Année scolaire : 2022 – 2023	Solutions examen 2010 SN	AGOUZAL 2 BPCF - 2 BSVTF

Exercice 1 : (2010 SN) (3pts)

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ les points $A(-1;0;3)$; $B(3;0;0)$; $C(7;1;-3)$

et (S) la sphère d'équation : $x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$

1) Montrer que: $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+4\vec{k}$ et en déduire que : $3x+4z-9=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

$C(7;1;-3)$; $B(3;0;0)$; $A(-1;0;3)$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}8\\1\\-6\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&1\\-3&-6\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4&8\\-3&-6\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}4&8\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=3\vec{i}+4\vec{k}$$

D'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+4\vec{k}$

Soit $M(x;y;z)\in(ABC)$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC)

$$(ABC): 3x+4z+d=0$$

Or $B(3;0;0)\in(ABC)$

Donc $3\times3+4\times0+d=0 \Leftrightarrow d=-9$

D'où $(ABC): 3x+4z-9=0$

2) Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(3;1;0)$ et de rayon 5

$$(S): x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$$

$a=\frac{-6}{-2}$; $b=\frac{-2}{-2}$; $c=\frac{0}{-2}$; $d=-5$

Donc $a=3$; $b=1$; $c=0$; $d=-15$

$a^2+b^2+c^2+15=9+1+15=25>0$

Donc le centre de (S) est $\Omega(3;1;0)$ et $R=\sqrt{25}=5$

D'où $\Omega(3;1;0)$ et rayon $R=5$

3) Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

a) Montrer que $\begin{cases}x=3+3t\\ y=1\\ z=4t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ).

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(3;0;4)$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc c'est un vecteur directeur de (Δ)

Soit $M(x;y;z)\in(\Delta)$ $\quad\Omega(3;1;0)$

$$(\Delta):\begin{cases}x=3+3t\\ y=1+0\times t\\ z=0+4t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$$

$$(\Delta):\begin{cases}x=3+3t\\ y=1\\ z=4t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$$

est une représentation paramétrique de la droite (Δ).

b) Montrer que la droite (Δ) coupe la sphère (S) aux deux points E(6, 1, 4) et F(0, 1, – 4)

$M(x;y;z)\in(\Delta)\cap(S)$ équivaut à

$$\begin{cases}x=3+3t\\ y=1\\ z=4t\\ (x-3)^2+(y-1)^2+z^2=25\end{cases}$$

$(3+3t-3)^2+(1-1)^2+(4t)^2=25$

$9t^2+16t^2=25 \Leftrightarrow 25t^2=25 \Leftrightarrow t=1$ ou $t=-1$

Si $t=1$ donc $\begin{cases}x=3+3\times1\\ y=1\\ z=0+4\times1\end{cases}$ donc $E(6;1;4)$

Si $t=-1$ donc $\begin{cases}x=3+3\times(-1)\\ y=1\\ z=0+4\times(-1)\end{cases}$ donc $F(0;1;-4)$

$(\Delta)\cap(S)=\{E(6;1;4);F(0;1;-4)\}$

Exercice 2 : (2010 SN) (3pts)

1) Résoudre dans C l'équation : $z^2-6z+10=0$

$\Delta=6^2-4\times1\times10 \Leftrightarrow \Delta=36-40 \Leftrightarrow \Delta=-4$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1=\frac{6+i\sqrt{4}}{2}=\frac{6+2i}{2}=3+i$ et $z_2=\overline{z_1}=3-i$

D'où $S=\{3-i;3+i\}$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=3-i$, $b=3+i$; $c=7-3i$

Soit z l'affixe du point M du plan et z′ l'affixe du point M′ image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que : $z'=iz+2-4i$

$R(M)=M' \Leftrightarrow z'-a=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-a)$

$\Leftrightarrow z'=(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})(z-3+i)+3-i$

