



التعداد تذكير

I. تذكير :

A. مجموعة منتهية - رئيسي مجموعة :

01. تعريف :

E مجموعة و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .
إذا كان عدد عناصر المجموعة E هو n عنصر نقول أن المجموعة E هي مجموعة منتهية .
العدد n يسمى رئيسي المجموعة E . و نرمز له ب : $\text{card}E = n$.

02. أمثلة :

$E = \{a, b, c, f\}$ مجموعة منتهية و $\text{card}E = 4$. أما المجموعات N أو $\mathbb{R}$ أو $[0, 1[$.. فهي غير منتهية.

03. مجموعات متقدراتان: Ensembles équipotents

1- تعريف:

A و B مجموعتان منتهيتان. إذا وجد تطبيق تقابلي بين A و B نقول إن المجموعتان A و B متقدراتان . لدينا : $\text{card}A = \text{card}B$

04. خاصيات العمليات و رئيسي :

A و B مجموعتان منفصلتان $(A \cap B = \emptyset)$. لدينا : $\text{card}A \cup B = \text{card}A + \text{card}B$.

بصفة عامة : $\text{card}A \cup B = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}A \cap B$.

E_1 و $E_2 \dots E_p$ مجموعات منتهية و غير فارغة لدينا : $\text{card}E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p = \text{card}E_1 \times \text{card}E_2 \times \dots \times \text{card}E_p$.

حالة خاصة : $E_1 = E_2 = \dots = E_p = E$ إذن : $\text{card}E^p = (\text{card}E)^p$.

رئيسي متمم جزء A في E : لدينا : $C_E^A = \bar{A} = E \setminus A$ مع : $\text{card}\bar{A} = \text{card}E - \text{card}A$

B. المبدأ الأساسي للتعداد :

01. مبدأ الجداء :

نعتبر تجربة تشمل p اختيارا. مع $(p \in \{1, 2, 3, \dots\})$

▪ إذا كان الاختيار الأول يتم ب : n_1 كيفية مختلفة.

▪ إذا كان الاختيار الثاني يتم ب : n_2 كيفية مختلفة.

▪ إذا كان الاختيار الثالث يتم ب : n_3 كيفية مختلفة

.....

▪ إذا كان الاختيار الذي رقمه p يتم ب : n_p كيفية مختلفة.

فإن عدد الكيفيات التي يتم بها ال p اختيارات هو $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_p$

C. عدد التطبيقات من مجموعة E نحو مجموعة F (E و F منتهيتان وغير فارغتين)

01. خاصية :

A و B مجموعتان منتهيتان وغير فارغتين عدد التطبيقات من A نحو B هو : $(\text{card}B)^{\text{card}A}$

D. الترتيبات بدون تكرار:

01. تعريف :

لتكن $E = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ مجموعة تحتوي على n عنصر مع $n \in \mathbb{N}^*$ ليكن p عددا صحيحا طبيعيا حيث $1 \leq p \leq n$ كل ترتيب ل p عنصر مختار من بين n بدون تكرار أي عنصر يسمى **ترتيبة بدون تكرار** ل p عنصر من بين n عنصر . أو أيضا كل عنصر $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ من E^p (مع العناصر x_i مختلفة مثنى مثنى) تسمى **ترتيبة بدون تكرار** ل p عنصر من بين n

02. عدد الترتيبات :

1- خاصية:

عدد الترتيبات : ل p عنصر من بين n عنصر (مع $1 \leq p \leq n$) هو العدد الصحيح الطبيعي الذي نرمز له بالرمز A_n^p حيث :

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)}_p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

E. التبديلات (حالة خاصة بالنسبة لترتيبات بدون تكرار: ترتيب n عنصر بدون تكرار من بين n عنصر)

01. تعريف:

إذا رتبنا n عنصر من بين n عنصر (أي $p = n$) هذه الترتيبة تسمى **تبديلة** ل n عنصر .

02. خاصية:

عدد تبديلات ل n عنصر هو العدد $n!$ مع $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$

F. التاليفات :

01. تعريف :

لتكن E مجموعة تحتوي على n عنصر مع $(n \in \{1, 2, 3, \dots\})$ كل جزء من E يحتوي على p عنصر $(p \leq n)$ يسمى **تأليفة** ل p عنصر من بين n عنصر.

