Exercice 1 : (2,5 pts)

1) a - Résoudre dans ℝ l'équation suivante :

$$x^2+4x-5=0$$

$\Delta=(4)^2-4\times1\times(-5)=36>0$ l'équation admet deux solutions distincts.

$x_1=\dfrac{-4+\sqrt{36}}{2}=\dfrac{-4+6}{2}=1$ et $x_2=\dfrac{-4-\sqrt{36}}{2}=\dfrac{-4-6}{2}=-5$

$S=\{-5;1\}$

b – Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation suivante :

$$\ln(x^2+5)=\ln(x+2)+\ln 2x$$

$\forall x\in]0,+\infty[$ donc $x>0$ donc $x^2+1>0$ et $x+2>0$ et $2x>0$

$\ln(x^2+5)=\ln(x+2)+\ln 2x$

$\ln(x^2+5)=\ln(x+2)2x \Leftrightarrow x^2+5=(x+2)2x$

$\Leftrightarrow x^2+5=2x^2+4x \Leftrightarrow x^2+4x-5=0$

Donc x = - 5 et x = 1 or $x>0$ donc x = 1

D'où $S=\{1\}$

2) Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'inéquation suivante :

$$\ln x+\ln(x+1)\geq\ln(x^2+1)$$

$\forall x\in]0,+\infty[$ donc $x>0$ donc $x^2+1>0$ et $x+1>0$

$\ln x+\ln(x+1)\geq\ln(x^2+1)\Leftrightarrow\ln[x(x+1)]\geq\ln(x^2+1)$

$\Leftrightarrow x(x+1)\geq x^2+1\Leftrightarrow x\geq1$ or $x>0$

D'où $S=[1,+\infty[$

Exercice 2 : (3 pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1}=\frac{U_n}{5+8U_n}\quad\forall n\in\mathbb{N}\quad\text{et}\quad U_0=1$$

1) Montrer que : $U_n>0\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n = 0 on a $U_0=1$ donc $U_0>0$

Soit n ∈ ℕ supposons que $U_n>0$ et montrons que $U_{n+1}>0$

On a $U_n>0$ donc $8U_n>0$ et $5+8U_n>5$

donc $U_{n+1}=\dfrac{U_n}{5+8U_n}>0$

D'où $U_n>0\quad\forall n\in\mathbb{N}$

2) On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_n=\frac{1}{U_n}+2\qquad\forall n\in\mathbb{N}$$

a – Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 5 puis écrire V_n en fonction de n.

Montrons que $V_{n+1}=5V_n$?

$V_{n+1}=\dfrac{1}{U_{n+1}}+2=\dfrac{1}{\dfrac{U_n}{5+8U_n}}+2=\dfrac{5+8U_n}{U_n}+2$

$=\dfrac{5}{U_n}+\dfrac{8U_n}{U_n}+2=\dfrac{5}{U_n}+8+2=5(\dfrac{1}{U_n}+2)$

D'où $V_{n+1}=5V_n$

(V_n) est une suite géométrique de raison 5 de premier terme $V_0=\dfrac{1}{U_0}+2=3$

$V_n=V_0\times5^n$

D'où $V_n=3\times5^n\quad\forall n\in\mathbb{N}$

b – Montrer que $U_n=\dfrac{1}{3\times5^n-2}\quad\forall n\in\mathbb{N}$ et en déduire $\lim U_n$

a $V_n=\dfrac{1}{U_n}+2\Leftrightarrow\dfrac{1}{U_n}=V_n-2$

$\Leftrightarrow U_n=\dfrac{1}{V_n-2}\Leftrightarrow U_n=\dfrac{1}{3\times5^n-2}$

D'où $U_n=\dfrac{1}{3\times5^n-2}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

On a $U_n=\dfrac{1}{3\times5^n-2}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

$\lim U_n=\lim\dfrac{1}{3\times5^n-2}=0$ car $\lim 5^n=+\infty$

Et $5>1$

D'où $\lim U_n=0$

Exercice 3 : (5 pts)

