

## Continuité

Prof. Smail BOUGUERCH

### La continuité en un point:

#### Définition :

$$f \text{ continue en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

### La continuité à droite – à gauche – en un point:

$$f \text{ continue à droite en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

$$f \text{ continue à gauche en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

$$f \text{ continue en } x_0 \Leftrightarrow f \text{ continue à droite et à gauche en } x_0$$

### La continuité sur un intervalle:

$f$  continue sur un intervalle ouvert  $]a;b[$ , si  $f$  est continue en tous points de cet intervalle

$f$  continue sur un intervalle fermé  $[a;b]$ , si  $f$  est continue sur l'intervalle ouvert  $]a;b[$ , et continue à droite en  $a$ , et à gauche en  $b$

### Operations sur les fonctions continues:

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$  et  $k$  un réel quelconque

- Les fonctions :  $f + g$  ;  $f \times g$  ;  $k \times f$  sont aussi continues sur  $I$
- Si on a  $(\forall x \in I); g(x) \neq 0$  alors les fonctions  $\frac{1}{g}$  et  $\frac{f}{g}$  sont continues sur  $I$

### Résultats:

- Tout polynôme est continu sur  $\mathbb{R}$
- Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition
- La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$
- Les fonctions  $x \mapsto \sin x$  et  $x \mapsto \cos x$  sont continues sur  $\mathbb{R}$
- La fonction  $x \mapsto \tan x$  est continue sur son domaine de définition  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

### La continuité d'un composé de deux fonctions:

Si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  et  $g$  est continue sur un intervalle  $J$  tel que  $f(I) \subset J$  alors  $g \circ f$  est continue sur  $I$

### Image d'un intervalle par une fonction continue:

- L'image d'un segment (intervalle fermé) par une fonction continue est un segment
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

### Cas particulier:

Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$

Le tableau suivant montre la nature de l'intervalle  $f(I)$

L'intervalle $I$	L'intervalle $f(I)$	
	$f$ strictement croissante sur $I$	$f$ strictement décroissante sur $I$
$\mathbb{R}$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$[a; b[$	$\left[ f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a) \right]$
$]a; b]$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b) \right]$	$\left[ f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$]a; b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$[a; +\infty[$	$\left[ f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a) \right]$
$]a; +\infty[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$]-\infty; a]$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(a) \right]$	$\left[ f(a); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$
$]-\infty; a[$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$

### Théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.):

Si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $[a; b]$ , alors pour tout réel  $\beta$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel  $\alpha$  dans l'intervalle  $[a; b]$  tel que :  $f(\alpha) = \beta$

#### Résultats:

Si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $[a; b]$  et  $f(a) \times f(b) < 0$

Alors l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $[a; b]$

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $[a; b]$  et  $f(a) \times f(b) < 0$

Alors l'équation  $f(x) = 0$  possède une et une seule solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $[a; b]$

#### Méthode de dichotomie:

Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $[a; b]$  et  $f(a) \times f(b) < 0$

Et soit  $\alpha$  l'unique solution de l'équation  $f(x) = 0$  sur l'intervalle  $[a; b]$

$$\text{Si } f(a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$$

Alors  $a < \alpha < \frac{a+b}{2}$  et cette encadrement a une capacité qui vaut:  $\frac{b-a}{2}$ , on refait la même chose avec l'intervalle  $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$  pour obtenir une meilleure précision de l'encadrement de  $\alpha$

$$\text{Si } f(b) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$$

Alors  $\frac{a+b}{2} < \alpha < b$  et cette encadrement a une capacité qui vaut:  $\frac{b-a}{2}$ , on refait la même chose avec l'intervalle  $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$  pour obtenir une meilleure précision de l'encadrement de  $\alpha$

**Remarque :** et ainsi de suite jusqu'à obtention de la précision d'encadrement demandée