02. عدد التاليفات :

1- خاصية:

عدد التاليفات ل p ($p \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$) عنصر من بين n عنصر هو العدد الصحيح الطبيعي الذي نرمز له ب :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)! \times p!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times p}$$

G. حدانية نيوتن :

2- خاصية:

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ لدينا : $\forall n \in \mathbb{N}^* : (a+b)^n = \sum_{i=0}^{i=n} C_n^i a^{n-i} b^i$

H. شجرة الإمكانيات :

1. مثال 1 :

لقطعة نقود وجهين : فظهر القطعة نرسم له ب: P (PILE)

وجه القطعة الآخر نرسم له ب: F (face)

نرمي قطعة نقود ثلاثة مرات متتالية (عندما نكتب أن النتيجة كانت: PPF نقصد أن القذفة الأولى أعطت F والقذفة 2 أعطت P والقذفة 3 أعطت P).

ملحوظة: هذه التجربة يمكن تمثيلها في التمثيل التالي يسمى شجرة الإمكانيات.

2. مثال 2 :

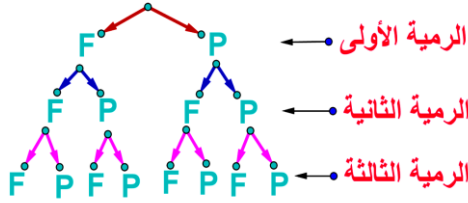
يحتوي كيس على 5 كرات حمراء و 2 من اللون الأخضر .

نسحب عشوائيا وبتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق

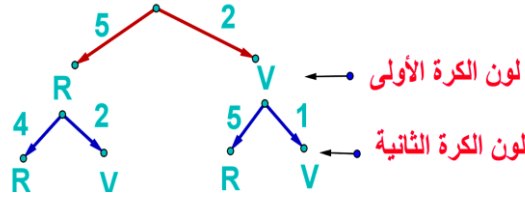
(أي بدون إرجاع الكرة الأولى إلى الصندوق).

ملحوظة : يمكن استعمال شجرة الإمكانيات .

شجرة الإمكانيات لقفزة قطعة نقدية 3 مرات متتابة



شجرة الإمكانيات



حساب الاحتمالات

II. تجربة عشوائية - مفردات:

01. نشاط :

- نسقط من علو 3 أمتار قطعة من حديد . نتوقع بأن القطعة ستقع على الأرض. هذه التجربة إذا تكررت ستعطي نفس النتيجة
- نقذف في الهواء قطعة نقدية مرتين ونهتم بالنتيجة المحصل عليها للوجه الأعلى في كل مرة.
- هل يمكن أن نعرف النتيجة المحصل عليها مسبقا في كل محاولة؟

02. مصطلحات: تجربة عشوائية - إمكانية - حدث

التجربة الثانية : تسمى تجربة عشوائية أو اختبار عشوائي

النتائج المحصل عليها هي : FF و FP و PF و PP .

إمكانية: كل نتيجة محصل عليها تسمى إمكانية نرسم لها ب ω_1 أي $\omega_1 = PP$ و $\omega_2 = PF$...

كون: الإمكانيات تكون مجموعة تسمى كون الإمكانيات ونرسم لها ب : $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$. عدد عناصر Ω يسمى رئيسي Ω

و يرمز له ب: $card\Omega = 4$

حدث : كل جزء A من المجموعة Ω يسمى حدث

مثال الحدث: $A = \{PP\}$ أو $A = \{PF, FP\}$ أو $A = \{PP, PF, FP, FF\} = \Omega$ أو $A = \emptyset$

حدث أولي : كل جزء مكون من إمكانية 1 فقط يسمى حدث أولي أو حدث ابتدائي. مثال : $A = \{PP\}$ أو $A = \{FP\}$

تعبير عن حدث: الأحداث يمكن التعبير عنها بجمل. مثال: $A = \{PF, FP\}$ "نتيجتا القذفة الأول و الثانية مختلفتان"

تحقيق الحدث A - أحداث خاصة:

إذا قمنا بالتجربة السابقة وحصلنا على FP نقول بأن الحدث $A = \{PF, FP\}$ قد تحقق أو الحدث A قد وقع .