1) Résoudre dans ℂ l'équation :

$$Z^2-18Z+82=0$$

$\Delta=(-18)^2-4\times1\times82=-4<0$

$=(2i)^2$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1=\dfrac{18+2i}{2}=9+i$ et $z_2=\overline{z_1}=9-i$

D'où $S=\{9-i;9+i\}$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a=9+i$, $b=9-i$, $c=11-i$

a – Montrer que : $\frac{c-b}{a-b}=-i$ puis en déduire que le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

$\frac{c-b}{a-b}=\frac{11-i-9+i}{9+i-9+i}=\frac{2}{2i}=\frac{1}{i}=-i$

D'où $\frac{c-b}{a-b}=-i$

On a $\frac{c-b}{a-b}=-i$ donc

$\left|\frac{c-b}{a-b}\right|=|-i| \Leftrightarrow \frac{|c-b|}{|a-b|}=1 \Leftrightarrow \frac{BC}{BA}=1$

Donc $BC=BA$

$\frac{c-b}{a-b}=\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}=\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2})$

Donc $\frac{c-b}{a-b}=\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2})$

Or $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\equiv\arg\frac{c-b}{a-b}[2\pi]$

Donc $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $BC=BA$

D'où le triangle ABC est isocèle et rectangle en B

b – Ecrire 4(1 – i) sous forme trigonométrique

$4(1-i)$

$|4(1-i)|=4|1-i|=4\sqrt{2}$

$4(1-i)=4\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}})=4\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})$

$4(1-i)=4\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})=4\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))$

D'où $4(1-i)=\left[4\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]$

c – Montrer que : $(c-a)(c-b)=4(1-i)$

puis en déduire que $AC\times BC=4\sqrt{2}$

$a=9+i$, $b=9-i$, $c=11-i$

$(c-a)(c-b)=(11-i-9-i)(11-i-9+i)$

$=(2-2i)2=4(1-i)$

D'où $(c-a)(c-b)=4(1-i)$

$|(c-a)(c-b)|=|4(1-i)| \Leftrightarrow |(c-a)||(c-b)|=4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |(c-a)||(c-b)|=4\sqrt{2} \Leftrightarrow AC\times BC=4\sqrt{2}$

D'où $AC\times BC=4\sqrt{2}$

d – Soit z l'affixe de point M du plan et z′ l'affixe du point M′ image du point M par la rotation de centre B et d'angle $\frac{3\pi}{2}$. Montrer que $z'=-iz+10+8i$ puis

$R(M)=M' \Leftrightarrow z'-b=e^{i\frac{3\pi}{2}}(z-b)$

$z'-b=e^{i\frac{3\pi}{2}}(z-b)$

$\Leftrightarrow z'-b=\cos(\frac{3\pi}{2})+i\sin(\frac{3\pi}{2})(z-b)$

$z'=-i(z-9+i)+9-i \Leftrightarrow z'=-iz+9i+1+9-i$

D'où $z'=-iz+10+8i$

Vérifier que l'affixe du point C′ image du point C par la rotation R est 9 – 3i

$R(C)=C' \Leftrightarrow c'=-ic+10+8i$

$\Leftrightarrow c'=-i(11-i)+10+8i$

$\Leftrightarrow c'=-11i-1+10+8i=9-3i$

D'où $c'=9-3i$

Problème : (9,5 pts)

Partie I

On considère la fonction g définie sur ℝ par :

$g(x)=(1-x)e^{x}-1$

1) a – Montrer que $g'(x)=-xe^{x}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$g'(x)=(1-x)'e^{x}+(1-x)\left(e^{x}\right)'$

$g'(x)=-e^{x}+(1-x)e^{x}=e^{x}(-1+1-x)$

D'où $g'(x)=-xe^{x}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

b – Montrer que g est décroissante sur $[0,+\infty[$ et croissante sur $]-\infty;0]$ puis vérifier que g(0) = 0

