Donc : f est continue en $x_0 = 2$

Exercice 6 : Considérons la fonction f définie

$$\text{Par : } \begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x-1}; \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = m \end{cases}$$

avec m paramètre réel

déterminer la valeur du réel m pour laquelle

f est continue en $x_0 = 1$

$$\text{Solution : } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$$

on pose : $h = x - 1$ $x \rightarrow 1 \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi(h+1))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi h + \pi)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin(\pi h)}{\pi h} \pi = -\pi$$

donc f est continue en $x_0 = 1$ ssi $m = -\pi$

Exercice7 : Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = 2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right); \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 2$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$

Solution : $x \in \mathbb{R}^* \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$ donc :

$$|f(x) - 2| = x^2 \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x^2 \text{ et on a } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 = f(0)$$

Donc : f est continue en $x_0 = 0$

3) continuité à droite et à gauche

Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2; \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = 2 + x; \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0 = f(0)$$

On dit que f est continue à gauche de $x_0 = 0$

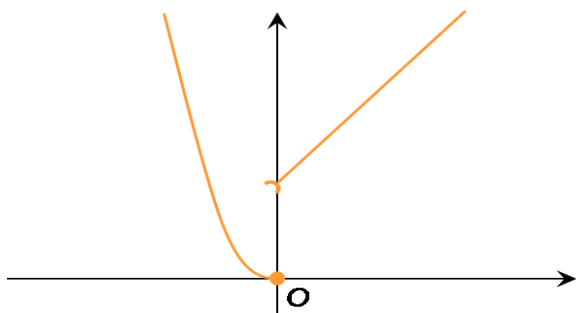
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 + x = 2 \neq f(0)$$

On dit que f n'est pas continue à droite de 0

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

Donc, la limite en 0 n'existe pas.

Conséquence : f ne peut être continue en 2



Graphiquement : La courbe de f ne peut être tracée sur un intervalle contenant 0, « sans lever le crayon ».

Définition :1) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a + r[$ où $r > 0$

On dit que la fonction f est continue à droite de a si elle admet une limite finie à droite en a

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) :$$

2) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a - r; a]$ où $r > 0$

On dit que la fonction f est continue à gauche de a si elle admet une limite finie à gauche en a

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

Exemple : Soit f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 3 - x^2; \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 1}; \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f à droite et à gauche de $x_0 = 0$

$$\text{Solution : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 3}{2x - 1} = 3 = f(0)$$

donc f est continue à droite de $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3 - x^2 = 3 = f(0)$$

donc f est continue à gauche de $x_0 = 0$

Théorème : Une fonction est continue en un point a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche de a

Donc : f est continue en $x_0 = 0$ ssi

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Exemple1 : Considérons la fonction f définie

$$\text{Par : } \begin{cases} f(x) = \frac{2x+1}{7-3x}; \text{ si } x \leq 2 \\ f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}; \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 2$

$$\text{Solution : on a : } f(2) = \frac{2 \times 2 + 1}{7 - 3 \times 2} = \frac{5}{7 - 3 \times 2} = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 3 = 5 = f(2)$$

Donc f est continue à droite de f en $x_0 = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+1}{7-3x} = \frac{5}{1} = 5 = f(2)$$

Donc f est continue à gauche en $x_0 = 2$

Donc f est continue en $x_0 = 2$

Exemple2: Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ si $x \neq 1$

$$\text{Et : } f(1) = 2$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 1$

$$\text{Solution : } \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} x + 1 = 2 = f(1)$$

donc f est continue à droite de $x_0 = 1$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} -\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} -(x + 1) = -2 \neq f(1)$$

donc f n'est pas continue à gauche de $x_0 = 1$

donc f n'est pas continue en $x_0 = 1$

On dit que f est discontinue en $x_0 = 1$

4) Prolongement par continuité

Activité : Soit la fonction h définie par

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2}$$

1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

2- Déterminer la limite $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, f est-elle

continue en $x_0 = -1$?

3- Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = f(x); \text{ si } x \neq -1 \\ f(-1) = 3 \end{cases}$$

a) Déterminer D_f

b) Etudier la continuité de la fonction

f en $x_0 = -1$ La fonction f s'appelle un prolongement par continuité de la fonction de f en -1

4- Peut-on prolonger f par continuité en $a = -2$

Solution : 1)

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ et } x \neq -2$$

$$\text{Donc : } D_f = \mathbb{R} - \{-1; -2\}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{x + 2} = 3$$

$-1 \notin D_f$ donc f n'est pas continue en $x_0 = -1$

$$3) a) \begin{cases} f(x) = f(x); \text{ si } x \neq -1 \\ f(-1) = 3 \end{cases} \text{ donc : } D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3 = f(-1)$$

donc f est continue en $x_0 = -1$

$$4) \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2} ?$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} x^3 + 1 = -7$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} x^2 + 3x + 2 = 0^- \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$$

Donc on ne peut pas prolonger f par continuité en $a = -2$

Théorème et définition : Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f ; a un réel tel que $a \notin D_f$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ (finie)

$$\text{La fonction } f \text{ définie par : } \begin{cases} f(x) = f(x); \text{ si } x \neq a \\ f(a) = l \end{cases}$$

Est une fonction continue en a et s'appelle un prolongement par continuité de la fonction f en a

Exemple : Soit f une fonction définie par

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x} \text{ Donner un prolongement par}$$

continuité de la fonction f en $x_0 = 0$

$$\text{Solution : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \times x = 0$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Donc La fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = f(x); \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Est une prolongement par continuité de la fonction f en $x_0 = 0$

III) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES.

1) Continuité sur un intervalle

Définition :

Soit f une fonction dont le domaine de définition est D_f , soit $]a, b[$ un intervalle inclus dans D_f

1) On dit que f est continue sur l'ouvert $]a, b[$ si elle est continue en tout point de $]a, b[$

2) On dit que f est continue sur $[a, b[$ si elle est continue sur $]a, b[$ et à droite de a

3) On dit que f est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, à droite de a et à gauche de b

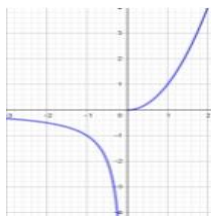
Remarque :

- 1) Si une fonction f est continue sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$ elle est continue sur $[a, c]$
- 2) En général si f est continue sur un intervalle I et sur un intervalle J et si $I \cap J \neq \emptyset$ alors f est continue sur $I \cup J$.

3) f peut-être continue sur $[a, b[$ et sur $[b, c]$ sans qu'elle soit continue sur $[a, c]$

Dans le graphique ci-dessous f est continue sur

$$[-3, 0[\text{ et } \begin{cases} f(x) = \frac{1}{x}; \text{ si } \dots x < 0 \\ f(x) = x^2; \text{ si } \dots x \geq 0 \end{cases}$$



continue sur $[0, 2]$ mais pas continue sur $[-3, 0]$ car elle n'est pas continue en 0

2) Opérations sur les fonctions continues

Propriétés : 1) Si f et g sont deux fonctions continues en a alors :

a) $f + g$ b) $f \times g$ c) $|f|$

Sont des fonctions continues en a

2) Si f et g sont deux fonctions continues en a et $g(a) \neq 0$ alors

a) $\frac{1}{g}$ b) $\frac{f}{g}$ sont des fonctions continues en a .

