Groupe scolaire Inisse	Examen n° 3 de Mathématiques	2eme pc fr Durée : 2h

Exercice 1 (8 pts)

1,5 pts 1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+2z+2=0$

2) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points :

A,B,C d'affixes respectivement : $a=-1+i$, $b=1+i$, $c=(1+\sqrt{3})i$

Soit $M(z)$ un point du plan complexe et $M'(z')$ son image par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{2}$

1,5 pts a) Montrer que : $z'=-iz$

1,5 pts b) Déduire que le point B est l'image du point A par la rotation R

1,5 pts c) Montrer que : $\frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1 pt d) Ecrire le nombre complexe : $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sous la forme trigonométrique

1 pt e) Déduire que le triangle ABC est équilatéral

Exercice 2 (6 pts)

Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{7u_n+4}{2u_n+5} \end{cases}$

1,5 pts 1) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n\succ 2$

2) On pose : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad v_n=\frac{u_n-2}{u_n+1}$

1,5 pts a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n=\frac{2+v_n}{1-v_n}$

1,5 pts b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et écrire v_n en fonction de n

1,5 pts c) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$ puis déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 3 $(6\,pts)$

Partie 1 :

Soit la fonction numérique g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x^2+x+3-3\ln(x)$

0,5 pts 1) a) Montrer que : $(\forall x\in]0,+\infty[)\quad g'(x)=\dfrac{(2x+3)(x-1)}{x}$

0,5 pts b) Déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $]0,1]$

0,5 pts 2) Déduire que : $(\forall x\in]0,+\infty[)\quad g(x)\succ 0$

Partie 2 :

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x+\left(\dfrac{x+3}{x}\right)\ln(x)$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

0,5 pts 1) Montrer que : $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f(x)=-\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement

0,5 pts 2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} f(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\mapsto +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$

0,5 pts b) Montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation (Δ) : $y=x$ au voisinage de $+\infty$

0,5 pts 3) a) Montrer que : $(\forall x\in]0,+\infty[)\quad f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

0,5 pts b) Donner le tableau de variation de la fonction f

0,5 pts 4) a) Etudier le signe de : $f(x)-x$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$

0,5 pts b) Déduire que la courbe (C) est au dessus de (Δ) sur l'intervalle $[1,+\infty[$ et au dessous de (Δ) sur L'intervalle $]0,1]$

0,5 pts c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0,+\infty[$ et que :

$$\frac{1}{e}\prec\alpha\prec 1$$

0,5 pts d) Tracer la droite (Δ) et la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$