$\Leftrightarrow z'=iz-3i-1+3-i$

D'où $z'=iz+2-4i$

b) Vérifier que : l'affixe du point C′ l'image du point C par la rotation R est : $c'=5+3i$

$$R(C)=C' \Leftrightarrow c'=ic+2-4i$$
$$\Leftrightarrow c'=i(7-3i)+2-4i$$
$$\Leftrightarrow c'=7i+3+2-4i \Leftrightarrow c'=5+3i$$

c) Montrer que : $\frac{c'-b}{c-b}=\frac{1}{2}i$ puis en déduire que le triangle BCC′ est rectangle en B et $BC=2BC'$

$$\frac{c'-b}{c-b}=\frac{5+3i-3-i}{7-3i-3-i} \Leftrightarrow \frac{c'-b}{c-b}=\frac{2+2i}{4-4i}$$
$$\Leftrightarrow \frac{c'-b}{c-b}=\frac{2(1+i)}{4(1-i)} \Leftrightarrow \frac{c'-b}{c-b}=\frac{1}{2}\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{c'-b}{c-b}=\frac{1}{2}\frac{2i}{2} \Leftrightarrow \frac{c'-b}{c-b}=\frac{1}{2}i$$

D'où $\frac{c'-b}{c-b}=\frac{1}{2}i$

On a $\frac{c'-b}{c-b}=\frac{1}{2}i \Leftrightarrow \frac{c'-b}{c-b}=\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$

Donc $\arg\left(\frac{c'-b}{c-b}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Or $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BC'})\equiv\arg(\frac{c'-b}{c-b})[2\pi]$

Donc $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BC'})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc le triangle BCC′ est rectangle en B.

On a $\left|\frac{c'-b}{c-b}\right|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|c'-b|}{|c-b|}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{BC'}{BC}=\frac{1}{2}$

$\frac{BC'}{BC}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow BC=2BC'$

D'où $BC=2BC'$

Exercice 3 : **(2010 S1)** (3pts)

1) On considère les deux événements :

Montrer que $P(A)=\frac{1}{2}$ et $P(B)=\frac{41}{42}$

5 B ; 3 R ; 2 N

On tire simultanément et au hasard 4 boules du sac

$$Card(\Omega)=C_{10}^{4}=210$$

A″ Obtenir une seule boule rouge″

3(R) 7 ($\overline{R}$)

$$Card(A)=C_3^1\times C_7^3=3\times35=105$$
$$P(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{105}{210}=\frac{1}{2}$$

B ″ Obtenir une boule blanche au moins ″

Première méthode

$\overline{B}$ ″Aucune boule blanche parmi les quatre boules tirées″

5 (B) ; 5($\overline{B}$)

$$Card(\overline{B})=C_5^4=5$$
$$P(\overline{B})=\frac{Card(\overline{B})}{Card(\Omega)}=\frac{5}{210}=\frac{1}{42}$$
$$p(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{1}{42}=\frac{41}{42}$$

D'où $P(B)=\frac{41}{42}$

Deuxième méthode

5 (B) ; 5($\overline{B}$)

$$Card(B)=C_5^1\times C_5^3+C_5^2\times C_5^2+C_5^3\times C_5^1+C_5^4$$
$$Card(B)=50+100+50+5=205$$
$$P(B)=\frac{Card(B)}{Card(\Omega)}=\frac{205}{210}=\frac{41}{42}$$

D'où $P(B)=\frac{41}{42}$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associer le nombre de boules rouges tirées.

a) Vérifier que les valeurs prises par X sont 0 ; 1 ; 2 ; 3

On peut obtenir :

* Aucune boule rouge parmi les quatre boules tirées.
Donc X = 0.

*Une seule boule rouge parmi les quatre boules tirées.
Donc X = 1.

*Deux boules rouges parmi les quatre boules tirées.
Donc X = 2.

*Trois boules rouges parmi les quatre boules tirées.
Donc X = 3.

D'où les valeurs prises par X sont 0 ; 1 ; 2 ; 3

b) Montrer que $P(X=0)=\frac{1}{6}$ et $P(X=2)=\frac{3}{10}$

3 (R) ; 7($\overline{R}$)

$$card(X=0)=C_7^4=35$$
$$P(X=0)=\frac{35}{210}=\frac{1}{6}$$
$$card(X=2)=C_3^2\times C_7^2=3\times21=63$$
$$P(X=2)=\frac{63}{210}=\frac{3}{10}$$

c) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

$$P(X=1)=P(A)=\frac{1}{2}$$

Première méthode

3 (R) ; 7($\overline{R}$)

$$card(X=3)=C_3^3\times C_7^1=7$$
$$P(X=3)=\frac{7}{210}=\frac{1}{30}$$

Deuxième méthode

On sait que

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$$

Donc $P(X=3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)$

$$P(X=3)=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}-\frac{3}{10}=\frac{1}{30}$$