3) Si f une fonction continue en a et $f(a) \geq 0$ alors : $\sqrt{f}$ est continue en a

Remarque : La propriété précédente reste vraie soit à droite de a , à gauche de a ou sur un intervalle I (En tenant compte des conditions)

Propriétés : 1) Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$

2) Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont continues sur $\mathbb{R}$

Exemples :

1) $h(x) = \sqrt{x^2 + x + 3}$

$x^2 + x + 3$ Est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ de plus $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 + x + 3 \geq 0)$

(Son discriminant Δ est négatif)

2) $g(x) = \frac{x^4 + x^3 - 6}{x^2 + 2x - 3}$ est continue sur :

$] - \infty, -3[$; sur $] - 3, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

3) La fonction $\tan$ est continue sur tous les intervalles de la forme : $] -\pi/2 + k\pi ; \pi/2 + k\pi[$ (où $k \in \mathbb{Z}$)

3) Continuité de la composition de deux fonctions.

Théorème : Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J tels que $f(I) \subset J$ et x_0 un élément de I .

1) Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

2) Si f est continue I et g continue en $f(I)$ alors $g \circ f$ est continue I .

Exemples : 1) Soit f une fonction définie par $f(x) = \cos(2x^2 - 3x + 4)$

Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$

Puisque les fonctions : $f_1 : x \rightarrow 2x^2 - 3x + 4$ et

$f_2 : x \rightarrow \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$

Et $f_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ alors : $f = f_2 \circ f_1$ est continue sur $\mathbb{R}$

2) Soit g une fonction définie par

$$g(x) = \sqrt{\frac{x}{1 + \sin^2 x}}$$

Montrons que g est continue sur $\mathbb{R}^+$

On a : $D_g = [0; +\infty[$ et Puisque la fonction :

$$g_1 : x \rightarrow \frac{x}{1 + \sin^2 x} \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+ \text{ et}$$

$$g_1(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+ \text{ et } g_2 : x \rightarrow \sqrt{x} \text{ sont continues sur } \mathbb{R}^+$$

Donc : $g = g_2 \circ g_1$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

3) Soit f et g deux fonctions définies par

$$\begin{cases} f(x) = x + 1; \text{ si } \dots x < 0 \\ f(x) = 0; \text{ si } \dots x \geq 0 \end{cases} \text{ et } g(x) = 5$$

Montrons que f n'est pas continue en $x_0 = 0$

et $h = g \circ f$ est continue en $x_0 = 0$

En effet : on a $f(0) = 0$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 1 = 1 \neq f(0)$$

Et g est continue en $x_0 = 0$

mais on a : $(g \circ f)(x) = 5$ est continue en $x_0 = 0$

4) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car $x \rightarrow x^2+1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc : $x \rightarrow \frac{1}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R}) \left(\frac{1}{x^2+1} \in \mathbb{R}\right)$ et $\sin$ est continue sur $\mathbb{R}$

3) Limite de $\sin$

Théorème : Soit u une fonction définie sur un intervalle pointé de centre x_0 telle $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l$

si v est continue en l alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (v \circ u)(x) = v(l)$

Preuve : On a : $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l \in \mathbb{R}$ donc u admet

un prolongement par continuité u définie

comme :
$$\begin{cases} u(x) = u(x); \text{ si } x \neq x_0 \\ u(x_0) = l \end{cases}$$

La fonction u étant continue en x_0 ; et v est

continue en $u(x_0) = l$ alors et d'après le

théorème de la composition $v \circ u$ est continue en x_0 et par suite :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (v \circ u)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (v \circ u)(x) = (v \circ u)(x_0) = v(l)$$

Exemples : Déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1-\cos x}{x^2} \pi\right)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\pi \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$$

Solution :1)

Soient : $f : x \rightarrow \frac{1-\cos x}{x^2} \pi$ et $g : x \rightarrow \sin x$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \pi = \frac{\pi}{2}$ g est continue sur $\mathbb{R}$

Donc continue en $x_0 = \frac{\pi}{2}$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1-\cos x}{x^2} \pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$2) \text{ puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \pi \sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} = \pi$$

Et la fonction : $x \rightarrow \cos x$ continue en π

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\pi \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) = \cos \pi = -1$$

Exercice8 : Déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \tan x}{3x}\right)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7}\right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \sin \sqrt{\frac{2x^2}{1-\cos x}}$$

$$\text{Solution :1) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \tan x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi}{3} \frac{\tan x}{x} = \frac{\pi}{3}$$

et Puisque : $x \rightarrow \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$

Donc continue en $x_0 = \frac{\pi}{3}$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \tan x}{3x}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x^2}{4x^2} = \frac{\pi}{4}$$

et Puisque : $x \rightarrow \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$

Donc continue en $x_0 = \frac{\pi}{4}$ donc :

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3) \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{x^2}{1-\cos x} = 4$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2x^2}{1-\cos x}} = 2 : x \rightarrow \sqrt{x} \text{ est continue en } 4$$

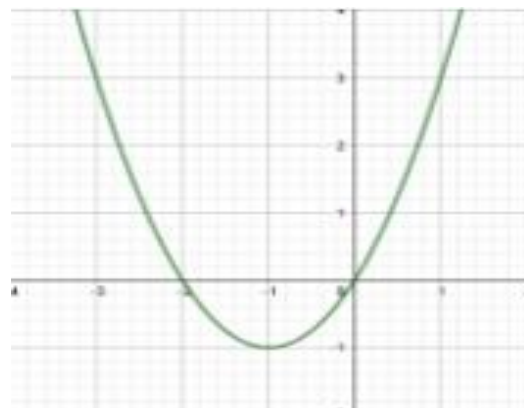
$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \sin \sqrt{\frac{2x^2}{1-\cos x}} = \sin 2 \text{ car : } x \rightarrow \sin x \text{ est}$$

continue en 2

IV) IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

1) Image d'un segment (intervalle fermé) :

Activité : Le graphe ci-contre est le graphe de la fonction $f(x) = x^2 + 2x$

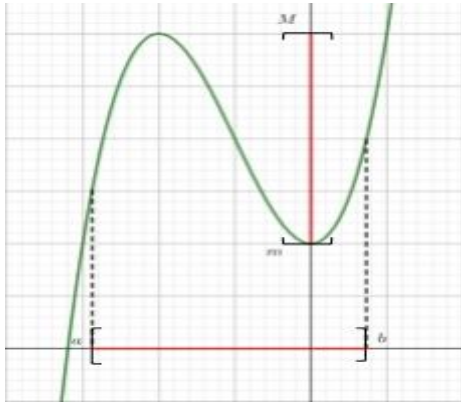


Déterminer graphiquement les images des intervalles : $I_1 = [0,1]$, $I_2 = [-3,-1]$; $I_3 = [-3,1]$

Théorème : (Admis)

L'image d'un segment $[a, b]$ par une fonction continue est le segment $[m, M]$ où :

$$m = \min_{x \in [a;b]} f(x) \text{ et } M = \max_{x \in [a;b]} f(x)$$



Cas particulier :

- 1) Si f est continue croissante sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$
- 2) Si f est continue décroissante sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$

2) Image d'un intervalle.

