

Exercice 1:

1) $A(2; 1; 0)$ $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ $P(A; \vec{u})$

1^{ère} méthode :

Soit $M(x; y; z) \in (P)$

$\vec{u}(1; 1; -1)$ est un vecteur normal à (P)

Donc $(P): x + y - z + d = 0$ or $A(2; 1; 0) \in (P)$

Donc $2 + 1 - 0 + d = 0$ donc $d = -3$

D'où $(P): x + y - z - 3 = 0$

2^{ème} méthode :

Soit $M(x; y; z) \in (P)$ donc $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$ $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}; \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Donc $(x-2) \times 1 + (y-1) \times 1 + z \times (-1) = 0$

D'où $(P): x + y - z - 3 = 0$

2) (S) l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient:

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est la sphère (S) de centre Ω le milieu du

segment $[AB]$ donc $\Omega \left(\frac{2+(-4)}{2}; \frac{1+1}{2}; \frac{0+0}{2} \right)$ donc

$\Omega(-1; 1; 0)$ et de rayon $R = \frac{AB}{2}$ donc

$AB = \sqrt{6^2 + 0 + 0} = 6$ D'où $R = 3$

3) a) $d(\Omega; (P)) = \frac{|-1+1-0-3|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

On a $d(\Omega; (P)) = \sqrt{3}$ et $R = 3$ donc $d(\Omega; (P)) < 3$ donc le plan (P) coupe (S) suivant un cercle (C) .

b) Montrer que le centre du cercle (C) est $H(0; 2; -1)$.

H le centre du cercle (C) est la projection orthogonale de Ω sur le plan (P) , donc c'est le point d'intersection entre la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P) .

On a $(\Delta) \perp (P)$ et $\vec{u}(1; 1; -1)$ est un vecteur normal à

(P) donc c'est un vecteur directeur de la droite (Δ)

Soit $M(x; y; z) \in (\Delta)$

$$(\Delta): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 0 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

H est le centre du cercle (C) donc $(\Delta) \cap (P) = \{H\}$

Première méthode :

$M(x; y; z) \in (\Delta) \cap (ABC)$ équivaut à

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -t \\ x + y - z - 3 = 0 \\ -1 + t + 1 + t + t - 3 = 0 \Leftrightarrow 3t = 3 \Leftrightarrow t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_H = -1 + 1 \\ y_H = 1 + 1 \\ z_H = -1 \end{cases} \quad \text{d'où } H(0; 2; -1) \text{ est le centre du cercle } (C)$$

Deuxième méthode :

On a $(\Delta) \cap (P) = \{H\}$

on a que $H(0; 2; -1) \in (P)$ car $0 + 2 - (-1) - 3 = 0$

il suffit de montrer que $H \in (\Delta)$ $H(0; 2; -1)$

$$\begin{cases} 0 = -1 + t \\ 2 = 1 + t \\ -1 = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases} \quad \text{donc } H \in (\Delta)$$

D'où $H(0; 2; -1)$ est le centre du cercle (C)

4) Montrer que : $\overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$ puis calculer la surface du triangle OHB .

$$\overrightarrow{OH} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{OB} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= \vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k} \end{aligned}$$

D'où $\overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$

$$S_{OHB} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{OB}\| \text{ et } \|\overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{OB}\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2} = 9$$

$$\text{D'où } S_{OHB} = \frac{9}{2}$$

Exercice 2:

I - On considère le nombre complexe a tel que :

$$a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

1) Montrer que le module du nombre complexe a est

$$2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$|a| = |2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}| = \sqrt{(2 + \sqrt{2})^2 + \sqrt{2}^2}$$

$$|a| = \sqrt{4 + 4\sqrt{2} + 2 + 2} = \sqrt{4(2 + \sqrt{2})}$$

$$\text{D'où } |a| = 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

2) Vérifier que : $a = 2(1 + \cos \frac{\pi}{4}) + 2i \sin \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} 2(1 + \cos \frac{\pi}{4}) + 2i \sin \frac{\pi}{4} &= 2(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) + 2i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} = a \end{aligned}$$

$$\text{D'où } a = 2(1 + \cos \frac{\pi}{4}) + 2i \sin \frac{\pi}{4}$$

3) a) En linéarisant $\cos^2 \theta$, θ est un nombre réel

montrer que : $1 + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ donc } \cos^2 \theta = \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2}{4}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{e^{i2\theta} + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-i2\theta}}{4}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{\cos 2\theta + i \sin 2\theta + 2 + \cos 2\theta - i \sin 2\theta}{4}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{2 \cos 2\theta + 2}{4} = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$$