D'où $P(X=3)=\frac{1}{30}$

k	0	1	2	3
P(X= k)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

(Remarque $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{3}{10}+\frac{1}{30}=1$)

Exercice 4 : **(2010 SN)** (3pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1}=\frac{3U_n-1}{2U_n}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad \text{et}\quad U_0=2$$

1) Montrer que : $U_n-1>0\quad \forall n\in\mathbb{N}$

Pour n = 0 on a $U_0=2$ donc $U_0-1>0$

Soit $n\in\mathbb{N}$ supposons que $U_n-1>0$ et montrons que $U_{n+1}-1>0$

$$U_{n+1}-1=\frac{3U_n-1}{2U_n}-1=\frac{3U_n-1-2U_n}{2U_n}$$

Donc $U_{n+1}-1=\frac{U_n-1}{2U_n}$ on a $U_n-1>0$ (1)

Donc $U_n>1$ donc $2U_n>2$ (2)

De (1) et (2) $\frac{U_n-1}{2U_n}>0$ donc $U_{n+1}-1>0$

D'où $U_n-1>0\quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) Soit (V_n) définie par : $V_n=\frac{U_n-1}{2U_n-1}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et en déduire que $V_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\quad \forall n\in\mathbb{N}$

Montrons que $V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n$?

$$V_{n+1}=\frac{U_{n+1}-1}{2U_{n+1}-1}$$

$$V_{n+1}=\frac{U_{n+1}-1}{2U_{n+1}-1}=\frac{\frac{U_n-1}{2U_n}}{2\frac{3U_n-1}{2U_n}-1}$$

$$V_{n+1}=\frac{\frac{U_n-1}{2U_n}}{\frac{6U_n-2-2U_n}{2U_n}}=\frac{U_n-1}{4U_n-2}$$

$$V_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{U_n-1}{2U_n-1}\right)$$

Donc $V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

$$V_0=\frac{U_0-1}{2U_0-1}=\frac{1}{3}\quad \text{et}\quad V_n=V_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

D'où $V_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\quad \forall n\in\mathbb{N}$

b) Montrer que : $U_n=\frac{V_n-1}{2V_n-1}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

en déduire que $\lim U_n=1$

$$V_n=\frac{U_n-1}{2U_n-1}\Leftrightarrow V_n(2U_n-1)=U_n-1$$

$$\Leftrightarrow 2V_nU_n-V_n=U_n-1$$

$$\Leftrightarrow 2V_nU_n-U_n=V_n-1$$

$$\Leftrightarrow U_n(2V_n-1)=V_n-1\Leftrightarrow U_n=\frac{V_n-1}{2V_n-1}$$

D'où $U_n=\frac{V_n-1}{2V_n-1}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

On a $U_n=\frac{V_n-1}{2V_n-1}$ et $V_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

D'où $U_n=\dfrac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

$$\lim U_n=\lim\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}=\frac{0-1}{0-1}=1$$

Car $-1<\frac{1}{2}<1$ et $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

D'où $\lim U_n=1$

3) Calculer $\lim W_n$ telle que (W_n) la suite définie par :

$$W_n=\ln U_n\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

On a $W_n=\ln U_n$

$$\lim W_n=\lim\ln U_n \Longleftrightarrow \lim W_n=\ln 1=0$$

car la fonction ln est continue en 1.

Problème : **(2010 SN)** (8pts)

I) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=1+4xe^{2x}$$

1) Montrer que $g'(x)=4(2x+1)e^{2x}\quad \forall x\in\mathbb{R}$

$$g(x)=1+4xe^{2x}$$

$$g'(x)=4e^{2x}+4x\times(2x)'e^{2x}\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$g'(x)=4e^{2x}+8xe^{2x}\Leftrightarrow g'(x)=4(2x+1)e^{2x}$$

D'où $g'(x)=4(2x+1)e^{2x}\quad \forall x\in\mathbb{R}$

2) Montrer que g est croissante sur $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$.