2.1 Théorème général

Théorème (admis) : L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Exemples : $f(x) = x^2 + 2x$

Graphiquement en a : (le graphe ci-dessus)

$$f([-1, 2]) = [-1, 3] \text{ et } f([0, 2]) = [-1, 0]$$

$$f([-1, 0]) = [0, 3] \text{ et } f([2, +\infty[) = [0, +\infty[$$

$$f([- \infty, 1]) = [-1, +\infty[$$

Remarque : L'intervalle I et son image $f(I)$ par une fonction continue n'ont pas nécessairement la même forme.

2.2 Cas d'une fonction strictement monotone

1) f continue et strictement croissante sur

L'intervalle I et $a \in I$ et $b \in I$

$$f([a; b]) = [f(a); f(b)] \text{ et } f([a; b[) = \left[f(a); \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right[$$

$$f(]a; b]) = \left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x); f(b) \right] \text{ et } f(]a; b[) = \left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x); \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right[$$

2) f continue et strictement décroissante sur L'intervalle I et $a \in I$ et $b \in I$

$$f([a; b]) = [f(b); f(a)] \text{ et } f([a; b[) = \left[\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x); f(a) \right[$$

$$f(]a; b]) = \left] f(b); \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \right] \text{ et } f(]a; b[) = \left] \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x); \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \right[$$

Exemple : Soit f une fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$$

Déterminer les images des intervalles suivants : $[0, 1]$; $[-2, -1[$; $] -1, 1]$; $[2, +\infty[$

Solution : $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

$$\left| \begin{array}{cc} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{array} \right| = 2 + 3 = 5 > 0 \text{ donc : } f \text{ continue et}$$

strictement croissante sur les intervalles $] -\infty; -1[$

et $] -1; +\infty[$ donc on a : $f([0; 1]) = [f(0); f(1)] = \left[-3; \frac{-1}{2} \right]$

$$f([-2; -1[) = \left[f(-2); \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) \right[= [7; +\infty[$$

$$f(]-1; 1]) = \left] \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x); f(1) \right] = \left] -\infty; \frac{-1}{2} \right]$$

$$f([2; +\infty[) = \left[f(2); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= \left[\frac{1}{3}; 2 \right[$$

V) THEOREME DES VALEURS INTERMEDIERE - TVI.

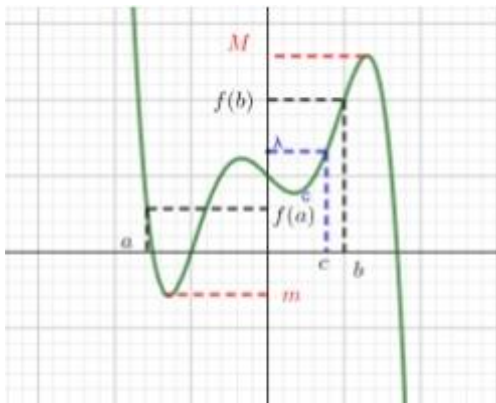
1) Cas général

Théorème T.V.I : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$

Preuve :

Rappelons que : $f(I) = J \Leftrightarrow (\forall x \in I)(f(x) \in J)$ et $(\forall y \in J)(\exists x \in I)(f(x) = y)$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I



a et b deux éléments de I tels que : $a < b$.

On sait que $f([a, b]) = [m, M]$

où $m = \min_{x \in [a; b]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [a; b]} f(x)$

On a donc $f(a) \in [m, M]$ et $f(b) \in [m, M]$.

Soit λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ on a donc :

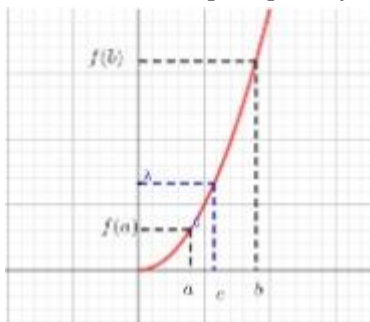
$\lambda \in [m, M]$ et puisque $f([a, b]) = [m, M]$ donc λ admet au moins un antécédent c dans l'intervalle $[a, b]$. D'où pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$

2) Cas f strictement monotone.

Théorème T.V.I (cas f strictement monotone)

Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a, b]$.

Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un et un seul $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$



Remarque : L'expression " Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un et un seul $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$ " peut-être formulée comme :
" Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution unique dans $[a, b]$

3) Corolaires

Corolaire1 (T.V.I) : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si $f(a) \times f(b) < 0$ il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$

Preuve : $f(a) \times f(b) < 0$ veut dire que :

$f(a)$ et $f(b)$ ont des signes opposés donc 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ On prend $\lambda = 0$ dans le théorème général des valeurs intermédiaire.

Corolaire2 (T.V.I) :

Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a, b]$. Si $f(a) \times f(b) < 0$ il existe un et un seul c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$

4) Applications :

Exemple1 : Montrer que l'équation :

$$4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0 \text{ admet une racine dans chacune}$$

des intervalles suivants : $]-1; -\frac{1}{2}[$; $]-\frac{1}{2}; 0[$ et $]0; 1[$

Solution : on considère la fonction : g tel que

$$g(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$$

• On a : g est continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynôme) donc continue sur tout intervalle de $\mathbb{R}$

○ Et on a : $g(-1) = -\frac{3}{2}$ et $g(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ donc :

$g(-\frac{1}{2}) \times g(-1) < 0$ donc : d'après le (T.V.I)

il existe $\alpha_1 \in]-1; -\frac{1}{2}[$ tel que : $g(\alpha_1) = 0$

○ Et on a : $g(0) = -\frac{1}{2}$ et $g(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ donc :

$g(-\frac{1}{2}) \times g(0) < 0$ donc : d'après le (T.V.I)

il existe $\alpha_2 \in]-\frac{1}{2}; 0[$ tel que : $g(\alpha_2) = 0$

○ Et on a : $g(0) = -\frac{1}{2}$ et $g(1) = \frac{1}{2}$ donc :

$g(1) \times g(0) < 0$ donc : d'après le (T.V.I)

il existe $\alpha_3 \in]0; 1[$ tel que : $g(\alpha_3) = 0$

donc l'équation : $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$ admet 3 racines

différentes dans chacune des intervalles:

$]-1; -\frac{1}{2}[$; $]-\frac{1}{2}; 0[$ et $]0; 1[$

Exemple2 : Montrer que l'équation : $x^3 + x + 1 = 0$

Admet une racine unique dans $]-1; 0[$

Solution : on considère la fonction : f tel que

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

- On a : f est continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynôme) donc continue sur $] -1; 0[$
- on a : $f(-1) = -1$ et $f(0) = 1$ donc :
 $f(1) \times f(-1) < 0$
- $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ sur $] -1; 0[$ donc f strictement croissante sur $] -1; 0[$

Donc : d'après le (T.V.I) l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $] -1; 0[$

Exercice9 : Montrer que l'équation : $\cos x = x$ Admet au moins une racine dans intervalle :
 $I = [0; \pi]$