D'où $1 + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta$

b) Montrer que $a = 4 \cos \frac{\pi}{8} (\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8})$ est une forme trigonométrique du nombre a montrer que

$$a = (2\sqrt{2 + \sqrt{2}})^4 i$$

On a $1 + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta$ on prend $\theta = \frac{\pi}{8}$

$$1 + \cos \frac{\pi}{4} = 1 + \cos 2 \frac{\pi}{8} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8}$$

Et on sait que $\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$

$$\text{Donc } \sin \frac{\pi}{4} = \sin 2 \frac{\pi}{8} = 2 \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}$$

$$\text{On a } a = 2(1 + \cos \frac{\pi}{4}) + 2i \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Donc } a = 2(2 \cos^2 \frac{\pi}{8}) + 2i(2 \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8})$$

$$a = 4 \cos^2 \frac{\pi}{8} + i 4 \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}$$

$$\text{Donc } a = 4 \cos \frac{\pi}{8} (\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}) \text{ or } 0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Donc } \cos \frac{\pi}{8} > 0$$

D'où $a = 4 \cos \frac{\pi}{8} (\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8})$ est une forme trigonométrique du nombre a .

$$\text{On a } |a| = 2\sqrt{2 + \sqrt{2}} \text{ et } \arg a = \frac{\pi}{8} [2\pi]$$

$$\text{Donc } |a^4| = |a|^4 = (2\sqrt{2 + \sqrt{2}})^4$$

$$\text{Et } \arg a^4 = 4 \arg a [2\pi] \text{ donc } \arg a^4 = 4 \frac{\pi}{8} [2\pi]$$

$$\arg a^4 = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{Donc } a^4 = (2\sqrt{2 + \sqrt{2}})^4 (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ et } \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\text{D'où } a = (2\sqrt{2 + \sqrt{2}})^4 i$$

II - On considère, Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ on considère les deux points Ω et A d'affixes respectives ω et a tels que :

$\omega = \sqrt{2}$; $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et la rotation R de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Montrer que l'affixe b du point B image du point A par la rotation R est $2i$.

Le point B image du point A par la rotation R

$$\text{On a } R(A) = B \Leftrightarrow b - \omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(a - \omega)$$

$$\text{Donc } R(A) = B \Leftrightarrow b = e^{i\frac{\pi}{2}}(a - \omega) + \omega$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}}(a - \omega) + \omega = i(2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - \sqrt{2}) + \sqrt{2}$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}}(a - \omega) + \omega = i(2 + i\sqrt{2}) + \sqrt{2} = 2i - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2i$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}}(a - \omega) + \omega = b \text{ car } b = 2i$$

D'où $R(A) = B$

2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tel que : $|z - 2i| = 2$

$$\text{On a } b = 2i \text{ donc } |z - b| = 2 \Leftrightarrow BM = 2$$

L'ensemble des points M d'affixes z tel que: $|z - 2i| = 2$

Est le cercle de centre B et de rayon 2 .

Exercice 3 : (2015 Session annulée) (3pts)

Une caisse U_1 contient 7 boules : 4R ; 3V

Une caisse U_2 contient 5 boules : 3R ; 2V

I) on tire au hasard et en même temps 3 boules de U_1 .

$$\text{Card}(\Omega) = C_7^3 = 35$$

A" Obtenir une boule rouge et deux boules vertes"

$$\text{Card}(A) = C_4^1 \times C_3^2 = 4 \times 3 = 12$$

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{12}{35}$$

B " Obtenir trois boules de la même couleur "

$$\text{Card}(B) = C_4^3 + C_3^3 = 4 + 1 = 5$$

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

II) On tire au hasard et en même temps 2 boules de U_1 , puis on tire au hasard une boules de U_2 .