On a $g'(x)=4(2x+1)e^{2x}\quad \forall x\in\mathbb{R}$

Le signe de $g'(x)$ est celui de $(2x+1)$

Car $e^{2x}>0\quad \forall x\in\mathbb{R}$; $2x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
2x + 1	$-$	0	$+$

$\forall x \in \left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ $g'(x) \geq 0$ donc g est croissantes sur $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$

$\forall x \in \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ $g'(x) \leq 0$ donc g est décroissantes sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$

3) a) Montrer que $g(-\frac{1}{2}) = 1-\frac{2}{e}$ et vérifier que $g(-\frac{1}{2}) > 0$

$g(x) = 1+4xe^{2x}$ donc $g(-\frac{1}{2}) = 1+4(-\frac{1}{2})e^{2(-\frac{1}{2})} = 1-2e^{-1}$

D'où $g(-\frac{1}{2}) = 1-\frac{2}{e}$

$g(-\frac{1}{2}) = \frac{e-2}{e}$ donc $g(-\frac{1}{2}) > 0$ car $e \approx 2,7$

b) En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de R.

On a g est croissante sur $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$.

Donc $g(-\frac{1}{2}) = \frac{e-2}{e}$ est le minimum de g sur R

Donc $g(x) \geq g(-\frac{1}{2})$ $\forall x \in \mathbb{R}$

D'où $g(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

II) On considère la fonction f définie sur ℝ par

$f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 2 cm)

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (on rappelle que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2x-1)e^{2x} + x + 1 = +\infty$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-1) = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x} - e^{2x} + x + 1 = -\infty$

Car $\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x} = \lim\limits_{t\to-\infty} te^{t} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$

2) Montrer que : $f'(x) = g(x)$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur R

$f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 2e^{2x} + (2x-1)2e^{2x} + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 2e^{2x} + 4xe^{2x} - 2e^{2x} + 1$

$f'(x) = 1 + 4xe^{2x} = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Or $g(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Donc $f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ donc f est strictement croissante sur R

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction l'axe des ordonnées.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x-1)e^{2x} + x + 1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (\frac{2x}{x} - \frac{1}{x})e^{2x} + 1 + \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (2 - \frac{1}{x})e^{2x} + 1 + \frac{1}{x} = +\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction l'axe des ordonnées.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x+1)]$ en déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x+1)]$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \left[(2x-1)e^{2x} + x + 1 - (x+1)\right]$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x} - e^{2x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x} = \lim\limits_{t\to-\infty} te^{t} = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$ donc la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (Δ) et la courbe (C) puis montrer que la courbe (C) est en dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ et qu'elle est au-dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

$$\mathbf{f(x)-(x+1)=0 \Leftrightarrow (2x-1)e^{2x}=0}$$

Or $\mathbf{e^{2x}}>0 \quad \forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}$

$$\mathbf{f(x)-(x+1)=0 \Leftrightarrow (2x-1)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
2x – 1		–	0	+	

$$\mathbf{f(x)-(x+1)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}} \qquad \mathbf{y=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}}$$

$$\mathbf{(\Delta)\cap(C)=\left\{A\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)\right\}}$$

$\forall\mathbf{x}\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\quad \mathbf{f(x)>(x+1)}$ la courbe (C) est au-dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

$\forall\mathbf{x}\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\quad \mathbf{f(x)<(x+1)}$ la courbe (C) est en dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$.

4) a) Montrer que y = x une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O.

$\mathbf{y=f'(0)(x-0)+f(0) \Leftrightarrow y=x}$ car f(0) = 0 ; f′(0) = 1

$\mathbf{(T): y=x}$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O.

b) Montrer que la courbe (C) possède un point d'inflexion d'abscisse $-\frac{1}{2}$

On a $\mathbf{f'(x)=g(x)} \quad \forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}$

Donc $\mathbf{f''(x)=g'(x)} \quad \forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}$

Or $\mathbf{g'(x)=4(2x+1)e^{2x}} \quad \forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
2x + 1		–	0	+	