Solution : $\cos x = x \Leftrightarrow \cos x - x = 0$

On pose : $f(x) = \cos x - x$

- On a : f est continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est la différence de deux fonctions continues) donc continue sur $I = [0; \pi]$
- on a : $f(\pi) = -1 - \pi < 0$ et $f(0) = 1$ donc :
 $f(0) \times f(\pi) < 0$

Donc : d'après le (T.V.I)

il existe $\alpha \in]0; \pi[$ tel que : $f(\alpha) = 0$

Exercice10 : Montrer que l'équation : $1 + \sin x = x$ Admet au moins une racine dans intervalle :

$$I = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3} \right]$$

Solution : $1 + \sin x = x \Leftrightarrow 1 + \sin x - x = 0$

On pose : $f(x) = 1 + \sin x - x$

- On a : f est continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est la différence de deux fonctions continues) donc continue sur $I = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3} \right]$
- on a : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4 - \pi}{2} > 0$ et

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{6 + 3\sqrt{3} - 4\pi}{6} < 0 \text{ donc : } f\left(\frac{\pi}{2}\right) \times f\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0$$

Donc : d'après le (T.V.I)

il existe $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3} \right]$ tel que : $f(\alpha) = 0$

Exercice11 : on considère la fonction : f tel que

$$f(x) = x^3 + x - 1$$

- 1) Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$
- 2) Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0; 1[$
- 3) étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

Solution :

1)a) On a : f est continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynôme)

b) $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f strictement croissante sur $\mathbb{R}$

c) on a : $f(\mathbb{R}) = f(]-\infty; +\infty[) = \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$
 $=]-\infty; +\infty[$ et on a : $0 \in f(\mathbb{R})$

donc d'après le (T.V.I) l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$

1) on a f est continue sur $[0; 1]$ et

$$f(0) \times f(1) < 0 \quad (f(0) = -1 \text{ et } f(1) = 1)$$

et f strictement croissante sur $[0; 1]$

Donc : d'après le (T.V.I) l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $\alpha \in]0; 1[$

3) étudions le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

1cas : si $x \leq \alpha$ alors $f(x) \leq f(\alpha)$ (car f strictement croissante sur $\mathbb{R}$)

Donc $f(x) \leq 0$ (car $f(\alpha) = 0$)

2cas : si $x \geq \alpha$ alors $f(x) \geq f(\alpha)$ (car f strictement croissante sur $\mathbb{R}$)

Donc $f(x) \geq 0$ (car $f(\alpha) = 0$)

VI) FONCTIONS COMPOSEES ET FONCTIONS RECIPROQUES.

1) Le théorème

Activité : Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1- Montrer que pour tout y dans $I = [0, +\infty[$, l'équation $f(y) = x$ admet une solution unique dans l'intervalle $J =]0, 1]$

2- Etudier la monotonie et la continuité de f sur $\mathbb{R}$

On dit que la fonction f admet une fonction réciproque de $J =]0, 1]$ vers $I = [0, +\infty[$

Théorème : Soit f une fonction définie continue et strictement monotone sur un intervalle I , On a f admet une fonction réciproque f^{-1} définie de $J = f(I)$ vers I .

donc f est une bijection de I vers $f(I)$

D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I et on a :

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad \forall x \in f(I)$$

$$(f^{-1} \circ f)(y) = y \quad \forall y \in I$$

2) Application :

Exemple1 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x-3}{x+2}$$

1) Montrer que la fonction g la restriction de f sur intervalle $I =]-2; +\infty[$ admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un J qu'il faut déterminer.

2) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle J

Solution : 1) $f(x) = \frac{x-3}{x+2} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0\}$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x-3}{x+2}\right)' = \frac{(x-3)'(x+2) - (x-3)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{1(x+2) - 1(x-3)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 1$

puisque g est strictement croissante et continue
sur : $I =]-2; +\infty[$

donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J = g(I) = g(]-2; +\infty[) =]-\infty; 1[$

$$2) \begin{cases} g(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x \in g(I) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(y) = x \\ y \in]-2; +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \frac{y-3}{y+2} = x \Leftrightarrow y-3 = x(y+2)$$

$$\Leftrightarrow y - xy = 2x + 3 \Leftrightarrow y(1-x) = 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2x+3}{1-x} \text{ Donc } g^{-1}(x) = \frac{2x+3}{1-x}$$

$$g^{-1}:]-\infty; 1[\rightarrow]-2; +\infty[$$

Donc : $x \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{2x+3}{1-x}$

Exercice 12: Soit f la fonction définie sur

$$I = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[\text{ par : } f(x) = \sqrt{2x-1}$$

1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un J qu'il faut déterminer.

2) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle J

3) Représenter (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans le même

repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

Solution : 1) $D_f = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[= I$

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[\quad f'(x) = (\sqrt{2x-1})' = \frac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} > 0$$

x	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

Donc : f est strictement croissante et continue

sur : $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[= I$

donc f admet une fonction réciproque f^{-1}

définie sur $J = f(I) = f\left(\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[\right) = [0; +\infty[$

$$2) \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases}$$

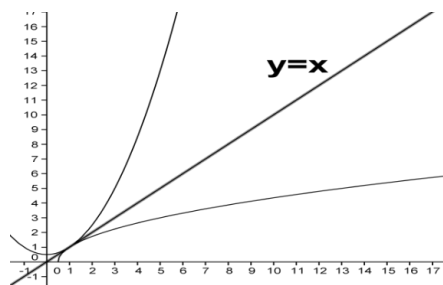
$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in [0; +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2y-1} = x \Leftrightarrow 2y-1 = x^2$$

$$\Leftrightarrow 2y = x^2 + 1 \Leftrightarrow y = \frac{x^2 + 1}{2}$$

Donc $f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$

Donc : $f^{-1} : [0; +\infty[\rightarrow \left[\frac{1}{2}; +\infty[\right.$
 $x \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$

3) $(C_{f^{-1}})$ et (C_f) sont symétriques par rapport à $(\Delta) y = x$



3) Propriété de la fonction réciproque

Propriété 1 : Si f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I alors f^{-1} a la même monotonie sur J que celle de f sur I .

Preuve :

$$T_{f^{-1}} = \frac{f^{-1}(x_1) - f^{-1}(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_2}{f(x_1) - f(x_2)}$$

$$T_{f^{-1}} = \frac{1}{\frac{f(x_1) - f(x_2)}{y_1 - y_2}}$$

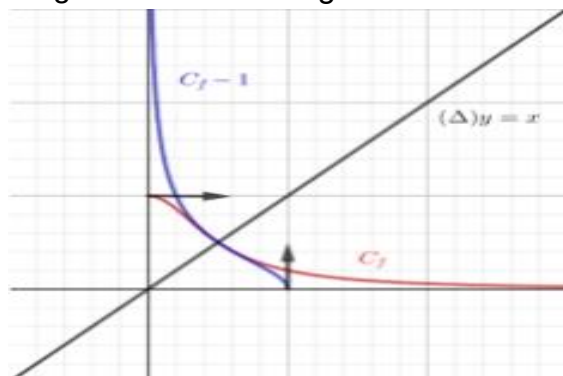
Donc le taux de f^{-1} sur J a le même signe que le taux de f sur I

Et on conclut.

