

Exercice 1 : (3pts)

On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$$U_0 = 0 \text{ et } U_{n+1} = \frac{U_n - 2}{2U_n + 5} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} $U_n > -1$

Pour $n = 0$ on a $U_0 = 0$ donc $U_0 > -1$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n > -1$ et montrons que $U_{n+1} > -1$ c'est-à-dire $U_{n+1} + 1 > 0$

$$\begin{aligned} U_{n+1} + 1 &= \frac{U_n - 2}{2U_n + 5} + 1 = \frac{U_n - 2 + 2U_n + 5}{2U_n + 5} \\ &= \frac{3U_n + 3}{2U_n + 5} = \frac{3(U_n + 1)}{2U_n + 5} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } U_{n+1} + 1 = \frac{3(U_n + 1)}{2U_n + 5}$$

On a $U_n > -1$ donc $U_n + 1 > 0$ donc $3(U_n + 1) > 0$

On a $U_n > -1$ donc $2U_n + 5 > 3$

$$\text{Donc } \frac{3(U_n + 1)}{2U_n + 5} > 0 \text{ donc } U_{n+1} + 1 > 0$$

D'où $U_n > -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Montrer que (U_n) est décroissante, puis déduire que (U_n) est convergente.

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{U_n - 2}{2U_n + 5} - U_n \\ &= \frac{U_n - 2 - 2U_n^2 - 5U_n}{2U_n + 5} = \frac{-2U_n^2 - 4U_n - 2}{2U_n + 5} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } U_{n+1} - U_n = \frac{-2(U_n + 1)^2}{2U_n + 5}$$

On a $U_n + 1 > 0$ et $2U_n + 5 > 3$

$$\text{Donc } -2(U_n + 1)^2 < 0 \text{ donc } \frac{-2(U_n + 1)^2}{2U_n + 5} < 0$$

Donc $U_{n+1} - U_n < 0$

D'où (U_n) est décroissante.

On a (U_n) est décroissante et minorée par -1 donc elle est convergente.

$$3) \text{ On pose } V_n = \frac{3}{1+U_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique de raison 2 puis déterminer son premier terme.

$$V_{n+1} - V_n = ? \text{ on a } V_n = \frac{3}{1+U_n}$$

$$\text{Donc } V_{n+1} = \frac{3}{1+U_{n+1}} \text{ Or } U_{n+1} + 1 = \frac{3(U_n + 1)}{2U_n + 5}$$

$$\text{Donc } V_{n+1} - V_n = \frac{3(2U_n + 5)}{3(U_n + 1)} - \frac{3}{1+U_n} = \frac{2(1+U_n)}{1+U_n}$$

Donc $V_{n+1} - V_n = 2$

$$V_0 = \frac{3}{1+U_0} \text{ donc } V_0 = 3$$

D'où (V_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $V_0 = 3$.

b) Exprimer U_n en fonction de n , pour tout n de \mathbb{N} et déduire la limite de (U_n) .

(V_n) est une suite arithmétique de raison 2 et $V_0 = 3$.

$$V_n = V_0 + 2n \text{ donc } V_n = 2n + 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{On a } V_n = \frac{3}{1+U_n} \text{ donc } 1+U_n = \frac{3}{V_n}$$

$$\text{Donc } U_n = \frac{3-V_n}{V_n} \text{ donc } U_n = \frac{3-2n-3}{2n+3}$$

$$\text{D'où } U_n = \frac{-2n}{2n+3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2n}{2n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2n}{2n} = -1$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -1$$

4) On pose $W_n = e^{3-V_n}$ et $S_n = W_0 + W_1 + \dots + W_n$ pour tout n de \mathbb{N} .

a) Montrer que (W_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.

$$W_n = e^{3-V_n} \text{ et } V_n = 2n + 3$$

$$W_n = e^{3-2n-3} \text{ donc } W_n = e^{-2n}$$

$$W_{n+1} = e^{-2(n+1)} \text{ donc } W_{n+1} = e^{-2n-2} = e^{-2}e^{-2n}$$

$$\text{Donc } W_{n+1} = e^{-2}W_n$$

Donc (W_n) est une suite géométrique de raison

$$q = e^{-2}$$

et de premier terme $W_0 = 1$

b) Calculer la limite de la somme S_n .