Ω كون الإمكانيات

حدث أولي: كل جزء يحتوي على إمكانية واحدة يسمى حدث أولي أو حدث ابتدائي مثال : $A = \{PP\}$ أو $A = \{FP\}$..

الحدث الأكيد: $A = \{PP, PF, FP, FF\} = \Omega$ يسمى الحدث الأكيد لأن أي نتيجة لتجربة تنتمي لهذا الجزء (أي الجزء Ω يتحقق دائما).

الحدث المستحيل: $A = \emptyset$ يسمى الحدث المستحيل لأن أي نتيجة تقع بعد التجربة و لا تنتمي لهذا الجزء.

■ انسجام حدثين: حدثين A و B غير منسجمين يعني أن: $A \cap B = \emptyset$.

■ مثال: $A = \{PF, FP\}$ و $B = \{FF, PP\}$ لأن $A \cap B = \emptyset$

■ الحدث المضاد:

Ω كون الإمكانات. نقول إن الحدثين A و B متضادان يكافئ أن: $A \cap B = \emptyset$ و $A \cup B = \Omega$ ، نكتب: $\bar{B} = A$ أو $\bar{A} = B$ خاصية: $\text{card}A + \text{card}\bar{A} = \text{card}\Omega$.

03. أمثلة:

1. بالنسبة لتجربة: $A = \{PF, FP, PP\}$ و $B = \{FF\}$ حدثان متضادان لأن: $A \cap B = \emptyset$ و $A \cup B = \Omega$ إذن: $\bar{A} = B$

2. يحتوي صندوق: على 3 كرات من اللون أبيض و كرتين من اللون أسود و كرة من اللون أحمر. نسحب من الصندوق تانيا كرتين (دفعة واحدة) .

(1) ما هو عدد الإمكانات ؟ (أو ما هو عدد السحبات) (أو أوجد $\text{card}\Omega$)

(2) لنعتبر الحدث: B " سحب على الأقل كرة واحدة بيضاء " ما هو عدد الإمكانات التي تحقق B ؟ أو ما هو $\text{card}B$ ؟

(3) عبر عن الحدث المضاد ل A بجملة. ما هو عدد الإمكانات التي تحقق الحدث $\bar{A}$ ؟ (أي $\text{card}\bar{A}$) .

04. مجموعة تجزئ:

مجموعة E تسمى مجموعة تجزئ ل Ω يعني:

E متكونة من أجزاء الكون Ω و هذه الأجزاء منفصلة متنى متنى و اتحاد هذه الأجزاء هو الكون Ω .

■ مثال: $E = \{\{PP\}; \{PF, FP\}; \{FF\}\}$ هي تجزئ ل Ω

III. الفضاءات الاحتمالية المنتهية:

A احتمال تحقق إمكانية (أو حدث أولي) :

01. نشاط 1 :

نرمي في الهواء قطعة نقدية مرتين متتاليتين عندما نكتب أن النتيجة (أو الإمكانية) كانت: PF نقصد أن الفذفة الأولى أعطت P والفذفة 2 أعطت F . بعد إعادة التجربة 1000 مرة حصلنا على النتائج التالية .

FF	FP	PF	PP	الإمكانية
240	260	270	230	عدد المرات التي تحققت الإمكانية

1. ما هو الحدث الذي له أكبر نسبة حظ لكي يتحقق؟

نقول إن احتمال الحصول على الإمكانية PF هي $\frac{270}{1000}$ و نكتب $p(\{PF\}) = 0,27$

2. ما هو الحدث الذي له أضعف نسبة حظ لكي يتحقق؟

نقول إن احتمال الحصول على الإمكانية PP هو $\frac{230}{1000}$ و نكتب $p(\{PP\}) = 0,23$

02. نشاط 2 :

نرمي في الهواء نردا مكعبا له 6 أوجه تحمل على التوالي الأرقام 1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6 .

