

Continuité

Prof. Smail BOUGUERCH

La continuité en un point:

Définition :

$$f \text{ continue en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

La continuité à droite – à gauche – en un point:

$$f \text{ continue à droite en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

$$f \text{ continue à gauche en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

$$f \text{ continue en } x_0 \Leftrightarrow f \text{ continue à droite et à gauche en } x_0$$

La continuité sur un intervalle:

f continue sur un intervalle ouvert $]a;b[$, si f est continue en tous points de cet intervalle

f continue sur un intervalle fermé $[a;b]$, si f est continue sur l'intervalle ouvert $]a;b[$, et continue à droite en a , et à gauche en b

Opérations sur les fonctions continues:

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et k un réel quelconque

- Les fonctions : $f + g$; $f \times g$; $k \times f$ sont aussi continues sur I
- Si on a $(\forall x \in I); g(x) \neq 0$ alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I

Résultats:

- Tout polynôme est continu sur \mathbb{R}
- Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur \mathbb{R}^+
- Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur \mathbb{R}
- La fonction $x \mapsto \tan x$ est continue sur son domaine de définition $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

La continuité d'un composé de deux fonctions:

Si f est continue sur un intervalle I et g est continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$

alors $g \circ f$ est continue sur I

Image d'un intervalle par une fonction continue:

- L'image d'un segment (intervalle fermé) par une fonction continue est un segment
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

Cas particulier:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
 Le tableau suivant montre la nature de l'intervalle $f(I)$

L'intervalle I	L'intervalle $f(I)$	
	f strictement croissante sur I	f strictement décroissante sur I
\mathbb{R}	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$[a; b[$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a) \right]$
$]a; b]$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b) \right]$	$\left[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$]a; b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$[a; +\infty[$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a) \right]$
$]a; +\infty[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$]-\infty; a]$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(a) \right]$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$
$]-\infty; a[$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$

Théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.):

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, alors pour tout réel β compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel α dans l'intervalle $[a; b]$ tel que : $f(\alpha) = \beta$

Résultats:

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α sur l'intervalle $[a; b]$

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$

Alors l'équation $f(x) = 0$ possède une et une seule solution α sur l'intervalle $[a; b]$

Méthode de dichotomie:

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$

Et soit α l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[a; b]$

$$\text{Si } f(a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$$

Alors $a < \alpha < \frac{a+b}{2}$ et cette encadrement a une capacité qui vaut: $\frac{b-a}{2}$, on refait la même chose avec l'intervalle $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$ pour obtenir une meilleure précision de l'encadrement de α

$$\text{Si } f(b) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$$

Alors $\frac{a+b}{2} < \alpha < b$ et cette encadrement a une capacité qui vaut: $\frac{b-a}{2}$, on refait la même chose avec l'intervalle $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$ pour obtenir une meilleure précision de l'encadrement de α

Remarque : et ainsi de suite jusqu'à obtention de la précision d'encadrement demandée