On a (W_n) est une suite géométrique de raison

$$q = e^{-2}$$

et de premier terme $W_0 = 1$

On a $S_n = W_0 + W_1 + \dots + W_n$

$$\text{On sait que } S_n = W_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ et } q = e^{-2} \text{ et } W_0 = 1$$

$$\text{Donc } S_n = \frac{1-e^{-2(n+1)}}{1-e^{-2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-e^{-2(n+1)}}{1-e^{-2}}$$

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} -2(n+1) = -\infty \text{ on pose } t = -2(n+1)$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2(n+1)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{1-e^{-2}}$$

Exercice 2 : (3pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct,

$(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$ on considère les points

A(2,1, 2), B(-2,0, 5), C(4,-5, 7) et $\Omega(1,-1, 0)$.

On pose $\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\Omega A}$

Soit (S) la sphère de centre Ω et de rayon $R = 3$

1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 13\vec{\mathbf{u}}$ et en déduire que A, B, et C sont non alignés.

C(4,-5, 7); B(-2,0, 5); A(2,1, 2); $\Omega(1,-1, 0)$.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{\Omega A} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} -1 & -6 & \vec{\mathbf{i}} \\ 3 & 5 & \vec{\mathbf{j}} \\ -4 & 2 & \vec{\mathbf{k}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & 2 & \vec{\mathbf{i}} \\ -1 & -6 & \vec{\mathbf{j}} \\ 3 & 5 & \vec{\mathbf{k}} \end{vmatrix}$$

$$= 13\vec{\mathbf{i}} + 26\vec{\mathbf{j}} + 26\vec{\mathbf{k}} = 13(\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}})$$

Or $\overrightarrow{\Omega A} = \vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}}$ et $\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\Omega A}$ donc $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}}$

D'où $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 13\vec{\mathbf{u}}$ avec $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}}$

On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 13\vec{\mathbf{u}}$ donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ car $\vec{\mathbf{u}} \neq \vec{0}$

D'où A, B, et C sont non alignés.

b) Vérifier que $x + 2y + 2z - 8 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

Soit $M(x ; y ; z) \in (ABC)$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 13\vec{\mathbf{u}}$ est un vecteur normal à (ABC)

Donc $\vec{\mathbf{u}}(1;2;2)$ est aussi est un vecteur normal à (ABC).

(ABC) : $x + 2y + 2z - d = 0$ or $A(2,1, 2) \in (ABC)$

Donc $2 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + d = 0$ donc $d = -8$

Donc (ABC) : $6x - 6y + 3z + 9 = 0$

D'où (ABC) : $x + 2y + 2z - 8 = 0$

c) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A.

$\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\Omega A}$ est un vecteur normal à (ABC)

Donc $(\Omega A) \perp (ABC)$ donc A est le projeté

orthogonal de Ω sur (ABC)

Donc $d(\Omega; (ABC)) = \Omega A$

or $\overrightarrow{\Omega A}(1;2;2)$ donc $\Omega A = \sqrt{1+4+4}$ donc $\Omega A = 3$ et $R = 3$

Donc $A \in (S)$

$d(\Omega; (ABC)) = R$ et $A \in (S)$

D'où le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A.

Autre méthode

(ABC) : $x + 2y + 2z - 8 = 0$ et $\Omega(1,-1, 0)$

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|1 + 2 \times (-1) + 0 - 8|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{9}{3} = 3 \text{ et } R = 3$$

Donc le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

or $\overrightarrow{\Omega A}(1;2;2)$ donc $\Omega A = \sqrt{1+4+4}$ donc $\Omega A = 3$ et $R = 3$

Donc $A \in (S)$

D'où le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A.

