

Exercice 1 : (2013 S1) (3pts)

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points $A(-1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$ et $\Omega(1, 1, -1)$ et la sphère (S) de centre Ω et de rayon $R = 3$

- 1) a) Montrer que : $\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ et vérifier que $\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{z} = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB) .
- b) Vérifier que : $d(\Omega; (OAB)) = \sqrt{3}$ puis montrer que (OAB) coupe (S) suivant un cercle (Γ) de rayon $\sqrt{6}$.
- 2) Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (OAB) .

a) Montrer que :
$$\begin{cases} \mathbf{x} = 1 + t \\ \mathbf{y} = 1 + t \\ \mathbf{z} = -1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$
 est une

représentation paramétrique de la droite (Δ) .

- b) Déterminer le triplet de coordonnées du centre du cercle (Γ) .

Exercice 2 : (2013 S1) (3pts)

On considère, Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points A , B et C d'affixes respectives $\mathbf{a} = 7 + 2i$, $\mathbf{b} = 4 + 8i$, $\mathbf{c} = -2 + 5i$

- 1) a) Vérifier que : $(1 + i)(-3 + 6i) = -9 + 3i$ et

Montrer que $\frac{\mathbf{c} - \mathbf{a}}{\mathbf{b} - \mathbf{a}} = 1 + i$

- b) En déduire que $\mathbf{AC} = \mathbf{AB}\sqrt{2}$ et donner déduire une mesure de l'angle orienté $(\vec{AB}; \vec{AC})$

- 2) Soit R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- a) Montrer que l'affixe du point D image du point A par la rotation R est $\mathbf{d} = 10 + 11i$
- b) Calculer $\frac{\mathbf{d} - \mathbf{c}}{\mathbf{b} - \mathbf{c}}$ et en déduire les points B , C et D sont alignés.

Exercice 3 : (2013 S1) (3pts)

Une caisse contient 10 boules : cinq boules rouges, trois boules vertes et deux boules blanches. (indiscernables au toucher).

On tire au hasard et simultanément quatre boules de la caisse.

- 1) On considère les deux événements :
 A'' Obtenir deux boules rouges et deux boules vertes"
 B'' aucune boule parmi les quatre tirées n'est blanche"
 Montrer que $P(A) = \frac{1}{7}$ et $P(B) = \frac{1}{3}$

- 2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage fait correspondre le nombre de boules blanches tirées.
- a) Vérifier que les valeurs prises par X sont 0, 1 et 2.
- b) Montrer que $p(X = 1) = \frac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Exercice 3 : (2013 S1) (3pts)

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$U_{n+1} = \frac{25}{10 - U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad U_1 = 0$$

- 1) Vérifier que: $5 - U_{n+1} = \frac{5(5 - U_n)}{5 + (5 - U_n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Et montrer par récurrence que: $5 - U_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

- 2) On pose $V_n = \frac{5}{5 - U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

- a) Montrer que $V_{n+1} = \frac{10 - U_n}{5 - U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ puis

vérifier que $V_{n+1} - V_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

- b) Montrer que : $V_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ et en

déduire que : $U_n = 5 - \frac{5}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

- c) Déterminer $\lim U_n$

Problème : (2013 S1) (8pts)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (x - 2)^2 e^x$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(\mathbf{O}; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) a - Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

et en déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique dont on précisera la direction.

- b - Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et interpréter le résultat

géométriquement. (on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad n \in \mathbb{N}^*$)

- 2) a - Montrer que $f'(x) = x(x - 2)e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- b - Montrer que f est croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[2, +\infty[$ et est décroissante sur $[0, 2]$

- c - Dresser le tableau des variations de la fonction f sur \mathbb{R} .

- 3) a - Montrer que $f''(x) = (x^2 - 2)e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Et en déduire que (C_f) admet deux points d'inflexions (les coordonnées des points ne sont pas demandées)

- b - Construire la courbe (C_f) .

- 4)) a - Montrer que $H : x \rightarrow (x - 1)e^x$ est une primitive de

$$h : x \rightarrow xe^x \text{ sur } \mathbb{R} \text{ Puis calculer } \int_0^1 xe^x dx$$

- b - A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2$$

- c- Montrer que l'aire du domaine délimité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est $5(e - 2) \text{ cm}^2$.

- 5) Utiliser la courbe (C_f) pour donner le nombre de solutions de l'équation $x^2 = e^{-x} + 4x - 4 ; x \in \mathbb{R}$