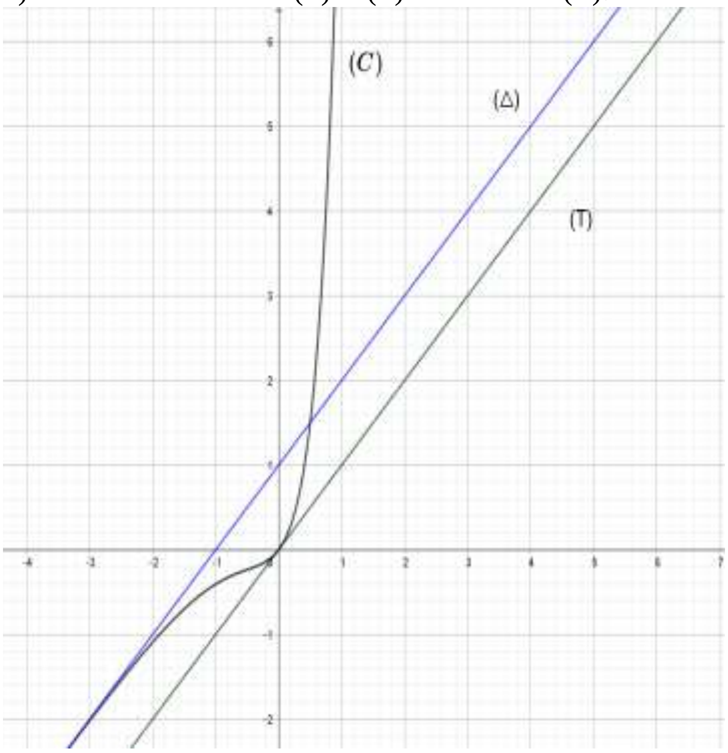
$\forall\mathbf{x}\in\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[\quad \mathbf{f''(x)\geq 0}$

$\forall\mathbf{x}\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right] \quad \mathbf{f''(x)\leq 0}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\mathbf{f''(x)}$		–	0	+	

La courbe (C) possède un point d'inflexion d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

5) Construire les droites (Δ) et (T) et la courbe (C).



6) a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}}\mathbf{(2x-1)e^{2x}dx=1-\frac{e}{2}}$

6) a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}}\mathbf{(2x-1)e^{2x}dx=1-\frac{e}{2}}$

$$\mathbf{u(x)=2x-1} \qquad \mathbf{u'(x)=2}$$

$$\mathbf{v'(x)=e^{2x}} \qquad \mathbf{v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)\mathbf{e^{2x}dx}=\left[\frac{1}{2}(2x-1)\mathbf{e^{2x}}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}2\frac{1}{2}\mathbf{e^{2x}dx}$$