2) Soient (P) le plan d'équation cartésienne

$3x + 4y + z + 1 = 0$ et (Δ) la droite passant par le point A et orthogonale au plan (P).

a) Montrer que la droite (Δ) coupe le plan (P) au point

$$\mathbf{H}\left(\frac{1}{2}; -1; \frac{3}{2}\right)$$

On a $\vec{\mathbf{n}}(3;4;1)$ est un vecteur normal à (P) et $(\Delta) \perp (P)$

Donc $\vec{\mathbf{n}}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ)

Soit $M(x ; y ; z) \in (\Delta)$

$$(\Delta) : \begin{cases} \mathbf{x} = 2 + 3t \\ \mathbf{y} = 1 + 4t \\ \mathbf{z} = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$H(x; y; z) \in (\Delta) \cap (P)$ équivaut à

$$\begin{cases} \mathbf{x} = 2 + 3t \\ \mathbf{y} = 1 + 4t \\ \mathbf{z} = 2 + t \\ 3x + 4y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$3(2 + 3t) + 4(1 + 4t) + 2 + t + 1 = 0$$

Donc

$$6 + 9t + 4 + 16t + t + 3 = 0 \Leftrightarrow 26t = -13 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x} = 2 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ \mathbf{y} = 1 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \quad \text{d'où} \quad \mathbf{H}\left(\frac{1}{2}; -1; \frac{3}{2}\right) \\ \mathbf{z} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

b) Déterminer les coordonnées du point D tel que H soit le milieu du segment [AD]

H est le milieu du segment [AD]

$$\text{Donc } \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AH} \quad \overrightarrow{AH}\left(\frac{1}{2} - 2; -2; \frac{3}{2} - 2\right)$$

$$\text{Donc } 2\overrightarrow{AH}(-3; -4; -1) \text{ et } \overrightarrow{AD}(x_D - 2; y_D - 1; z_D - 2)$$

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 2 = -3 \\ y_D - 1 = -4 \\ z_D - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -1 \\ y_D = -3 \\ z_D = 1 \end{cases}$$

D'où $D(-1; -3; 1)$

3) Soit (Q) le plan passant par le point D et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega D}$

$\overrightarrow{\Omega D}$ est un vecteur normal à (Q) et $D \in (Q)$

Donc $(\Omega D) \perp (Q)$ donc D est le projeté orthogonal de Ω sur (Q)

Donc $d(\Omega; (Q)) = \Omega D$ et $\Omega D = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$

Donc $D \in (S)$ et $d(\Omega; (Q)) = 3$ et $R = 3$

D'où le plan (Q) est tangent à la sphère (S) au point D.

b) Montrer que les plans (Q) et (ABC) se coupent suivant la droite (BC).

Soit $M(x ; y ; z) \in (Q)$

$\vec{\Omega D}(-2; -2; 1)$ est un vecteur normal à (Q)

$$(Q) : -2x - 2y + z + d = 0 \text{ or } D(-1; -3; 1) \in (Q)$$

$$\text{Donc } 2 + 6 + 1 + d = 0 \text{ donc } d = -9$$

$$\text{Donc } (Q) : -2x - 2y + z - 9 = 0$$

$$\text{D'où } (Q) : 2x + 2y - z + 9 = 0$$

$$B(-2, 0, 5) \in (Q) \text{ car } 2 \times (-2) + 2 \times 0 - 5 + 9 = 0$$

$$C(4, -5, 7) \in (Q) \text{ car } 2 \times 4 + 2 \times (-5) - 7 + 9 = 0$$

$$\text{Donc } (BC) \subset (Q) \text{ or } (BC) \subset (ABC)$$

$$\text{Donc } (BC) \subset (ABC) \cap (Q)$$

$$A(2, 1, 2) \notin (Q) \text{ car } 2 \times 2 + 2 \times 1 - 2 + 9 = 13 \neq 0$$

Or $A \in (ABC)$ donc (Q) et (ABC) ne sont pas confondus.

$$\text{D'où } (ABC) \cap (Q) = (BC)$$

Exercice 3 : (3pts)