(1) ما هو كون الإمكانات؟

(2) نعتبر الأحداث التالية:

A " نحصل على رقم a حيث $|a| < 2$ "

B " نحصل على رقم a حيث a يقبل القسمة على 3 "

C " نحصل على رقم a يكون زوجي "

- أكتب بالتفصيل الأحداث التالية : A ؛ B ؛ C .
- ما هو الحدث الذي له أكبر نسبة حظ لكي يتحقق. ماهي نسبة حظه؟.
- ما هو الحدث الذي له أضعف نسبة حظ أن يتحقق. أوجد نسبة حظ الحصول على الحدث A .
- أوجد نسبة احتمال الحصول على حدث أولي.

03. احتمال على مجموعة:

1. تعريف:

لتكن $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ مجموعة منتهية كون الإمكانات

- إذا كانت صورة كل عنصر ω_i من Ω بعدد p_i ينتمي إلى $[0, 1]$ أي $(\omega_i \mapsto p_i)$ ؛ وكان $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$
- نقول بأننا عرفنا احتمالا p على الكون Ω .
- نقول إن احتمال الحدث الابتدائي $\{\omega_i\}$ هو العدد p_i ونكتب : $p(\{\omega_i\}) = p_i$.
- الزوج $(\Omega; p)$ يسمى فضاء احتماليا منتهيا.

2. تعريف: بطريقة أخرى

لتكن $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ مجموعة منتهية كون إمكانات تجربة عشوائية .

- عندما نعيد تجربة N مرة حيث n_i مرة تتحقق فيه الإمكانية ω_i . العدد $\frac{n_i}{N}$ يسمى احتمال الحدث $\{\omega_i\}$ (أو الإمكانية ω_i) ونكتب
- $p_i = p(\{\omega_i\}) = \frac{n_i}{N}$
- احتمال حدث A هو مجموع احتمالات الأحداث الابتدائية التي تنتمي إلى A ونكتب : $p(A)$.

B. احتمال حدث :

01. نشاط:

نأخذ النشاط السابق المتعلق برمي في الهواء قطعة نقدية مرتين متتاليتين

3. نعتبر الحدث $A = \{PP; FF\}$ نقول إن احتمال الحصول على الحدث A هو $\frac{270}{1000} + \frac{230}{1000} = \frac{500}{1000}$ ونكتب

$$p(A) = p(\{PP, PF\}) = p(\{PP\}) + p(\{PF\}) = 0,5$$

1. احتمال حدث :

2. تعريف :

احتمال حدث A هو مجموع احتمالات الأحداث الابتدائية التي تنتمي إلى A ونكتب : $p(A)$.

أو أيضا $A = \{\omega_{i1}, \omega_{i2}, \omega_{i3}, \dots, \omega_{ip}\}$ فإن :

$$p(A) = p(\{\omega_{i1}, \omega_{i2}, \omega_{i3}, \dots, \omega_{ip}\}) = p(\{\omega_{i1}\}) + p(\{\omega_{i2}\}) + p(\{\omega_{i3}\}) + \dots + p(\{\omega_{ip}\})$$

3. مثال: $A = \{1, 2, 4\}$ لدينا:

$$p(A) = p(\{1, 2, 4\}) = p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{4\})$$

4. خاصيات :

02. خاصيات :

- ليكن A و B حدثين من كون الإمكانات من Ω .
- $p(\emptyset) = 0$ و $p(\Omega) = 1$ و $\forall A \in \Omega: 0 \leq p(A) \leq 1$.
- $A \cap B = \emptyset$ (حدثان غير منسجمين) لدينا : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- حالة عامة : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

03. برهان :

- لدينا : $B \cup \emptyset = B$ ومنه : $p(B \cup \emptyset) = p(B)$ أي $p(B) + p(\emptyset) = p(B)$ ومنه : $p(\emptyset) = 0$ بالتالي : $p(\emptyset) = 0$ خلاصة : $p(\emptyset) = 0$.
- $p(\Omega) = 1$ صحيحة طبقا للتعريف .
- نعتبر : $A \cap B = \emptyset$ مع $A = \{x_1, x_1, \dots, x_d\}$ و $B = \{y_1, y_1, \dots, y_h\}$ ومنه : $A \cup B = A = \{x_1, x_1, \dots, x_d, y_1, y_1, \dots, y_h\}$ إذن : $p(A \cup B) = p(\{x_1, x_2, \dots, x_d, y_1, y_2, \dots, y_h\})$