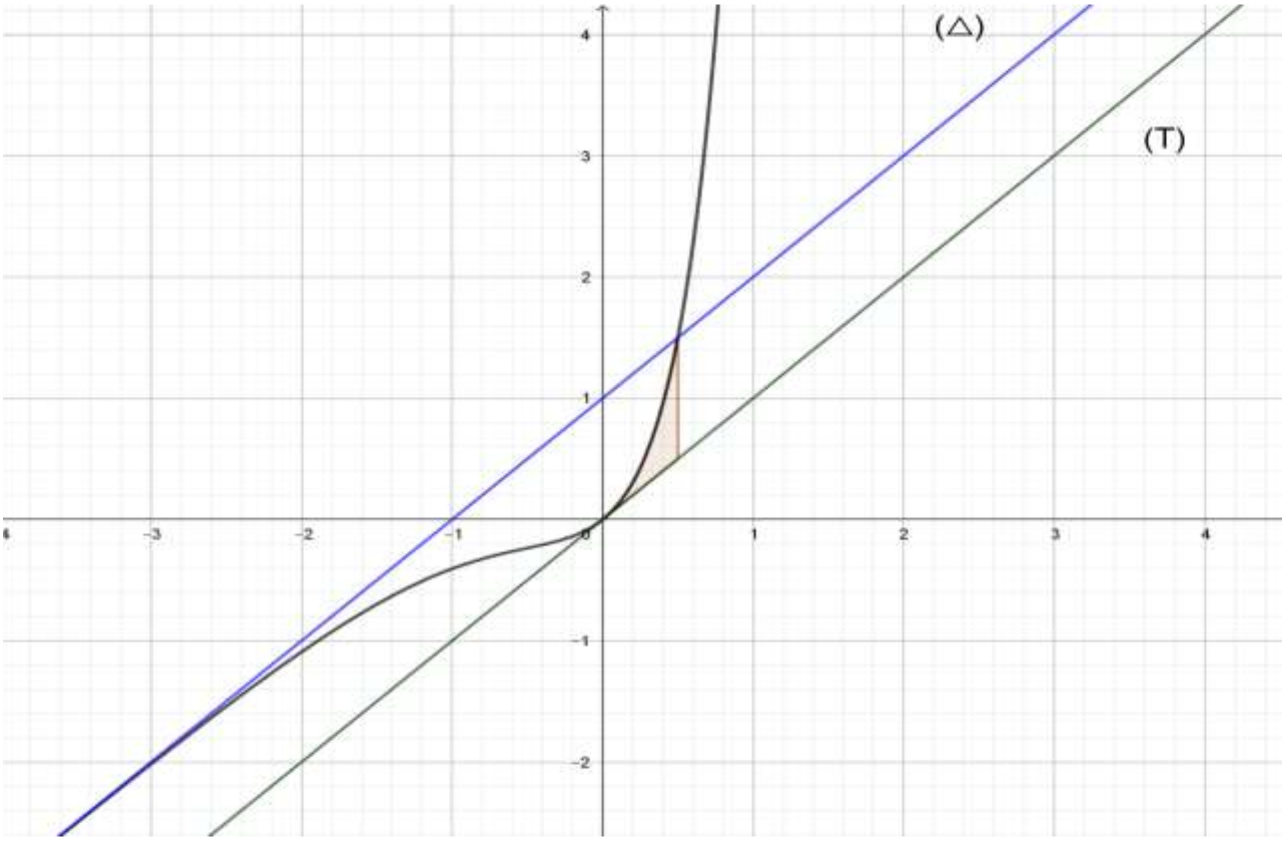
$$\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)\mathbf{e^{2x}dx}=\left[\mathbf{(x-\frac{1}{2})e^{2x}}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\mathbf{e^{2x}dx}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)\mathbf{e^{2x}dx}=0+\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{2}\mathbf{e^{2x}}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)\mathbf{e^{2x}dx}=\frac{1}{2}-\frac{\mathbf{e}}{2}+\frac{1}{2}=1-\frac{\mathbf{e}}{2}$$

D'où $\int_0^{\frac{1}{2}}\mathbf{(2x-1)e^{2x}dx=1-\frac{e}{2}}$

b) Montrer que l'aire du domaine plan limité par (C), la tangente (T) à (C) et les deux droites $x = 0$ et $\mathbf{x} = \frac{1}{2}$ est $(6-2\mathbf{e})\mathbf{cm}^2$.



$$\mathbf{A} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathrm{x}\right| \mathbf{dx} 2\mathbf{cm} \times 2\mathbf{cm}$$

$$\mathbf{A} = \int_0^{\frac{1}{2}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathrm{x})\mathbf{dx} 4\mathbf{cm}^2 \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{x} \ \ \forall \mathbf{x} \in [0;+\infty[$$

On pose $\mathbf{I} = \int_0^{\frac{1}{2}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathrm{x})\mathbf{dx}$

$$\mathbf{I} = \int_0^{\frac{1}{2}} ((2\mathbf{x}-1)\mathbf{e}^{2\mathbf{x}} + \mathbf{x} + 1 - \mathrm{x})\mathbf{dx}$$

$$\mathbf{I} = \int_0^{\frac{1}{2}} ((2\mathbf{x}-1)\mathbf{e}^{2\mathbf{x}} + 1)\mathbf{dx} \Leftrightarrow \mathbf{I} = \int_0^{\frac{1}{2}} (2\mathbf{x}-1)\mathbf{e}^{2\mathbf{x}}\mathbf{dx} + \int_0^{\frac{1}{2}} 1\mathbf{dx}$$

$\mathbf{x} \to (2\mathbf{x}-1)\mathbf{e}^{2\mathbf{x}}$ et $\mathbf{x} \to 1$ sont continues sur R en particulier sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

$$\mathbf{I} = 1 - \frac{\mathbf{e}}{2} + [\mathbf{x}]_0^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\mathbf{e}}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{donc } \mathbf{I} = \frac{3}{2} - \frac{\mathbf{e}}{2}$$

D'où $\mathbf{A} = (6-2\mathbf{e})\mathbf{cm}^2$

AHMED AGOUZAL