1) Soit le nombre complexe $a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

a) Montrer que $a = \sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \text{ donc } |a| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

$$a = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \text{ donc } a = \sqrt{3}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

b) Déduire que a^{2022} est un nombre réel.

$$\text{On a } a = \sqrt{3}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \text{ donc}$$

$$a^{2022} = \left[\sqrt{3}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \right]^{2022} \text{ donc}$$

$$a^{2022} = \sqrt{3}^{2022} \left(\cos 2022 \frac{\pi}{3} + i \sin 2022 \frac{\pi}{3}\right)$$

$$a^{2022} = \left(\sqrt{3}^2\right)^{1011} \left(\cos 674\pi + i \sin 674\pi\right)$$

$$\text{On a } \cos 674\pi = 1 \text{ et } \sin 674\pi = 0$$

$$\text{Donc } a^{2022} = 3^{1011}$$

2) Déterminer une mesure de l'angle de la rotation R de centre O et qui transforme B en A.

A(a) et B(a)

$R(B) = A \Leftrightarrow a - 0 = e^{i\theta}(\bar{a} - 0)$ où θ est l'angle de la rotation.

$$\text{Donc } a = e^{i\theta} \bar{a} \Leftrightarrow e^{i\theta} = \frac{a}{\bar{a}} \text{ or } a = \sqrt{3}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{Donc } a = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ donc } \bar{a} = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{donc } \frac{a}{\bar{a}} = \frac{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}} \text{ donc } e^{i\theta} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ donc } \theta = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$$

Une mesure de l'angle de la rotation R est $\frac{2\pi}{3}$.

$$3) (E_\alpha) : z^2 - \sqrt{3}z + \alpha = 0$$

a) Justifier que $\alpha > \frac{3}{4}$ et que $\alpha = z\bar{z}$

On a l'équation (E_α) admet deux racines complexes conjuguées non réelles z et \bar{z}

$$\text{Donc } \Delta < 0 \text{ et } \Delta = (-\sqrt{3})^2 - 4\alpha$$

$$\text{Donc } 3 - 4\alpha < 0 \text{ donc } \alpha > \frac{3}{4}$$

On a z et \bar{z} sont les solutions de l'équation (E_α)

$$z\bar{z} = \frac{\alpha}{1} \text{ et } z + \bar{z} = -\frac{-\sqrt{3}}{1} \text{ donc } z\bar{z} = \alpha \text{ et } z + \bar{z} = \sqrt{3}$$

$$\text{Donc } \alpha = z\bar{z}$$

b) Montrer que $|z| = |z - \sqrt{3}|$

$$\text{On a } z + \bar{z} = \sqrt{3} \text{ donc } \bar{z} = \sqrt{3} - z$$

$$\text{Donc } |\bar{z}| = |\sqrt{3} - z| \text{ or } |\bar{z}| = |z| \text{ et } |\sqrt{3} - z| = |z - \sqrt{3}|$$

$$\text{D'où } |z| = |z - \sqrt{3}|$$

c) En déduire que les points M et N appartiennent à la médiatrice (Δ) du segment [OP]

$$\text{On a } |z| = |z - \sqrt{3}| \Leftrightarrow |z - 0| = |\bar{z} - \sqrt{3}| ; M(z) \text{ et } P(\sqrt{3})$$

Donc $MO = MP$ donc $M \in (\Delta)$ la médiatrice de [OP]

$$|z| = |z - \sqrt{3}| \text{ et } |\bar{z}| = |z| \text{ et } |\bar{z} - \sqrt{3}| = |\bar{z} - \sqrt{3}| = |\bar{z} - \sqrt{3}|$$

$$\text{Donc } |\bar{z}| = |\bar{z} - \sqrt{3}| \Leftrightarrow |\bar{z} - 0| = |\bar{z} - \sqrt{3}| ; N(\bar{z}) \text{ et } P(\sqrt{3})$$