Propriété 2 : Si f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I alors $(C_{f^{-1}})$ et (C_f) sont symétriques par rapport à $(\Delta) y = x$

Remarque :

La symétrie des deux courbes concerne toutes leurs composantes ; les asymptotes ; les tangentes et demi-tangentes...



4) La fonction racine n -ième

4.1 Définition et règles de calculs

Propriété et définition :

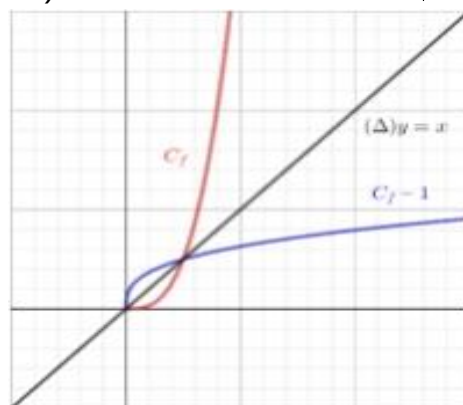
Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$; la fonction :

$f : x \rightarrow x^n$ est une fonction continue strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} de $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$

La fonction réciproque f^{-1} s'appelle la fonction racine n -ième et se note $\sqrt[n]{x}$

Conséquence de la définition :

- 1) La fonction $\sqrt[n]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$
- 2) $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \sqrt[n]{x} \geq 0$
- 3) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \quad \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$
- 4) La fonction $\sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ strictement croissante.
- 5) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \quad \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
- 6) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall a \in \mathbb{R}^+) \quad \sqrt[n]{x} \geq a \Leftrightarrow x \geq a^n$
- 7) $(\forall a \in \mathbb{R}^+) \quad \sqrt[n]{x} \leq a \Leftrightarrow 0 \leq x \leq a^n$
- 8) $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$
- 9) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall p \in \mathbb{N}) \quad (\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}$
- 10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
- 11) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$
- 12) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l$ et $l \geq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{l}$
- 13) La courbe de la fonction $\sqrt[n]{x}$



Règle de calcul :

- 1) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \quad \sqrt[n]{x \times y} = \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y}$
- 2) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+*) \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

$$3) (\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*) \sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[n \times p]{x}$$

$$4) (\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*) \sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[n \times p]{x^p}$$

(à prouver)

Remarque :

$$1) (\forall x \in \mathbb{R}^+) \sqrt[p]{x} = \sqrt[p]{x}$$

$$2) (\forall x \in \mathbb{R}^+) \sqrt[p]{x} = x$$

4.2 Résolution de l'équation $x^n = a$

Exemples : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1) x^5 = 32 \quad 2) x^7 = -128 \quad 3) x^4 = 3 \quad 4) x^6 = -8$$

Solutions : 1) $x^5 = 32$ donc $x > 0$

$$x = \sqrt[5]{32} \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{2^5} \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{donc : } S = \{2\}$$

$$2) x^7 = -128 \text{ donc } x < 0$$

$$\text{Donc : } x = -\sqrt[7]{128} \Leftrightarrow x = -\sqrt[7]{2^7} \Leftrightarrow x = -2$$

$$\text{Donc : } S = \{-2\}$$

$$3) x^4 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{3} \text{ ou } x = -\sqrt[4]{3}$$

$$\text{Donc : } S = \{-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3}\}$$

$$4) x^6 = -8$$

On a $x^6 \geq 0$ et $-8 < 0$ donc $S = \emptyset$

Exercices d'applications :

Exercice13 : simplifier les expressions

$$\text{suivantes : 1) } (\sqrt[3]{2})^3 \quad 2) \sqrt[4]{\sqrt{2}}$$

$$3) A = \sqrt[5]{32} - (\sqrt[7]{2})^7 + \sqrt[3]{\sqrt[5]{512}} + \frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$$

$$4) B = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{16} \times \sqrt[3]{\sqrt{4}} \times \sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$$

$$5) C = \frac{(27)^{\frac{2}{9}} \times (81)^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}} \quad 6) D = \sqrt[6]{\frac{2^5 \times 128000000}{27^2}}$$

$$7) E = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}} \quad 8) F = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{8} \times (\sqrt{\sqrt{2}})^2}{\sqrt[3]{4}}$$

$$\text{Solutions : 1) } (\sqrt[3]{2})^3 = 2 \quad 2) \sqrt[4]{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{2}$$

$$3) A = \sqrt[5]{32} - (\sqrt[7]{2})^7 + \sqrt[3]{\sqrt[5]{512}} + \frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}} = \sqrt[5]{2^5} - 2 + \sqrt[3]{2^5} + \sqrt[5]{\frac{96}{3}} = 2 - 2 + 2 + 2 = 4$$

$$A = 2 - 2 + \sqrt[9]{2^9} + \sqrt[5]{32} = 2 - 2 + 2 + 2 = 4$$

$$3) B = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{16} \times \sqrt[6]{4} \times \sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}} = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{2^4} \times \sqrt[6]{2^2} \times \sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$$

$$4)$$

$$B = \frac{2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{2}{6}} \times 2^{\frac{1}{15}}}{\sqrt[15]{2^8}} = \frac{2^{\frac{1}{3} + \frac{4}{5} + \frac{2}{6} + \frac{1}{15}}}{2^{\frac{8}{15}}} = \frac{2^{\frac{23}{15}}}{2^{\frac{8}{15}}} = 2^{\frac{23-8}{15}} = 2^{\frac{15}{15}} = 2$$

$$5) C = \frac{(27)^{\frac{2}{9}} \times (81)^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}} = \frac{(3^3)^{\frac{2}{9}} \times (3^4)^{\frac{1}{4}} \times (3^2)^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}} = \frac{3^{\frac{2}{3}} \times 3^1 \times 3^5}{3^{\frac{17}{3}}} = \frac{3^{\frac{20}{3}}}{3^{\frac{17}{3}}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$$

$$C = \frac{3^{\frac{20}{3}}}{3^{\frac{17}{3}}} = 3^{\frac{20-17}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$$

$$6) D = \sqrt[6]{\frac{2^5 \times 128000000}{27^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^5 \times 2^7 \times 10^6}{(3^3)^2}} = \sqrt[6]{\frac{10^6}{3^6} \times 2^{12}} =$$

$$D = \sqrt[6]{\left(\frac{10}{3}\right)^6} \times \sqrt[6]{(2^2)^6} = \frac{10}{3} \times 2^2 = \frac{40}{3}$$

$$7)$$

$$E = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}} = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{2^3}}{\sqrt[5]{2^7}} = \frac{10\sqrt{2^2} \times 10\sqrt{2^{15}}}{10\sqrt{2^7}}$$

$$= \frac{10\sqrt{2^{17}}}{10\sqrt{2^7}} = 10\sqrt{2^{10}} = 2$$

$$8) F = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{8} \times (\sqrt{\sqrt{2}})^2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{4^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{2}} \times \left(\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$F = \frac{4^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{2}{4}}}{4^{\frac{1}{6}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{2}{4}}}{2^{\frac{2}{6}}} = 2^{\frac{2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{2}{4} - \frac{1}{3}} = 2^{\frac{7}{3}}$$

$$F = 2^{2 + \frac{1}{3}} = 2^2 \times 2^{\frac{1}{3}} = 4\sqrt[3]{2}$$

Exercice14 : comparer : $\sqrt[5]{2}$ et $\sqrt[7]{3}$

Solutions : on a : $\sqrt[n \times m]{x^m} = \sqrt[n]{x}$

$$\sqrt[7]{3} = \sqrt[7 \times 5]{3^5} = \sqrt[35]{243} \text{ et } \sqrt[5]{2} = \sqrt[5 \times 7]{2^7} = \sqrt[35]{128}$$