On a $g'(x)=-xe^{x}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ le signe de $g'(x)$ est celui de – x car $e^{x}>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$\forall x\in[0,+\infty[$ donc $x\geq 0 \Leftrightarrow -x\leq 0$ donc $g'(x)\leq 0$

g est décroissante sur $[0,+\infty[$

$\forall x\in]-\infty;0]$ donc $x\leq 0 \Leftrightarrow -x\geq 0$ donc $g'(x)\geq 0$

g est croissante sur $]-\infty;0]$

Vérifier que g(0) = 0

$g(0)=(1-0)e^{0}-1=1-1=0$

D'où $g(0)=0$

2) En déduire que $g(x)\leq 0$ $\forall x\in$ ℝ

On a g est continue sur ℝ

Puisque g est décroissante sur $[0,+\infty[$ et croissante sur $]-\infty;0]$ donc $g(0)$ est le maximum de g sur ℝ c'est-à-dire $g(x)\leq g(0)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

or $g(0)=0$

D'où $g(x)\leq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Partie II

On considère la fonction f définie sur ℝ par

$$\mathbf{f(x)=(2-x)e^{x}-x}$$

$(\mathbf{C_f})$ est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(\mathbf{O};\vec{\mathbf{i}};\vec{\mathbf{j}})$ (unité : 1 cm)

1) a – Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{f(x)=-\infty}$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)e^{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x=-\infty$

b – Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ puis en déduire que $(\mathbf{C_f})$ admet au voisinage de + ∞ une branche parabolique de direction à déterminer.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2-x)e^{x}-x}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2-x)e^{x}}{x}-\frac{x}{x}=\lim_{x\to+\infty}(2-x)\frac{e^{x}}{x}-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(2-x)\frac{e^{x}}{x}-1=-\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{x}}=-\infty$

2) a – Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathbf{f(x)=+\infty}$ et calculer

$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathbf{f(x)}+x$ (On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$)

$$\lim_{x\to-\infty}\mathbf{f(x)}=\lim_{x\to-\infty}(2-x)e^{x}-x$$

$$\lim_{x\to-\infty}\mathbf{f(x)}=\lim_{x\to-\infty}2e^{x}-xe^{x}-x=+\infty$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}2e^{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0$

$$\lim_{x\to-\infty}\mathbf{f(x)}+x=\lim_{x\to-\infty}2e^{x}-xe^{x}-x+x$$

$$\lim_{x\to-\infty}\mathbf{f(x)}+x=\lim_{x\to-\infty}2e^{x}-xe^{x}=0$$

Car $\lim\limits_{x\to-\infty}2e^{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0$

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathbf{f(x)}+x=0$

b – Montrer que la droite (D) : y = – x est une asymptote oblique à $(\mathbf{C_f})$ au voisinage de – ∞

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathbf{f(x)}-(-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\mathbf{f(x)}+x=0$

D'où la droite (D) : y = – x est une asymptote oblique à $(\mathbf{C_f})$ au voisinage de – ∞

3) a – Montrer que $\mathbf{f'(x)=g(x)}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\mathbf{f(x)=(2-x)e^{x}-x}$$

$$\mathbf{f'(x)}=(2-x)'e^{x}+(2-x)\left(e^{x}\right)'-1$$

$$\mathbf{f'(x)}=-e^{x}+(2-x)e^{x}-1=e^{x}(-1+2-x)-1$$

$$\mathbf{f'(x)}=e^{x}(1-x)-1=\mathbf{g(x)}$$

D'où $\mathbf{f'(x)=g(x)}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

b – Interpréter géométriquement le résultat f ′(0) = 0

On a f ′(0) = g(0) = 0 donc $(\mathbf{C_f})$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0

c – Montrer que f est strictement décroissante sur ℝ et dresser le tableau des variations de

On a $\mathbf{f'(x)=g(x)}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ et $\mathbf{g(x)}\le 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc $\mathbf{f'(x)}\le 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

D'où f est strictement décroissante sur ℝ.