Donc $NO = NP$ donc $N \in (\Delta)$ la médiatrice de [OP]

d) Déterminer la valeur de α pour laquelle $|z - \sqrt{3}| = \sqrt{3}$

et déduire dans ce cas les points d'intersection de la droite (Δ) et le cercle de centre P et de rayon $\sqrt{3}$

$$\text{On a } |z - \sqrt{3}| = \sqrt{3} \text{ et } |z| = |z - \sqrt{3}| \text{ donc } |z| = \sqrt{3}$$

$$|z|^2 = 3 \text{ or } |z|^2 = z\bar{z} \text{ et } \alpha = z\bar{z} \text{ d'où } \alpha = 3$$

$$\text{On a } |z - \sqrt{3}| = \sqrt{3} \text{ et } M(z) \text{ et } P(\sqrt{3})$$

$MP = \sqrt{3}$ donc M appartient au cercle (C) de centre P et de rayon $\sqrt{3}$

$$\text{Et on a } |z - \sqrt{3}| = |\bar{z} - \sqrt{3}| \text{ donc } |\bar{z} - \sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

$NP = \sqrt{3}$ donc N appartient au cercle (C) de centre P et de rayon $\sqrt{3}$.

Or $M \in (\Delta)$ et $N \in (\Delta)$

D'où les points d'intersection de la droite (Δ) et le cercle (C) de centre P et de rayon $\sqrt{3}$ sont M et N.

Exercice 4:(3pts)

1) On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

$$4 \text{ B} ; 2 \text{ N}$$

$$\text{Card}(\Omega) = C_6^2 = 15$$

a) Calculer la probabilité de l'événement :

"A" tirer au moins une boule noire"

(1N et 1B) ou 2N

$$\text{Card(A)} = C_2^1 \times C_4^1 + C_2^2 = 8 + 1 = 9$$

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

b) Soit l'événement B : "Obtenir deux boules de même couleur" montrer que $P(B) = \frac{7}{15}$

2B ou 2N

$$\text{Card}(B) = C_4^2 + C_2^2 = 6 + 1 = 7$$

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{7}{15}$$

c) La probabilité pour que l'événement B soit réalisé exactement trois fois est : $C_5^3(P(B))^3(1-P(B))^2$

$$C_5^3(P(B))^3(1-P(B))^2 = 10 \left(\frac{7}{15}\right)^3 \left(\frac{8}{15}\right)^2$$

2) a) justifier que les valeurs prises par X sont 1 ; 2 et 3
 $X = 1$ la première boule tirée est blanche et on arrête le tirage.

$X = 2$ la première boule tirée est noire, la deuxième est blanche et on arrête le tirage.

$X = 3$ la première boule et la deuxième sont noires et la troisième est blanche et on arrête le tirage.

b) Montrer que $P(X = 2) = \frac{4}{15}$

$(X = 2)$: "la première boule tirée est noire et la deuxième est blanche" $P(X = 2) = \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$

c) les valeurs prises par X sont 1 ; 2 et 3

$(X = 1)$: "la boule tirée est blanche"

$$P(X = 1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$(X = 3)$: "la première boule et la deuxième sont noires et la troisième est blanche"

$$P(X = 3) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{4} = \frac{1}{15}$$

k	1	2	3
P(X=k)	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$(On \ a \ \frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = 1)$$

d) La probabilité d'obtenir au moins une boule noire est : $P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{3}$

Problème : (8pts)

On considère la fonction f définie sur R par :

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)^2 e^{x(2-x)} & x \leq 2 \\ f(x) = 1 + (x-2)^2 \ln(x-2) & x > 2 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue au point 2.

On a $f(2) = (2-1)^2 e^{2(2-2)} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 + (x-2)^2 \ln(x-2)$$

On pose t = x - 2 si $x \rightarrow 2^+$ alors $t \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} 1 + t^2 \ln(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} 1 + t \times t \ln(t)$$

Donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} 1 + t \times t \ln(t) = 1$ car $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$ car $f(2) = 1$

Donc f est continue à droite en 2

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1)^2 e^{x(2-x)} = 1$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$ donc f est continue à gauche

en 2. Puisque f est continue à droite en 2.