On a : $\sqrt[35]{243} > \sqrt[35]{128}$ car $243 > 128$

Donc : $\sqrt[7]{3} > \sqrt[5]{2}$

Exercice 15 : résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$1) \sqrt[5]{3x-4} = 2 \quad 2) (\sqrt[5]{x})^2 - 5\sqrt[5]{x} + 6 = 0$$

Solutions :1)

$$\sqrt[5]{3x-4} = 2 \Leftrightarrow (\sqrt[5]{3x-4})^5 = (2)^5 \Leftrightarrow 3x-4 = 32$$

$$\Leftrightarrow x = 12 \text{ donc : } S = \{12\}$$

$$2) (\sqrt[5]{x})^2 - 5\sqrt[5]{x} + 6 = 0 \text{ on pose : } \sqrt[5]{x} = X$$

L'équation devient : $X^2 - 5X + 6 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 2$$

Donc : $\sqrt[5]{x} = 3$ ou $\sqrt[5]{x} = 2$

Donc : $x = 243$ ou $x = 32$

Donc : $S = \{32; 243\}$

Exercice 16 : calculez les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{x^3 + 24} \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5 + 2x^3 - x + 4}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} \quad 4) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6} - \sqrt{x+3}}{x-1} \quad 6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2 - 2}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x} - 1}$$

Solutions :

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{x^3 + 24} = \sqrt[5]{2^3 + 24} = \sqrt[5]{8 + 24} = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5 + 2x^3 - x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right)'' \text{ FI}$$

$$\text{On a : } a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+1} - 1)((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}{x((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+1})^3 - (1)^3}{x((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{x((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2} = \frac{1}{1+1 \times 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8} = \left(\frac{0}{0}\right)'' \text{ FI}$$

$$\text{On a : } a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - 2^3}{(x - 8)((\sqrt[3]{x})^2 + 2 \times \sqrt[3]{x} + 2^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{(x - 8)((\sqrt[3]{x})^2 + 2 \times \sqrt[3]{x} + 2^2)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + 2 \times \sqrt[3]{x} + 4} = \frac{1}{12}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6} - \sqrt{x+3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6} - 2}{x-1} - \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+6-8}{(x-1)((\sqrt[3]{2x+6})^2 + 2 \times \sqrt[3]{2x+6} + 2^2)} - \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(\sqrt[3]{2x+6})^2 + 2 \times \sqrt[3]{2x+6} + 2^2} - \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{12}$$

6)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2 - 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}}{\sqrt[6]{(x^2 - 2)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[6]{\frac{(x+1)^3}{(x^2 - 2)^2}} = 0$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^3}{(x^2 - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[4]{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[4]{\frac{x^2 - 1}{(x-1)^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[4]{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} = +\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 1^+} x+1 = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} x-1 = 0^+$$

Exercice 17 : simplifiez les expressions

$$\text{suivantes : 1) } A = \frac{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64} \times \sqrt[3]{\sqrt{252}} \times \sqrt{18}}$$

$$2) \text{ a) comparer : } \sqrt[5]{4} \text{ et } \sqrt[4]{3}$$

$$\text{b) comparer : } \sqrt[3]{28} \text{ et } \sqrt{13}$$

$$\text{c) comparer : } \sqrt[5]{23} \text{ et } \sqrt[15]{151}$$

Solutions : 1)

$$A = \frac{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64} \times \sqrt[3]{\sqrt{252}} \times \sqrt{18}} = \frac{\sqrt[3]{2^{10}} \times \sqrt[5]{2^{10} \times 10^5}}{\sqrt[4]{2^6} \times \sqrt[3]{\sqrt{2^8}} \times \sqrt{2 \times 3^2}}$$

$$A = \frac{2^{\frac{10}{3}} \times 2 \times 10}{2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{4}{3}} \times 3 \times 2^{\frac{1}{2}}} = 20$$

$$2) \text{ a) comparaison de : } \sqrt[5]{4} \text{ et } \sqrt[4]{3}$$

$$\text{on a } \sqrt[n \times m]{x^m} = \sqrt[n]{x}$$

$$\text{et on a : } \sqrt[4]{3} = \sqrt[4 \times 5]{3^5} = \sqrt[20]{243} \text{ et } \sqrt[5]{4} = \sqrt[5 \times 4]{4^4} = \sqrt[20]{256}$$

$$\text{donc } \sqrt[5]{4} > \sqrt[4]{3} \text{ car } 256 > 243$$

$$\text{b) comparaison de : } \sqrt[3]{28} \text{ et } \sqrt{13}$$

$$\text{on a } \sqrt[3]{28} = \sqrt[6]{28^2} = \sqrt[6]{784} \text{ et}$$

$$\sqrt{13} = \sqrt[2]{13} = \sqrt[2 \times 3]{13^3} = \sqrt[6]{2197}$$

$$\text{on a } \sqrt[6]{2197} > \sqrt[6]{784} \text{ car } \sqrt{13} > \sqrt[3]{28}$$

$$\text{b) comparaison de : } \sqrt[15]{151} \text{ et } \sqrt[5]{23}$$

$$\sqrt[5]{23} = \sqrt[15]{23^3} = \sqrt[15]{12167}$$

$$\text{Donc : } \sqrt[5]{23} > \sqrt[15]{151}$$

4.3 L'expression conjuguai et ses applications

On sait que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

et $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ Il en résulte :

$$a-b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} \text{ et } a+b = \frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2}$$

Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x-y}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2}$$

$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})$

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \frac{x+y}{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2}$$

Applications :

