

Continuité

EL KYAL MOHAMED

➤ Continuité en un point :

$$f \text{ est continue en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

➤ Continuité à droite - Continuité à gauche :

- f est continue à droite en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$
- f est continue à gauche en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$
- f est continue en $x_0 \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche en x_0

➤ Continuité sur un intervalle :

- f est continue sur un intervalle ouvert $[a, b]$ si f est continue en chaque élément de $[a, b]$
- f est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ si f est continue sur l'intervalle ouvert $[a, b]$ et f est continue à droite en a et à gauche en b

➤ Opérations sur les fonctions continues:

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et k un réel

- Les fonctions $f + g$, $f \times g$, kf et f^n avec $n \in \mathbb{N}$, sont continues sur I
- Les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I si g ne s'annule pas sur I

Conséquences :

- Les fonctions polynômes sont continues sur \mathbb{R}
- Les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle contenu dans leur domaine de définition
- La fonction : $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty]$
- Les fonctions : $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur \mathbb{R}

➤ Composé de deux fonctions continues:

Si f une fonction continue sur un intervalle I et g une fonction continue sur l'intervalle $f(I)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I

➤ L'image d'un intervalle par une fonction continue:

- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

Cas particulier :

Soit f est continue et strictement monotone sur un intervalle I

Le tableau suivant illustre les différents cas possibles de l'intervalle $f(I)$

L'intervalle I	L'intervalle $f(I)$	
	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$[a, b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$[a, b[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a)]$
$]a, b]$	$[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b)]$	$[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)]$
$]a, b[$	$[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)]$
$[a, +\infty[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a)]$
$]a, +\infty[$	$[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)]$
$]-\infty, a]$	$[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(a)]$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$
$]-\infty, a[$	$[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow a^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$
\mathbb{R}	$[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$

➤ Théorème des valeurs intermédiaires :

Si f est continue sur un intervalle $[a, b]$, alors pour tout réel β compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un réel α de l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(\alpha) = \beta$

Si f est continue sur un intervalle $[a, b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $[a, b]$

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[a, b]$

➤ Méthode de dichotomie :

Soit f est fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$ l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[a, b]$

$$\text{Si } f(a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$$

Alors: $a < \alpha < \frac{a+b}{2}$

l'amplitude de cet encadrement est: $\frac{b-a}{2}$.

On poursuit la recherche de α sur l'intervalle $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$

$$\text{Si } f\left(\frac{a+b}{2}\right) \times f(b) < 0$$

Alors: $\frac{a+b}{2} < \alpha < b$

l'amplitude de cet encadrement est: $\frac{b-a}{2}$.

On poursuit la recherche de α sur l'intervalle $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$

On arrête le processus dès que l'amplitude de l'encadrement de α est inférieur à la précision souhaitée