

**Exercice 1 :** (2014 SN) (3pts)

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct  $(\mathbf{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  les points A(0;3;1), B(-1;3;0) et C(0;5;0) et

$$(S) \text{ la sphère d'équation: } \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2 - 4\mathbf{x} - 5 = 0$$

1) a) Montrer que :  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$  et en déduire que A, B et C sont non alignés.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

b) Montrer que :  $2\mathbf{x} - \mathbf{y} - 2\mathbf{z} + 5 = 0$  est une équation cartésienne du plan (ABC).

Soit M(x ; y ; z) ∈ (ABC)

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal à (ABC)}$$

$$(ABC) : 2\mathbf{x} - \mathbf{y} - 2\mathbf{z} + \mathbf{d} = 0$$

$$\text{Or } \mathbf{A}(0;3;1) \in (ABC)$$

$$\text{Donc } 2 \times 0 - 3 - 2 \times 1 + \mathbf{d} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{d} = 5$$

$$\text{D'où } (ABC) : 2\mathbf{x} - \mathbf{y} - 2\mathbf{z} + 5 = 0$$

2) a) Montrer que (S) est de centre  $\Omega(2 ; 0 ; 0)$  et de rayon 3

$$(S) : \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2 - 4\mathbf{x} - 5 = 0$$

$$\mathbf{a} = \frac{-4}{2} ; \quad \mathbf{b} = \frac{0}{2} ; \quad \mathbf{c} = \frac{0}{2} ; \quad \mathbf{d} = -5$$

$$\text{Donc } \mathbf{a} = 2 ; \mathbf{b} = 0 ; \mathbf{c} = 0 ; \mathbf{d} = -5$$

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - \mathbf{d} = 2^2 + 0^2 + 0^2 + 5 = 9 > 0$$

$$\text{Donc le centre de (S) est } \Omega(2;0;0) \text{ et } \mathbf{R} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{D'où } \Omega(2;0;0) \text{ et rayon } \mathbf{R} = 3$$

b) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

$$(ABC) : 2\mathbf{x} - \mathbf{y} - 2\mathbf{z} + 5 = 0 \quad \Omega(2;0;0)$$

$$\mathbf{d}(\Omega, (ABC)) = \frac{|2 \times 2 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3$$

$$\text{On a } \mathbf{d}(\Omega, (ABC)) = 3 \text{ et } \mathbf{R} = 3$$

D'où le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

c) Déterminer le triplet de coordonnées du point de tangence H du plan (ABC) et de la sphère (S).

H est la projection orthogonale de  $\Omega$  sur le plan (ABC)  
Soit  $(\Delta)$  la droite passant par  $\Omega$  et perpendiculaire au plan (ABC).

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} (2; -1; -2)$  est un vecteur normal au plan (ABC) donc c'est un vecteur directeur de  $(\Delta)$

$$\text{Soit } M(x ; y ; z) \in (\Delta) \quad \Omega(2;0;0)$$

$$(\Delta) : \begin{cases} \mathbf{x} = 2 + 2t \\ \mathbf{y} = -t \\ \mathbf{z} = -2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ est une représentation paramétrique de la droite } (\Delta).$$

$M(x; y; z) \in (\Delta) \cap (ABC)$  équivaut à

$$\begin{cases} \mathbf{x} = 2 + 2t \\ \mathbf{y} = -t \\ \mathbf{z} = -2t \end{cases}$$

$$2\mathbf{x} - \mathbf{y} - 2\mathbf{z} + 5 = 0$$

$$2(2 + 2t) - (-t) - 2(-2t) + 5 = 0$$

$$\text{Donc } 9t + 9 = 0 \Leftrightarrow 9t = -9 \Leftrightarrow t = -1$$

$$\begin{cases} \mathbf{x} = 2 - 2 = 0 \\ \mathbf{y} = 1 \quad \text{donc } (\Delta) \cap (ABC) = \{\mathbf{H}(0;1;2)\} \\ \mathbf{z} = 2 \end{cases}$$

D'où  $\mathbf{H}(0;1;2)$  est le point de contact de (S) et (ABC).

**Exercice 2 :** (2014 SN) (3pts)

1) Résoudre dans C l'équation :  $\mathbf{z}^2 - \mathbf{z}\sqrt{2} + 2 = 0$

$$\Delta = \sqrt{2}^2 - 4 \times 1 \times 2 = -6$$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$\mathbf{z}_1 = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{z}_2 = \bar{\mathbf{z}_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{D'où } \mathbf{S} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2} \right\}$$

2) Soit le nombre complexe u tel que :

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

a) Ecrire u sous forme trigonométrique.