Exercice18 :1) Rendre le dénominateur rationnel

$$a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2} \quad b = \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} \quad c = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5}}$$

$$d = \frac{1}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}}$$

2) Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - x$$

Solutions :1)

$$a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2} \text{ on utilise : } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt[3]{2^2} + 2\sqrt[3]{2} + 2^2)}{(\sqrt[3]{2}-2)(\sqrt[3]{2^2} + 2\sqrt[3]{2} + 2^2)} = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt[3]{2^2} + 2\sqrt[3]{2} + 2^2)}{\sqrt[3]{2^3} - 2^3}$$

$$a = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt[3]{2^3} + 2\sqrt[3]{2} + 2^2)}{-6} = -\frac{\sqrt{2}(\sqrt[3]{2^3} + 2\sqrt[3]{2} + 2^2)}{2}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} = \frac{\sqrt[3]{2}-1}{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} \times 1 + 1^2)}$$

$$b = \frac{\sqrt[3]{2}-1}{(\sqrt[3]{2})^3 - 1^3} = \sqrt[3]{2} - 1$$

$$c = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2}}{(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2})}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2}}{(\sqrt[3]{2})^3 - (\sqrt[3]{5})^3} = -\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25}}{3}$$

$$d = \frac{1}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2^2}}$$

$$d = \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2^2})} = \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{5})^3 - (\sqrt[3]{2})^3}$$

$$d = \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}{3}$$

$$\text{2) a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1} \text{ on utilise :}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1})(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \times 1 + 1^2)}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \times 1 + 1^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \times 1 + 1)}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})(\sqrt[3]{x}-1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \times 1 + 1)}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})} = \frac{-6}{2} = \frac{-3}{2}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3+1} - x)(\sqrt[3]{(x^3+1)^2} + x\sqrt[3]{x^3+1} \times 1 + x^2)}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2} + x\sqrt[3]{x^3+1} \times 1 + x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2} + x\sqrt[3]{x^3+1} \times 1 + x^2} = 0$$

D'ordre 4 :

On sait que $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

$$\text{Il en résulte : } a-b = \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}$$

Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})$

$$\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3}}$$

A remarquer qu'on ne peut pas factoriser :

$$a^4 + b^4$$

Exercice19 : Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{20x^2-4}-2}{2x^2+x-3}$$

$$\text{Solutions : } \frac{\sqrt[4]{20x^2-4}-2}{2x^2+x-3} = \frac{\sqrt[4]{20x^2-4}-\sqrt[4]{16}}{2x^2+x-3}$$

$$= \frac{20x^2-4-16}{(2x^2+x-3)(\sqrt[4]{(20x^2-4)^3} + \sqrt[4]{(20x^2-4)^2} \times 4 + \sqrt[4]{(20x^2-4)16} + \sqrt[4]{16^3})}$$

$$= \frac{20(x+1)}{(2x+3)\left(\sqrt[4]{(20x^2-4)^3} + \sqrt[4]{(20x^2-4)^2} + \sqrt[4]{(20x^2-4)} + \sqrt[4]{16^3}\right)}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{20x^2-4} - 2}{2x^2 + x - 3} = \frac{1}{8}$

Exercice 20: 1) simplifier les expressions

suivantes : $A = \frac{\sqrt[15]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times (\sqrt[5]{9})^3}{\sqrt[5]{3}}$

et $B = \frac{\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[5]{9}}{\sqrt[5]{81} \times \sqrt{\sqrt[3]{3}}}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

a) $\sqrt[3]{x-1} = 3$ b) $x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} - 8 = 0$

c) $\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - 12 = 0$

2) Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^5 + x^2 + 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$

Solution :

$$A = \frac{\sqrt[15]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times (\sqrt[5]{9})^3}{\sqrt[5]{3}} = \frac{(3^{\frac{5}{15}})^{\frac{1}{15}} \times (3^2)^{\frac{1}{3}} \times (3^{\frac{1}{5}})^3}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{3}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}}$$

$$A = \frac{3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{3^{\frac{8}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = 3^{\frac{8-1}{5}} = 3^{\frac{7}{5}} = (3^{\frac{1}{5}})^7 = (\sqrt[5]{3})^7$$

$$B = \frac{\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[5]{9}}{\sqrt[5]{81} \times \sqrt{\sqrt[3]{3}}} = \frac{(3^2)^{\frac{1}{4}} \times (3^3)^{\frac{1}{3}} \times (3^2)^{\frac{1}{5}}}{(3^4)^{\frac{1}{5}} \times (3^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}} \times 3 \times 3^{\frac{2}{5}}}{(3^4)^{\frac{1}{5}} \times (3^{\frac{1}{6}})^{\frac{1}{2}}}$$

$$B = \frac{3^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{4}{5}} \times (3^{\frac{1}{6}})^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{3}{2} - \frac{4}{5} - \frac{1}{12}} = 3^{\frac{30-24-5}{60}} = 3^{\frac{1}{60}} = \sqrt[60]{3}$$

$$B = 3^{\frac{23}{40}} = \sqrt[40]{3^{23}}$$

2) a) $\sqrt[3]{x-1} = 3 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x-1})^3 = 3^3 \Leftrightarrow x-1 = 27$

$\Leftrightarrow x = 28$ donc : $S = \{28\}$

b) $x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} - 8 = 0 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 7x^{\frac{1}{3}} - 8 = 0$

on pose : $x^{\frac{1}{3}} = X$ donc : $X^2 - 7X - 8 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 49 + 32 = 81 > 0$$

$$x_1 = \frac{7+9}{2 \times 1} = \frac{16}{2} = 8 \text{ et } x_2 = \frac{7-9}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

Donc : $x^{\frac{1}{3}} = 8$ ou $x^{\frac{1}{3}} = -1$

$x^{\frac{1}{3}} = -1$ n'a pas de solutions

$$x^{\frac{1}{3}} = 8 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = (8)^3 \Leftrightarrow x = 512$$

Donc : $S = \{512\}$

c) $\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - 12 = 0$ on a $x \geq 0$

$$\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - 12 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[6]{x^3} - \sqrt[6]{x^2} - 12 = 0$$

on pose : $\sqrt[6]{x} = X$ donc : $X^3 + X^2 - 12 = 0$

on remarque que 2 est racine de cette équation

donc : $X^3 + X^2 - 12 = (X - 2)(X^2 + 3X + 6)$

$$X^3 + X^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow X = 2 \text{ ou } X^2 + 3X + 6 = 0$$

$\Delta = -15 < 0$ donc $X^2 + 3X + 6 = 0$ n'a pas de solutions

Donc : $X = 2 \Leftrightarrow \sqrt[6]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 2^6 = 64$

Donc : $S = \{64\}$

2) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^5 + x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^5} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$ on a $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)((\sqrt[3]{x})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2)}{(x - 1)((\sqrt[3]{x})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{((\sqrt[3]{x})^3 - 1^3)}{(x - 1)((\sqrt[3]{x})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)((\sqrt[3]{x})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{((\sqrt[3]{x})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2)} = \frac{1}{1 + 1 \times 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x ((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}{(\sqrt[3]{x+1} - 1)((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x ((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}{(\sqrt[3]{x+1} - 1)((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \left((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2 \right) = 1 \times 3 = 3$$

Exercice 21:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^4 = 16$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x-1)^3 = -27$

5) Puissance rationnelle :

5.1 Puissance entier

Rappelle : Soit x un réel et n un entier naturel

non nul on a : $x^n = \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}}$ et ($x \neq 0$)

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

5.2 Puissance rationnelle

Propriété : Pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout entier

non nul q on pose : $\sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$

Définition :

Soit x un réel positif et r un rationnel ($r \in \mathbb{Q}$) ;

$r = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$x^r = x^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$$

Exemple : $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$

$$2^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{2^{-2}} = \sqrt[7]{\frac{1}{2^2}} = \sqrt[7]{\frac{1}{4}}$$

Propriétés

Soit x et y deux réels positifs, r et r' des rationnels on a :