C " Obtenir trois boules rouges"

$$\text{Card}(\Omega') = C_7^2 \times C_5^1 = 105$$

$$\text{Card}(C) = C_4^2 \times C_3^1 = 6 \times 3 = 18$$

$$P(C) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega')} = \frac{18}{105} = \frac{6}{35}$$

Problème : (2015 Session annulée) (8pts)

$$f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$$

1) 1) Montrer que : $D_f =]0; e[\cup]e; +\infty[$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } (1 - \ln x) \neq 0\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } \ln x \neq 1\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / (x > 0) \text{ et } (x \neq e)\}$$

D'où $D_f =]0; e[\cup]e; +\infty[$

2) a)

	0	e
$1 - \ln x$	+	○ -

$$\lim_{x \rightarrow e^+} (1 - \ln x) = 0^- \text{ et } \lim_{x \rightarrow e^-} (1 - \ln x) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} \frac{1}{x(1-\ln x)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{1}{x(1-\ln x)} = +\infty$$

On a $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = +\infty$

la droite d'équation $x = e$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(1-\ln x)} = 0$

car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1-\ln x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(1-\ln x)}$

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} -x \ln x = 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - x \ln x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(1-\ln x)} = +\infty$$

la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

3) a - Montrer que: $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2} \quad \forall x \in D_f$

$$f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$$

$$f'(x) = -\frac{(x(1-\ln x))'}{x^2(1-\ln x)^2} = -\frac{(1-\ln x) + x(-1)}{x^2(1-\ln x)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{1-\ln x-1}{x^2(1-\ln x)^2} = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$$

$$D'où f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2} \quad \forall x \in D_f$$

b) On a $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2} \quad \forall x \in D_f$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $\ln x$ car

$$\frac{1}{x^2(1-\ln x)^2} > 0 \quad \forall x \in D_f$$

x	0	1	$+\infty$
lnx	-	0	+

$$\forall x \in]0, 1] \quad f'(x) \leq 0$$

donc f est décroissante sur $]0, 1]$

$\forall x \in [1; e[\cup]e; +\infty[\quad f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur chacun des intervalles $[1; e[$ et $]e; +\infty[$

b - Dresser le tableau des variations de f sur D_f

x	0	1	e	$+\infty$
f'(x)		- 0 +		
f(x)	$+\infty$	$\searrow 1$	$\nearrow +\infty$	$\nearrow 0$

II) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$$

(C_g) est la courbe représentative de g dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (voir figure)

1) a) Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation suivante (E) : $g(x) = 0; x \in]0; +\infty[$

La courbe de g coupe l'axe des abscisses en deux points donc l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions

b) On a g est continue sur $[2, 2; 2, 3]$

$$\begin{cases} g(2, 2) = -0,02 \\ g(2, 3) = 0,12 \end{cases} \quad g(2, 2) \times g(2, 3) < 0$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires

l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α telle que : $2, 2 < \alpha < 2, 3$

2) a) Vérifier que : $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)} \quad \forall x \in D_f$

$$f(x) - x = \frac{1}{x(1-\ln x)} - x \quad \forall x \in D_f$$

$$f(x) - x = \frac{1 - x^2(1 - \ln x)}{x(1-\ln x)} = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$$

$$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

$$\text{Or } g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \alpha$$

$$\text{Donc } f(x) - x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \alpha$$

On a $\forall x \in [1; \alpha]$ $g(x) \leq 0$ car (C_g) est en dessous de l'axe des abscisses.

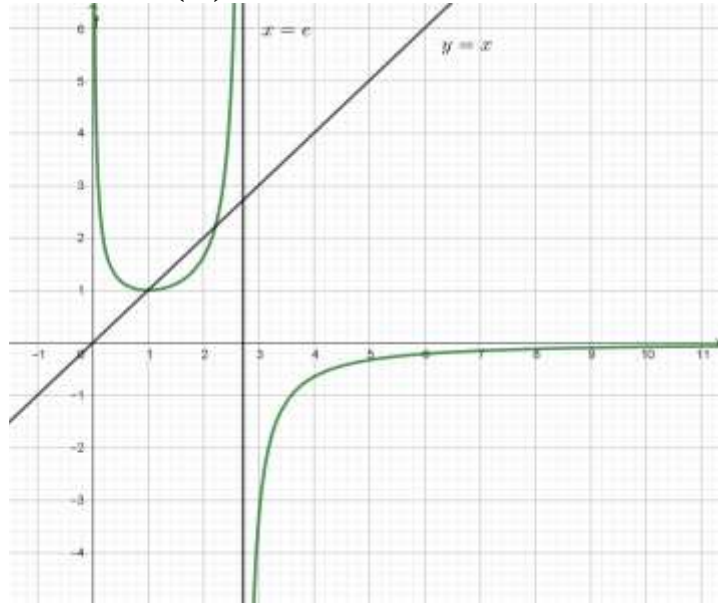
On sait que $\forall x \in [1; e]$ $x(1 - \ln x) > 0$

Donc $\forall x \in [1; \alpha]$ $x(1 - \ln x) > 0$ car $\alpha \in [1; e]$

Donc $\forall x \in [1; \alpha]$ $\frac{g(x)}{x(1 - \ln x)} \leq 0$

D'où $\forall x \in [1; \alpha]$ $f(x) - x \leq 0$

3) Tracer dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la droite (Δ) et la courbe (C_f) .