D'où f est continue en 2.

2) a) Vérifier que pour tout $x < 2$ et $x \neq 0$

$$\frac{f(x) - f(2)}{x-2} = xe^{x(2-x)} - x \frac{e^{x(2-x)} - 1}{x(2-x)}$$

$$xe^{x(2-x)} - x \frac{e^{x(2-x)} - 1}{x(2-x)} = \frac{x(2-x)e^{x(2-x)} - e^{x(2-x)} + 1}{(2-x)}$$

$$= \frac{e^{x(2-x)}(2x - x^2 - 1) + 1}{-(x-2)} = -\frac{-e^{x(2-x)}(x-1)^2 + 1}{(x-2)}$$

$$xe^{x(2-x)} - x \frac{e^{x(2-x)} - 1}{x(2-x)} = \frac{(x-1)^2 e^{x(2-x)} - 1}{(x-2)} = \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$$

$$D'où \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = xe^{x(2-x)} - x \frac{e^{x(2-x)} - 1}{x(2-x)}$$

c) Montrer que f est dérivable en 2 et que $f'(2) = 0$ puis interpréter les résultats géométriquement.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} xe^{x(2-x)} - x \frac{e^{x(2-x)} - 1}{x(2-x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = 2e^0 - 2 \times 1 = 0 ; t = x(2-x)$$

$$Car \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{x(2-x)} - 1}{x(2-x)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

$$Donc \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = 0$$

Donc f est dérivable à gauche en 2 et $f'_g(2) = 0$

c) Montrer que f est dérivable en 2 et que $f'(2) = 0$
puis interpréter les résultats géométriquement

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1 + (x-2)^2 \ln(x-2) - 1}{x-2}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \ln(x-2)$$

On pose $t = x-2$ si $x \rightarrow 2^+$ alors $t \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \ln(x-2) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 0$$

Donc f est dérivable à droite en 2 et $f'_d(2) = 0$

Puisque f est dérivable à droite et à gauche en 2 et

$$f'_g(2) = f'_d(2) = 0$$

D'où f est dérivable en 2 et que $f'(2) = 0$

On a f est dérivable en 2 et $f'(2) = 0$

Donc la courbe (C) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2.

3) a) Vérifier que pour tout $x \leq 2$

$$f(x) = x(x-2)e^{x(2-x)} + e^{x(2-x)}$$

$$\text{Pour tout } x \leq 2 \quad f(x) = (x-1)^2 e^{x(2-x)}$$

$$\text{Donc } f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{x(2-x)}$$

$$\text{Donc } f(x) = (x^2 - 2x)e^{x(2-x)} + e^{x(2-x)}$$

$$\text{Donc } f(x) = x(x-2)e^{x(2-x)} + e^{x(2-x)}$$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement

Le résultat.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(x-2)e^{x(2-x)} + e^{x(2-x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x(2-x)e^{x(2-x)} + e^{x(2-x)}$$

On pose $t = x(2-x)$ si $x \rightarrow -\infty$ alors $t \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} -te^t + e^t = 0$$

$$\text{Car } \lim_{t \rightarrow -\infty} te^t = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ (C) admet une asymptote

horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + (x-2)^2 \ln(x-2) = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + (x-2)^2 \ln(x-2)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{x^2(1-\frac{2}{x})^2 \ln(x-2)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + x(1-\frac{2}{x})^2 \ln(x-2) = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1-\frac{2}{x})^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) = +\infty$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ Donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