$$= \underbrace{p(\{x_1\}) + p(\{x_2\}) + \dots + p(\{x_d\})}_{p(A)} + \underbrace{p(\{y_1\}) + p(\{y_2\}) + \dots + p(\{y_h\})}_{p(B)}$$
 خلاصة : $A \cap B = \emptyset$ إذن $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- نبين أن : $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.
- نعلم أن : $A \cap \bar{A} = \emptyset$ و $A \cup \bar{A} = \Omega$ ومنه : $p(A \cup \bar{A}) = p(\Omega) \Rightarrow p(A) + p(\bar{A}) = 1 \Rightarrow p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ خلاصة : $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

4. نعتبر الحدث $A = \{PP; FF\}$ نقول إن احتمال الحصول على الحدث A هو $\frac{270}{1000} + \frac{230}{1000} = \frac{500}{1000}$ و نكتب $p(\{PP, PF\}) = 0,5$

IV. فرضية تساوي الاحتمالات:

01. خاصية:

إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية (اي الأولية) متساوية الاحتمال في تجربة حيث كون امكانياتها Ω .
 أي $p(\{\omega_1\}) = p(\{\omega_2\}) = p(\{\omega_3\}) = \dots = p(\{\omega_n\})$ يصبح احتمال الحدث A من Ω هو $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$.

02. تمرين:

- امتحان شفوي في الرياضيات يحتوي على: 5 أسئلة في الهندسة و 4 أسئلة في الجبر و 3 أسئلة في التحليل. الطالب يختار 3 أسئلة من بين هذه الأسئلة. نعتبر الأحداث التالية:
- A "الأسئلة 3 كلها في الهندسة"
 - B "سؤال واحد فقط في كل مادة"
 - C "سؤال على الأقل في الهندسة"
- 1) أ - ما هو عدد السحبات الممكنة لهذا الطالب إذا كان سحب الأسئلة في آن واحد .

ب- أحسب احتمالات الأحداث : A و B و C إذا كان سحب الأسئلة في آن واحد .

(2) نفس الأسئلة إذا كان السحب بالتتابع وبدون إحلال للأسئلة .

(3) نفس الأسئلة إذا كان السحب بالتتابع و بإحلال للأسئلة .

جواب : لبعض الأسئلة

(1)

أ- عدد السحبات الممكنة :

سحب 3 أسئلة في آن واحد من بين 12 سؤال يمثل تأليفة ل 3 من بين 12 و بالتالي عدد السحبات الممكنة هو عدد التأليفات ل 3 من بين 12

$$\text{ومنه : } \text{card}\Omega = C_{12}^3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{1 \times 2 \times 3} = 220$$

ب - احتمال الأحداث:

• احتمال A :

نحسب : $\text{card}A$:

الأسئلة 3 كلها في الهندسة أي عدد التأليفات ل 3 من بين 5 (الأسئلة في الهندسة) ومنه : $\text{card}A = C_5^3 = 10$

$$\text{و بالتالي : } p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$$

• احتمال B :

نحسب : $\text{card}B$:

سؤال واحد فقط في كل مادة أي سؤال 1 في الهندسة (C_5^1) و سؤال 1 في الجبر (C_4^1) و سؤال 1 في التحليل (C_3^1) ومنه :

$$\text{card}B = C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1 = 60$$

$$\text{و بالتالي : } p(A) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1}{C_{12}^3} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

• احتمال C : حاول أنت تعطي الجواب .

(2) السحب بالتتابع وبدون إحلال للأسئلة .

أ- عدد السحبات الممكنة :

سحب 3 أسئلة بالتتابع وبدون إحلال من بين 12 سؤال يمثل ترتيبية بدون تكرار ل 3 من بين 12 و بالتالي عدد السحبات الممكنة هو عدد

الترتيبات ل 3 من بين 12 ومنه : $\text{card}\Omega = A_{12}^3 = 12 \times 11 \times 10 = 1320$

• احتمال A :

نحسب : $\text{card}A$:

الأسئلة 3 كلها في الهندسة أي عدد الترتيبات بدون تكرار ل 3 من بين 5 (الأسئلة في الهندسة) ومنه : $\text{card}A = A_5^3 = 60$

$$\text{و بالتالي : } p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{A_5^3}{A_{12}^3} = \frac{60}{1320} = \frac{1}{22}$$

طريق 2 :

السؤال 1 في الهندسة احتمالته هو $\frac{5}{12}$. السؤال 2 في الهندسة احتمالته هو $\frac{4}{11}$. السؤال 3 في الهندسة احتمالته هو $\frac{3}{10}$.