4) a) Montrer que $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1 - \ln x)} dx = \ln 2$

On pose $I = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1 - \ln x)} dx$

On a $\frac{1}{x(1 - \ln x)} = \frac{\frac{1}{x}}{(1 - \ln x)}$ $\forall x \in D_f$

$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1 - \ln x)} dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\frac{1}{x}}{(1 - \ln x)} dx$

On a $(1 - \ln x)' = -\frac{1}{x}$

$I = \int_1^{\sqrt{e}} -\frac{(1 - \ln x)'}{(1 - \ln x)} dx = -[\ln |1 - \ln x|]_1^{\sqrt{e}}$

Donc

$I = -(\ln |1 - \ln \sqrt{e}| - \ln |1 - \ln 1|) = -\ln |1 - \frac{1}{2} \ln e|$

Donc $I = -\ln |1 - \frac{1}{2}| = -\ln \frac{1}{2}$ donc $I = \ln 2$

D'où $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1 - \ln x)} dx = \ln 2$

b) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan délimité par (C_f) la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$

$A = \int_1^{\sqrt{e}} |f(x) - x| dx \times (2cm \times 2cm)$

On a (C_f) est en dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle

$[1; \sqrt{e}]$ donc $|f(x) - x| = x - f(x) \quad \forall x \in [1; \sqrt{e}]$

$\int_1^{\sqrt{e}} x - f(x) dx = \int_1^{\sqrt{e}} x - \frac{1}{x(1 - \ln x)} dx$

$\int_1^{\sqrt{e}} x - f(x) dx = \int_1^{\sqrt{e}} x dx - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1 - \ln x)} dx$

Car $x \rightarrow x - \frac{1}{x(1 - \ln x)}$ est continue sur $[1; \sqrt{e}]$

$\int_1^{\sqrt{e}} x - f(x) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^{\sqrt{e}} - \ln 2 = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} - \ln 2$

Donc $A = (\frac{1}{2} e - \frac{1}{2} - \ln 2) \times 4cm^2$

D'où $A = (2e - 2 - 4 \ln 2) cm^2$

III) On considère la suite (U_n) définie par :

$U_{n+1} = f(U_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $U_0 = 2$

1) Montrer que : $1 \leq U_n \leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour $n = 0$ on a $U_0 = 2$ donc $1 \leq U_0 \leq \alpha$

$(2, 2 < \alpha < 2, 3)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $1 \leq U_n \leq \alpha$ et montrons que $1 \leq U_{n+1} \leq \alpha$

On a f est croissante sur $[1; \alpha]$ et $1 \leq U_n \leq \alpha$

$f(1) \leq f(U_n) \leq f(\alpha)$ or $f(1) = 1$ et $f(\alpha) = \alpha$

Donc $1 \leq U_{n+1} \leq \alpha$

D'où $1 \leq U_n \leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question II) 2) c))

On a $f(x) \leq x \quad \forall x \in]0; +\infty[$

b - Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

On a $f(x) \leq x \quad \forall x \in [1; \alpha]$

Or $1 \leq U_n \leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc $f(U_n) \leq U_n$ donc $U_{n+1} \leq U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

D'où la suite (U_n) est décroissante.

3) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

On a la suite (U_n) est décroissante et minorée par 1

D'où la suite (U_n) est convergente

On a $U_{n+1} = f(U_n)$ et $U_0 \in [1; \alpha]$

f est continue sur $[1; \alpha]$ et $f([1; \alpha]) = [1; \alpha]$

(U_n) est convergente donc sa limite est une solution de l'équation $f(x) = x$ or les solutions de cette équation sont 1 et α donc $\lim U_n = 1$ ou $\lim U_n = \alpha$

On a (U_n) est décroissante donc $U_n \leq U_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc $1 \leq U_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2, 2 < \alpha < 2, 3)$

Donc $1 \leq \lim U_n \leq 2$ D'où $\lim U_n = 1$