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$|\mathbf{u}| = \left| \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \left| 1 + i\sqrt{3} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3+1} = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2} \left( \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\mathbf{u} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

b) En déduire que  $\mathbf{u}^6$  est un réel.

$$\mathbf{u}^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6 \left(\cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3}\right)^6$$

$$\mathbf{u}^6 = 8\left(\cos \frac{6\pi}{3} + \sin \frac{6\pi}{3}\right)$$

$$\mathbf{u}^6 = 8(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 8(1 + i \times 0)$$

D'où  $\mathbf{u}^6 = 8$

3) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct  $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$  on considère les points A et B d'affixes

$$\text{respectives } \mathbf{a} = 4 - 4i\sqrt{3} \text{ et } \mathbf{b} = 8$$

Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la rotation R de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

a) Ecrire z' en fonction de z

Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la rotation R.

$$\mathbf{R}(\mathbf{M}) = \mathbf{M}' \Leftrightarrow \mathbf{z}' - \mathbf{z}_O = e^{i\frac{\pi}{3}}(\mathbf{z} - \mathbf{z}_O)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{z}' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{z}$$

$$\text{D'où } \mathbf{z}' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{z}$$

b) Vérifier que le point B est l'image du point A par la rotation R.

$$\mathbf{R}(\mathbf{A}) = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{b} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{a} ?$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{a} &= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(4 - 4i\sqrt{3}) \\ &= 2 - 2i\sqrt{3} + 2i\sqrt{3} + 6 = 8 = \mathbf{b} \end{aligned}$$

D'où  $\mathbf{R}(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$

c) En déduire que le triangle OAB est équilatéral

$$\mathbf{R}(\mathbf{A}) = \mathbf{B} \text{ donc } \mathbf{OA} = \mathbf{OB} \text{ et } (\overrightarrow{\mathbf{OA}}, \overrightarrow{\mathbf{OB}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

D'où le triangle OAB est équilatéral.

### Exercice 3 : (2014 SN) (3pts)

On considère la suite  $(U_n)$  définie par :

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 7 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 13$$

$$1) \text{ Montrer que : } U_n < 14 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pour  $n = 0$  on a  $U_0 = 13$  donc  $U_0 < 14$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  supposons que  $U_n < 14$  et montrons que  $U_{n+1} < 14$

On a  $U_n < 14$  donc

$$\frac{1}{2}U_n < \frac{1}{2}14 \Leftrightarrow \frac{1}{2}U_n + 7 < 7 + 7 \Leftrightarrow U_{n+1} < 14$$

D'où  $U_n < 14 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Soit  $(V_n)$  la suite définie par :

$$V_n = 14 - U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Montrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et donner  $V_n$  en fonction de n.

Montrons que  $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n ? \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$V_{n+1} = 14 - U_{n+1} = 14 - \frac{1}{2}U_n - 7 = 7 - \frac{1}{2}U_n$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2}(14 - U_n) = \frac{1}{2}V_n$$

$$\text{D'où } V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$$

D'où  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ .

De premier terme  $V_0 = 14 - U_0 = 14 - 13 = 1$

$$\text{Donc } V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n V_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{D'où } V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{b) En déduire que : } U_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

puis Calculer  $\lim U_n$

$$\text{On a } V_n = 14 - U_n \text{ donc } U_n = 14 - V_n \text{ et } V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{D'où } U_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim U_n = \lim(14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n) = 14 \text{ car } \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$-1 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\text{D'où } \lim U_n = 14$$

c) Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle

$$U_n > 13,99 \Leftrightarrow 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 13,99$$

$$\Leftrightarrow 14 - 13,99 > \left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-2}$$

la fonction log est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-2} \Leftrightarrow \log \left(\frac{1}{2}\right)^n < \log 10^{-2}$$

$$\Leftrightarrow n \log \frac{1}{2} < -2 \log 10$$

$$\Leftrightarrow -n \log 2 < -2 \Leftrightarrow n > \frac{2}{\log 2}$$

$$\text{Donc } U_n > 13,99 \Leftrightarrow n > \frac{2}{\log 2}$$

$$\frac{2}{\log 2} \approx 6,643 \text{ d'où } n = 7$$

**Exercice 4 : (2014 SN) (3pts)**

1) On tire simultanément et au hasard **deux jetons** du sac  
Soit l'événement : A " la somme des deux numéros portés par les deux jetons tirées est égal à 1 "  
Montrer que  $P(A) = \frac{5}{9}$

$$5(0); 4(1)$$

$$\text{Card}(\Omega) = C_9^2 = 36$$

$$0+1=1$$

$$\text{Card}(A) = C_5^1 \times C_4^1 = 20$$

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

2) a) Montrer que la probabilité de gain de Said est  $\frac{1}{6}$

Soit B "Obtenir deux jetons portant chacun le chiffre 1"

$$\text{Card}(B) = C_4^2 = 6$$

$$P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

b) Quelle est la probabilité pour que Said gagne exactement deux fois.