1. $x^{r+r'} = x^r \times x^{r'}$
2. $x^{r \times r'} = (x^r)^{r'} = (x^{r'})^r$
3. $x^{-r'} = \frac{1}{x^{r'}} \quad (x \neq 0)$
4. $x^{r-r'} = \frac{x^r}{x^{r'}} \quad (x \neq 0)$
5. $(xy)^r = x^r y^r$
6. $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$

Exercice22 : Considérons la fonction f définie

par : $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$; si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

1) Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$

2) Etudier la continuité de f sur les intervalles

$]0; +\infty[$ et $]-\infty; 0[$ et est ce f est continue sur $\mathbb{R}$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ **Solution :** 1) $x \in \mathbb{R}^* \quad \left| \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$

donc : $|x| \left| \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$ donc : $\left| x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$

donc : $-|x| \leq f(x) \leq |x|$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -|x| = 0$

Alors : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$

Donc : f est continue en $x_0 = 0$

2) on a la fonction : $f_1 : x \rightarrow \frac{1}{x}$ continue sur les

intervalles $]0; +\infty[$ et $]-\infty; 0[$ et les fonctions :

$f_2 : x \rightarrow \cos x$ et $f_3 : x \rightarrow x$ sont continués sur les

intervalles $]0; +\infty[$ et $]-\infty; 0[$

Donc : $f = f_3 \times (f_2 \circ f_1)$ est continue sur les

intervalles $]0; +\infty[$ et $]-\infty; 0[$

Et puisque : f est continue en $x_0 = 0$

Alors f est continue sur $\mathbb{R}$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$?

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $x \rightarrow \cos x$ est continue en $x_0 = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x} = \cos 0 = 1$

Et puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cos \frac{1}{x} = +\infty$

Exercice23 : soient f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ tels que f est bornée et g continue sur $\mathbb{R}$; Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées sur $\mathbb{R}$

Solution :1) f est bornée sur $\mathbb{R}$ donc il existent deux réels m et M tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$

$m \leq f(x) \leq M$

Donc : $f(x) \in [m; M] \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc : $g(f(x)) \in g([m; M]) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

et puisque g est continue sur $\mathbb{R}$ alors

g est continue sur $[m; M]$ donc il existent deux

réels a et b tel que $g([m; M]) = [a; b]$

donc $g(f(x)) \in [a; b] \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc $a \leq g(f(x)) \leq b \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc $a \leq (g \circ f)(x) \leq b \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc $g \circ f$ sont bornée sur $\mathbb{R}$

2) la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ donc :

$g(\mathbb{R}) = I$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$

et puisque f est bornée sur $\mathbb{R}$ Donc :

$f(y) \in [m; M] \quad \forall y \in I$

Donc : $f(g(x)) \in [m; M] \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc : $m \leq (f \circ g)(x) \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc $f \circ g$ sont bornée sur $\mathbb{R}$

Exercice 24: Considérons la fonction f continue

Sur l'intervalle $[a; b]$ et x_1 et x_2 et x_3 des

nombres de l'intervalle $[a; b]$

Montrer que l'équation :

$3f(x) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$ admet au moins

une solution dans $[a; b]$

Solution :

On considéré la fonction g définie sur $[a; b]$ par

$g(x) = 3f(x) - (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$

la fonction g est continue sur l'intervalle $[a; b]$

soit $f(\alpha)$ le plus petit des nombres $f(x_1); f(x_2)$

; $f(x_3)$ et soit $f(\beta)$ le plus grand des nombres

$f(x_1); f(x_2)$ et $f(x_3)$

On a : $g(\alpha) = 3f(\alpha) - (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$

$g(\alpha) = (f(\alpha) - f(x_1)) + (f(\alpha) - f(x_2)) + (f(\alpha) - f(x_3))$

Donc : $g(\alpha) \leq 0$

De même : on a : $g(\beta) = 3f(\beta) - (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$

$g(\beta) = (f(\beta) - f(x_1)) + (f(\beta) - f(x_2)) + (f(\beta) - f(x_3))$

Donc : $g(\beta) \geq 0$

et puisque g est continue sur $[a; b]$

Donc : d'après le (T.V.I) il existe un réel c dans

$[a; b]$ tel que : $g(c) = 0$

Cad $3f(c) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$

Donc l'équation $3f(x) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$

admet au moins une solution dans $[a; b]$

Exercice 25 : soient f et g sont deux fonctions continues sur $[a; b]$ tels que :

$0 < g(x) < f(x) \quad \forall x \in [a; b]$

Montrer que :

$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in [a; b]; (1 + \lambda)g(x) \leq f(x)$

Solution : Montrons que :

$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in [a; b]; (1 + \lambda)g(x) \leq f(x)$ Cad :

$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in [a; b]; \lambda \leq \frac{f(x)}{g(x)} - 1$

On considéré la fonction h définie sur $[a; b]$ par

$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - 1$ la fonction h est continue sur

l'intervalle $[a; b]$ car f et g sont continues sur

l'intervalle $[a; b]$ et $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a; b]$ Donc la

fonction h admet un minimum λ Cad il existe

$x_0 \in [a; b]$ tel que :

$\lambda = h(x_0) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - 1$ et $\lambda \leq h(x) \quad \forall x \in [a; b]$

On a : $0 < g(x_0) < f(x_0)$ donc $0 < \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - 1$

donc : $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ donc :

$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in [a; b]; (1 + \lambda)g(x) \leq f(x)$

Exercice 26: Considérons la fonction f continue

Sur l'intervalle $[a; b]$ tel que : $f(a) < 0$

il existe $x_0 \in]a; b[$ tel que : $f(x_0) = \frac{a - x_0}{b - x_0}$

Solution :

On a : $f(x_0) = \frac{a - x_0}{b - x_0} \Leftrightarrow (b - x_0)f(x_0) - (a - x_0) = 0$

On considéré la fonction g définie par :

$g(x) = (b - x)f(x) - (a - x)$; la fonction g est

continue sur l'intervalle $[a; b]$ car c'est la somme

de fonctions continues sur $[a; b]$

On a : $g(a) = (b - a)f(a) < 0$ car $f(a) < 0$

Et $b-a > 0$ et on a : $g(b) = b-a > 0$

Donc : d'après le (T.V.I) il existe $x_0 \in]a; b[$ tel

que : $g(x_0) = 0$ cad $f(x_0) = \frac{a-x_0}{b-x_0}$

Exercice 27 : Soit la fonction $f(x) = x^2 + x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1- Déterminer $J = f([0,1])$

2- Montrer que f admet une fonction réciproque de J vers $[0,1]$ et déterminer $f^{-1}(x) \forall x \in J$

Exercice 28 : Soit la fonction $g(x) = x - 2\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

1- Montrer que g est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ puis déterminer $J = g([1, +\infty[)$

2- Montrer que g admet une fonction réciproque de J vers $[1, +\infty[$ et déterminer $g^{-1}(x) \forall x \in J$

Exercice 29 : Soit la fonction $h(x) = \frac{x}{1-x^2}$

Montrer que h est une bijection de $] -1, 1[$ vers un intervalle J qu'il faut déterminer et déterminer et déterminer $h^{-1}(x) \forall x \in J$

Exercice 30 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $\sqrt[3]{x} - x = 0$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} + 6 = 0$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