X	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
f′(x)	–
f(x)	$+\infty$ ↘ $-\infty$

4) Montrer que $(\mathbf{C_f})$ possède un seul point d'inflexion de coordonnées (0 ; 2)

On a $\mathbf{f'(x)=g(x)}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc $\mathbf{f''(x)=g'(x)}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\mathbf{f''(x)}=0\Leftrightarrow x=0$$

$\mathbf{f''(x)}\ge 0$ $\forall x\in\left]-\infty;0\right]$ et

$\mathbf{f''(x)}\le 0$ $\forall x\in\left[0;+\infty\right[$

Donc $(\mathbf{C_f})$ possède un seul point d'inflexion d'abscisse 0 et f(0) = 2

D'où $(\mathbf{C_f})$ possède un seul point d'inflexion de coordonnées (0 ; 2)

5) a – A l'aide d'une intégration par parties montrer

que : $\displaystyle\int_{-1}^{0}(2-x)e^{x}dx=3-\frac{4}{e}$

$$\int_{-1}^{0}(2-x)e^{x}dx$$

$\mathbf{u(x)}=2-x$ $\qquad$ $\mathbf{u'(x)}=-1$

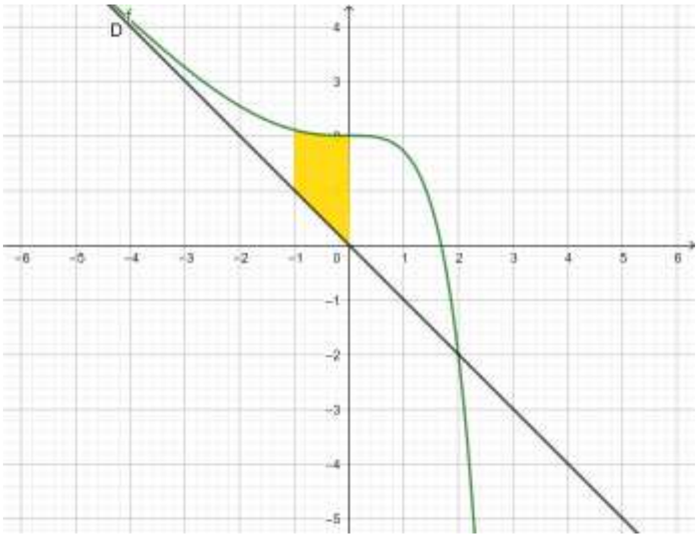
$\mathbf{v'(x)}=e^{x}$ $\qquad$ $\mathbf{v(x)}=e^{x}$

$$\int_{-1}^{0}(2-x)e^{x}dx=\left[(2-x)e^{x}\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}-e^{x}dx$$

$$\int_{-1}^{0}(2-x)e^{x}dx=2-3e^{-1}+\left[e^{x}\right]_{-1}^{0}=2-\frac{3}{e}+1-\frac{1}{e}$$

D'où $\displaystyle\int_{-1}^{0}(2-x)e^{x}dx=3-\frac{4}{e}$

b – En déduire en cm^2 l'aire du domaine limité par (C_f) , la droite (D) et les droites d'équations
$x = -1$ et $x = 0$.



On sait que la courbe (C) est au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle $[-1;0]$

$$\mathbf{A} = \int_1^{\mathbf{e}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) - (-\mathbf{x})\mathbf{dx}1\mathbf{cm} \times 1\mathbf{cm}$$

$$\mathbf{A} = \int_1^{\mathbf{e}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{x})\mathbf{dxcm}^2$$

$$\mathbf{A} = \int_1^{\mathbf{e}} (2-\mathbf{x})\mathbf{e}^{\mathbf{x}}\mathbf{dxcm}^2 = (3-\frac{4}{\mathbf{e}})\mathbf{cm}^2$$

D'où $\mathbf{A} = (3-\frac{4}{\mathbf{e}})\mathbf{cm}^2$