La probabilité de gain de Said exactement deux fois

$$\text{est : } C_3^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-2} = 3 \times \frac{1}{36} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{72}$$

D'où la probabilité demandée est :  $\frac{5}{72}$

**Problème :** (2014 SN) (8pts)

I) On considère la fonction g définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$$

$$1) \text{ Montrer que } g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} \quad \forall x \in ]0; +\infty[$$

et en déduire que g est croissante sur  $]0; +\infty[$

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x \quad \forall x \in ]0; +\infty[$$

$$g'(x) = -\frac{2x}{x^4} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} \quad \forall x \in ]0; +\infty[$$

$$\text{D'où } g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} \quad \forall x \in ]0; +\infty[$$

$$\text{On a } g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x > 0$$

D'où g est croissante sur  $]0; +\infty[$

2) Vérifier que  $g(1) = 0$  puis en déduire que :

$$g(x) \leq 0 \quad \forall x \in ]0, 1] \text{ et } g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1; +\infty[$$

$$g(1) = 1 - \frac{1}{1^2} + \ln 1 = 1 - 1 + 0 = 0$$

$$\text{Donc } g(1) = 0$$

$$\forall x \in ]0, 1] \text{ donc } 0 < x \leq 1$$

g est croissante sur  $]0; +\infty[$  et  $x \leq 1$  donc

$$g(x) \leq g(1) \Leftrightarrow g(x) \leq 0$$

$$\text{D'où } \forall x \in ]0, 1] \quad g(x) \leq 0$$

$$\forall x \in [1; +\infty[ \quad x \geq 1 \text{ et } g \text{ est croissante sur } ]0; +\infty[$$

$$\text{donc } g(x) \geq g(1) \Leftrightarrow g(x) \geq 0$$

$$\text{D'où } \forall x \in [1; +\infty[ \quad g(x) \geq 0$$

II) On considère la fonction f définie sur  $]0; +\infty[$

$$\text{par : } f(x) = (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$$

1) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  et interpréter le résultat géométriquement.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x)^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

On a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  donc la droite d'équation  $x = 0$  est une asymptote verticale à la courbe (C).

2) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\text{Car et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln x)^2 = +\infty \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{b) Montrer que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)^2}{x} = 0 \text{ (on peut poser } t = \sqrt{x} \text{ puis montrer que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0)$$

$$t = \sqrt{x} \text{ puis montrer que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

On a  $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2$  Si  $x \rightarrow +\infty$  donc  $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln t^2)^2}{t^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 + 2 \ln t}{t} \right)^2$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{t} + 2 \frac{\ln t}{t} \right)^2 = 0$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)^2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 ?$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} ((1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)^2}{x} + \frac{1}{x^3} = 0$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)^2}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

c) Déterminer la branche infinie de (C) au voisinage de  $+\infty$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

la courbe (C) admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

$$3) \text{ a) Montrer que: } f'(x) = \frac{2g(x)}{x} \quad \forall x \in ]0; +\infty[$$

puis en déduire que est décroissante sur  $]0, 1]$  et croissante sur  $[1; +\infty[$

$$f(x) = (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2} \quad \forall x \in ]0; +\infty[$$

$$f'(x) = 2(1 + \ln x)(1 + \ln x)' - \frac{2x}{x^4}$$

$$f'(x) = 2(1 + \ln x) \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(1 + \ln x - \frac{1}{x^2}) = \frac{2}{x}g(x)$$

$$\text{D'où } f'(x) = \frac{2g(x)}{x} \quad \forall x \in ]0; +\infty[$$

$$g(x) \leq 0 \quad \forall x \in ]0, 1] \text{ et } g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1; +\infty[$$

