Année scolaire : 2022 – 2023	Examen national 2009 session normale	AGOUZAL 2 BPCF

Exercice 1 : (2009 S1) (3pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les points A(-2,2, 8), B(6, 6, 0) et C(2, -1, 0), D(0, 1, -1).

(S) l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$

1) Déterminer les coordonnées $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}$ et en déduire que x + 2y + 2z = 0 est une équation cartésienne du plan (OCD)

2) Vérifier que (S) est la sphère de centre Ω(2, 4,4) et de rayon $R = 6$

3) a – Calculer la distance de Ω au plan (OCD)

b – En déduire que le plan (OCD) est tangent à la sphère(S)

c – Vérifier que $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$ et en déduire que O est le point contact de la sphère (S) et du plan (OCD).

Exercice 2 : (2009 S1) (3pts)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points A , B et C d'affixes respectives $a = 2 - 2i$, $b = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$c = 1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i$

1) Ecrire a et b sous forme trigonométrique

2) Soit R la rotation de centre O Et d'angle $\frac{5\pi}{6}$

a – Soit Z l'affixe du point M du plan et Z′ l'affixe du point M′ image du point M par la rotation

Montrer que Z′ = bZ.

b) Vérifier que le point C image du point A par la rotation R.

3) Montrer que $\arg c \equiv \arg a + \arg b \, [2\pi]$ puis

Déterminer l'argument du nombre complexe c.

Exercice 2 : (2009 S1) (2pts)

On pose $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3} dx$ et $J = \int_{-2}^{-1} \ln(2x+6) dx$

1) a – Vérifier que : $\frac{x}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-3\}$

b – Montrer que : $I = 1 - 3\ln 2$

2) A l'aide d'une intégration par parties montrer que: $J = -I$

Exercice 3 : (2009 S1) (3pts)

Une caisse contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 5 boules rouges. (indiscernables au toucher).

On tire au hasard et simultanément trois boules de la caisse.

1) On considère les deux événements :

A″ Obtenir trois boules de même couleurs″

B ″ Obtenir trois boules de couleurs différentes deux à deux ″

Montrer que $P(A) = \frac{3}{44}$ et $P(B) = \frac{3}{11}$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage fait correspondre le nombre de couleur des boules tirées.

a) Déterminer les valeurs prises par X.

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique E(X)

Problème : (2009 S1) (9pts)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 1 cm)

I – 1) Vérifier que :

$$e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

en déduire que $D_f = \mathbb{R}$ et que :

$$1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ln 4$ puis interpréter le résultat géométriquement.

2) a – Montrer que $f'(x) = \frac{2\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x} - 1)}{\left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

et vérifier que : $f'(0) = 0$

b – Etudier le signe $\sqrt{e^x} - 1$ du en déduire que f est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty; 0]$

4) a- Vérifier que :

$$f(x) = 2x + 2\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b – Montrer que la droite (D) d'équation y = 2x est asymptote à la courbe (C_f) au voisinage en +∞

5) a - Vérifier que:

$$e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b- Etudier le signe de $\sqrt{e^x} - 2$ et de $(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$ sur $\mathbb{R}$

c – En déduire que:

$$\forall x \in [0; \ln 4] \quad e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \le \sqrt{e^x}$$

d – Montrer que : $f(x) \le x \quad \forall x \in [0; \ln 4]$

6) Construire la courbe (C_f) (On admet que (C_f) admet deux points d'inflexions d'abscisse α et β tels que : $\alpha < -1$ et $\beta > 2$. On pose $\ln 4 \approx 1,4$

II – On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = f(U_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 1$$

1) Montrer que : $0 \le U_n \le \ln 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

3) En déduire que (U_n) est convergente puis calculer sa limite.

AHMED AGOUZAL