

Exercice 1 : (2013 S1) (3pts)

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points A(-1, 1, 0), B(1, 0, 1) et Ω (1, 1, -1)

et la sphère (S) de centre Ω et de rayon $R = 3$

- Montrer que : $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ et vérifier que $x + y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).
- Vérifier que : $d(\Omega; (OAB)) = \sqrt{3}$ puis montrer que (OAB) coupe (S) suivant un cercle (Γ) de rayon $\sqrt{6}$.
- Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (OAB).

a) Montrer que :
$$\begin{cases} \mathbf{x} = 1 + t \\ \mathbf{y} = 1 + t \\ \mathbf{z} = -1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$
 est une

représentation paramétrique de la droite (Δ).

- Déterminer le triplet de coordonnées du centre du cercle (Γ).

Exercice 2 : (2013 S1) (3pts)

On considère, Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}; \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives $\mathbf{a} = 7 + 2i$, $\mathbf{b} = 4 + 8i$, $\mathbf{c} = -2 + 5i$

- Vérifier que : $(1+i)(-3+6i) = -9+3i$ et

Montrer que $\frac{\mathbf{c}-\mathbf{a}}{\mathbf{b}-\mathbf{a}} = 1+i$

- En déduire que $\mathbf{AC} = \mathbf{AB}\sqrt{2}$ et donner déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

- Soit R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- Montrer que l'affixe du point D image du point A par la rotation R est $\mathbf{d} = 10 + 11i$

- Calculer $\frac{\mathbf{d}-\mathbf{c}}{\mathbf{b}-\mathbf{c}}$ et en déduire les points B, C et D sont alignés.

Exercice 3 : (2013 S1) (3pts)

Une caisse contient 10 boules : cinq boules rouges, trois boules vertes et deux boules blanches. (indiscernables au toucher).

On tire au hasard et simultanément quatre boules de la caisse.

- On considère les deux événements :

A" Obtenir deux boules rouges et deux boules vertes"

B " aucune boule parmi les quatre tirées n'est blanche"

Montrer que $P(A) = \frac{1}{7}$ et $P(B) = \frac{1}{3}$

- Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage fait correspondre le nombre de boules blanches tirées.

a) Vérifier que les valeurs prises par X sont 0, 1 et 2.

- Montrer que $P(X=1) = \frac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 3 : (2013 S1) (3pts)

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}^*$ définie par :

$$U_{n+1} = \frac{25}{10 - U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad U_1 = 0$$

$$1) \text{ Vérifier que: } 5 - U_{n+1} = \frac{5(5 - U_n)}{5 + (5 - U_n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$2) \text{ On pose } V_n = \frac{5}{5 - U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$a) \text{ Montrer que } V_{n+1} = \frac{10 - U_n}{5 - U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ puis}$$

$$\text{vérifier que } V_{n+1} - V_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$b) \text{ Montrer que: } V_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et en déduire que: } U_n = 5 - \frac{5}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$c) \text{ Déterminer } \lim U_n$$

Problème : (2013 S1) (8pts)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (x-2)^2 e^x$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(\mathbf{O}; \vec{i}, \vec{j})$

1) a - Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et en déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique dont on précisera la direction.

b - Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et interpréter le résultat

géométriquement.(on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad n \in \mathbb{N}^*$)

$$2) a - \text{Montrer que } f'(x) = x(x-2)e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b - Montrer que f est croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[2, +\infty[$ et est décroissante sur $[0; 2]$

c - Dresser le tableau des variations de la fonction f sur \mathbb{R} .

$$3) a - \text{Montrer que } f''(x) = (x^2 - 2)e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Et en déduire que (C_f) admet deux points d'inflexions (les coordonnées des points ne sont pas demandées)

b - Construire la courbe (C_f) .

4) a - Montrer que $H: x \rightarrow (x-1)e^x$ est une primitive de $h: x \rightarrow xe^x$ sur \mathbb{R} Puis calculer $\int_0^1 xe^x dx$

b - A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2$$

c- Montrer que l'aire du domaine délimité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est $5(e - 2) \text{ cm}^2$.

5) Utiliser la courbe (C_f) pour donner le nombre de solutions de l'équation $x^2 = e^{-x} + 4x - 4 ; x \in \mathbb{R}$