$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in ]0, 1]$  donc  $f$  est décroissante sur  $]0, 1]$  et  $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1; +\infty[$  donc  $f$  est

croissante sur  $[1; +\infty[$

b) Dresser le tableau des variations de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ ,

puis en déduire que  $f(x) \geq 2 \quad \forall x \in ]0; +\infty[$

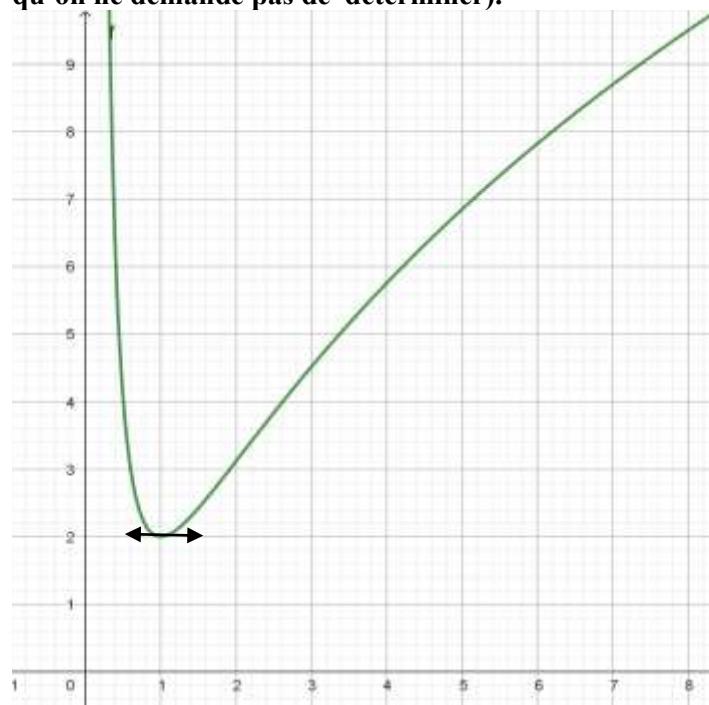
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

$f(1)$  est le minimum de  $f$  sur  $]0; +\infty[$

Donc  $f(x) \geq f(1) \quad \forall x \in ]0; +\infty[$  or  $f(1) = 2$

D'où  $f(x) \geq 2 \quad \forall x \in ]0; +\infty[$

4) Construire la courbe (C) dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
(On admet que la courbe (C) admet un point d'inflexion, qu'on ne demande pas de déterminer).



5) On considère les intégrales I et J suivants:

$$I = \int_1^e (1 + \ln x) dx \text{ et } J = \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx$$

a) Montrer que  $H: x \rightarrow x \ln x$  est une fonction primitive de  $h: x \rightarrow 1 + \ln x$  sur  $]0; +\infty[$  puis en déduire que  $I = e$ .

$$H'(x) = (x \ln x)' = \ln x + x \frac{1}{x} = 1 + \ln x = h(x)$$

$$H'(x) = h(x) \quad \forall x \in ]0; +\infty[$$

D'où  $H$  est une primitive de  $h$  sur  $]0; +\infty[$

$$\int_1^e (1 + \ln x) = [x \ln x]_1^e = e \ln e - 1 \ln 1 = e$$

$$\text{D'où } \int_1^e (1 + \ln x) = e$$

b) En utilisant une intégration par parties, montrer  $J = 2e - 1$

$$J = \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx$$

$$u(x) = (1 + \ln x)^2 \quad u'(x) = 2(1 + \ln x) \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = 1 \quad v(x) = x$$

$$J = \left[ x(1 + \ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e 2x(1 + \ln x) \frac{1}{x} dx$$

$$J = 4e - 1 - 2 \int_1^e (1 + \ln x) dx = 4e - 1 - 2e$$

$$J = 2e - 1$$

c) Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire du domaine plan délimité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$

$$A = \int_1^e |f(x)| dx \text{ cm} \times \text{cm}$$

$$A = (\int_1^e f(x) dx) \text{cm}^2 \quad f(x) \geq 2 \quad \forall x \in ]0; +\infty[$$

$$\int_1^e f(x) dx = \int_1^e (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2} dx$$

On a  $x \rightarrow \frac{1}{x^2}$  et  $x \rightarrow (1 + \ln x)^2$  sont continues sur  $]0; +\infty[$

$$\int_1^e f(x) dx = \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int_1^e f(x) dx = \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx + \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^e$$

$$\int_1^e f(x) dx = 2e - 1 - \frac{1}{e} + 1 = \frac{2e^2 - 1}{e}$$

D'où  $A = \frac{2e^2 - 1}{e} \text{cm}^2$