4) a) Montrer que pour tout $x < 2$

$$f'(x) = 2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}$$

$$\text{Pour tout } x < 2 \quad f(x) = (x-1)^2 e^{x(2-x)}$$

$$f'(x) = 2(x-1)e^{x(2-x)} + (x-1)^2 e^{x(2-x)}(x(2-x))'$$

$$f'(x) = 2(x-1)e^{x(2-x)} + (x-1)^2 e^{x(2-x)}(2-2x)$$

$$\text{Donc } f'(x) = 2(x-1)e^{x(2-x)} [1 + (x-1)(1-x)]$$

$$\text{Donc } f'(x) = 2(x-1)e^{x(2-x)} x(2-x))$$

$$\text{D'où } f'(x) = 2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)} \quad \forall x < 2$$

b) Montrer que pour tout $x > 2$

$$f'(x) = (x-2)(1 + \ln(x-2))$$

$$\text{Pour tout } x > 2 \quad f(x) = 1 + (x-2)^2 \ln(x-2)$$

$$f'(x) = 2(x-2) \ln(x-2) + (x-2)^2 \times \frac{1}{x-2}$$

$$\text{Donc } f'(x) = (x-2)[2 \ln(x-2) + 1]$$

$$\text{D'où } f'(x) = (x-2)(1 + \ln(x-2)) \quad \forall x > 2$$

c) Résoudre dans l'intervalle $]2; +\infty[$ l'inéquation :

$$\forall x \in]2; +\infty[\quad 1 + 2 \ln(x-2) \leq 0$$

$$1 + 2 \ln(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(x-2) \leq -\frac{1}{2}$$

$$\ln(x-2) \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{\ln(x-2)} \leq e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x-2 \leq e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x \leq 2 + e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x \leq 2 + \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\text{On a } x > 2 \text{ et } x \leq 2 + \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ donc } 2 < x \leq 2 + \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\text{D'où } S = \left] 2; 2 + \frac{1}{\sqrt{e}} \right]$$

d) Etudier le signe de $f'(x)$ sur \mathbb{R} puis dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .

$$\forall x > 2 \quad f'(x) = (x-2)(1+2\ln(x-2))$$

Le signe $f'(x)$ est celui de $1+2\ln(x-2)$

$\forall x > 2$ on a $x-2 > 0$

$$\text{On a } 1+2\ln(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow 2 < x \leq 2 + \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\forall x \in \left[2; 2 + \frac{1}{\sqrt{e}} \right] \quad f'(x) \leq 0$$

$$\text{On a } 1+2\ln(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 + \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\forall x \in \left[2 + \frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty \right[\quad f'(x) \geq 0$$

$$\forall x < 2 \quad f'(x) = 2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}$$

$$\forall x < 2 \quad 2-x > 0 \text{ et } e^{x(2-x)} > 0$$

Le signe $f'(x)$ est celui de $x(x-1)$

$$x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

$$x(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$$

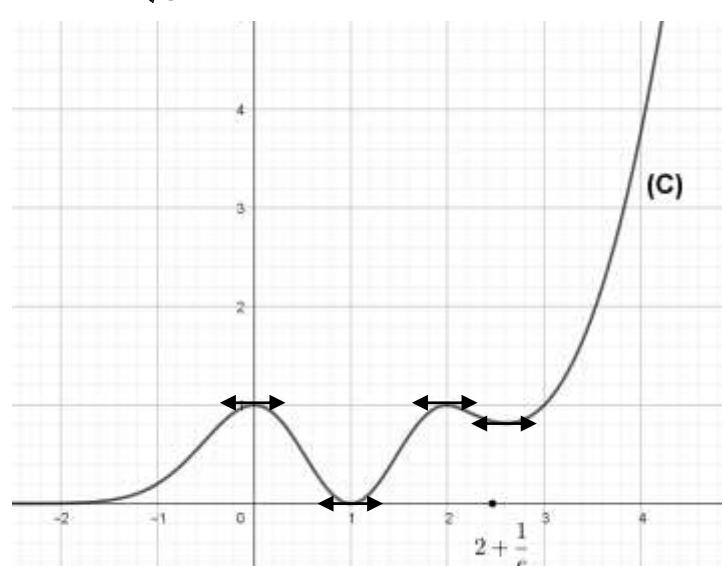
$$\forall x \in [0; 1] \quad f'(x) \leq 0$$

$$x(x-1) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[\cup]1; 2[$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; 2[\quad f'(x) > 0 \text{ et on a } f'(2) = 0$$

x	$-\infty$	0	1	2	$2 + \frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0
$f(x)$	0	1	0	1	0,8	$+\infty$

5) $f(2 + \frac{1}{\sqrt{e}}) \approx 0,8$



6) Soit $\lambda \in]2; 3[$

a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_{\lambda}^3 (x-2)^2 \ln(x-2) dx = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}(\lambda-2)^3 \left(\frac{1}{3} - \ln(\lambda-2) \right)$$

on pose $J = \int_{\lambda}^3 (x-2)^2 \ln(x-2) dx$

$$u(x) = \ln(x-2) \quad u'(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$v'(x) = (x-2)^2 \quad v(x) = \frac{(x-2)^3}{3}; (x-2)' = 1$$

$$J = \left[\frac{(x-2)^3}{3} \ln(x-2) \right]_{\lambda}^3 - \int_{\lambda}^3 \frac{(x-2)^3}{3} \frac{1}{x-2} dx$$

$$\Leftrightarrow J = -\frac{1}{3}(\lambda-2)^3 \ln(\lambda-2) - \frac{1}{3} \int_{\lambda}^3 (x-2)^2 dx$$

$$\text{Donc } J = -\frac{1}{3}(\lambda-2)^3 \ln(\lambda-2) - \frac{1}{3} \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_{\lambda}^3$$

$$\text{Donc } J = -\frac{1}{3}(\lambda-2)^3 \ln(\lambda-2) - \frac{1}{9}(1 - (\lambda-2)^3)$$

$$\text{D'où } J = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}(\lambda-2)^3 \left(\frac{1}{3} - \ln(\lambda-2) \right)$$

b) Déduire en fonction de λ l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites

d'équations : $y = 1$, $x = \lambda$ et $x = 3$

$\forall x \in]2; 3]$ (C) est en dessous de la droite d'équations : $y = 1$

$$A(\lambda) = \int_{\lambda}^3 |f(x) - 1| dx \text{ 1cm} \times 1\text{cm}$$

$\forall x \in]2; 3]$ (C) est en dessous de la droite d'équations : $y = 1$

$$\int_{\lambda}^3 |f(x) - 1| dx = \int_{\lambda}^3 1 - f(x) dx$$

$$\int_{\lambda}^3 1 - f(x) dx = \int_{\lambda}^3 1 - 1 - (x-2)^2 \ln(x-2) dx$$

$$\text{Donc } \int_{\lambda}^3 1 - f(x) dx = - \int_{\lambda}^3 (x-2)^2 \ln(x-2) dx$$

$$\text{Or } \int_{\lambda}^3 (x-2)^2 \ln(x-2) dx = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}(\lambda-2)^3 \left(\frac{1}{3} - \ln(\lambda-2) \right)$$

$$A(\lambda) = \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{3}(\lambda-2)^3 \left(\frac{1}{3} - \ln(\lambda-2) \right) \right) \text{cm}^2$$

c) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow 2^+} A(\lambda)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 2^+} \frac{1}{9} - \frac{1}{3}(\lambda-2)^3 \left(\frac{1}{3} - \ln(\lambda-2) \right)$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 2^+} \frac{1}{9} - \frac{1}{3}(\lambda-2)^2 \left[\frac{1}{3}(\lambda-2) - (\lambda-2)\ln(\lambda-2) \right]$$

On pose $t = \lambda - 2$ si $\lambda \rightarrow 2^+$ alors $t \rightarrow 0^+$ Donc $\lim_{\lambda \rightarrow 2^+} (\lambda - 2) \ln(\lambda - 2) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = 0$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 2^+} \frac{1}{3}(\lambda - 2)^2 \left[\frac{1}{3}(\lambda - 2) - (\lambda - 2) \ln(\lambda - 2) \right] = 0$$

D'où $\lim_{\lambda \rightarrow 2^+} A(\lambda) = \frac{1}{9} \text{cm}^2$