ومنه $p(A) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{22}$. (هناك طريقة 3 استعمال الشجرة للإجابة عن هذ الأسئلة :

V. الاحتمال الشرطي - استقلال حدثين -الاختبارات المتكررة:

A. الاحتمال الشرطي :

01. تعريف:

ليكن A و B حدثين لنفس التجربة Ω حيث: $p(A) \neq 0$.

احتمال الحدث B علما أن الحدث A محقق هو العدد $\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$ و الذي نرمز له ب: $p_A(B)$ أو $p(B/A)$

02. مثال:

يحتوي صندوق: على 4 كرات بيضاء و 6 كرات حمراء.
سحبنا كرتين بالتتابع و بدون إحلال من هذا الصندوق .

احسب احتمال الأحداث التالية:

B_1 " الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء "

R_1 " الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء "

C " الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء علما أن

الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء "

D " الكرة المسحوبة في المرة الثانية بيضاء علما أن

الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء "

E " الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء و الكرة الثانية حمراء "

R_2 " الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء "

جواب:

حسب شجرة الأحداث ، لدينا:

$$p(R_1) = \frac{6}{10} \text{ و } p(B_1) = \frac{4}{10}$$

$$p(C) = p_{B_1}(R_2) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$p(D) = p_{R_1}(B_2) = \frac{4}{9}$$

$$p(E) = p(B_1 \cap R_2) = p(B_1) \times p_{B_1}(R_2) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9}$$

$$p(R_2) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{54}{90} = \frac{3}{5}$$

طريقة ثانية لتوضيح الجواب الأول فقط:

نحسب: $p(B_1)$:

الكرة الأولى بيضاء احتمالها هو: $\frac{4}{10}$. الكرة الثانية غير مهم لونها (كيف ما كان لونها) احتمالها هو $\frac{9}{9}$

$$\text{ومنه: } p(B_1) = \frac{4}{10} \times \frac{9}{9} = \frac{4}{10}$$

03. صيغ الاحتمالات المركبة :

1. خاصية :

ليكن $(\Omega; p)$ فضاء احتمالي منتهي . A و B حدثان لنفس التجربة Ω حيث: $p(A) \neq 0$ و $p(B) \neq 0$.

الكتابة : $p(A \cap B) = p(A)p_B(B) = p(B)p_A(A)$ تسمى صيغة الاحتمالات المركبة .

04. الاحتمالات الكلية :

1. خاصية :

ليكن $(\Omega; p)$ فضاء احتمالي منتهي . $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ أحداث من Ω تكون تجزئي ل Ω

(أي $A_i \cap A_j = \emptyset$: $\forall i, j / i \neq j$ و $\bigcup_{k=1}^n A_k = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \Omega$) . احتمال حدث B من Ω هو :

$$p(B) = p(A_1)p_{A_1}(B) + p(A_2)p_{A_2}(B) + p(A_3)p_{A_3}(B) + \dots + p(A_n)p_{A_n}(B)$$

05. مثال :

B. استقلالية حدثين:

01. تعريف :

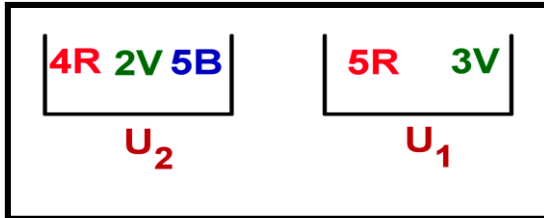
نقول بأن حدثين A و B مستقلان إذا كان: $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ أو أيضا: $p_A(B) = p(B)$

02. ملحوظة : A و B حدثان مستقلان يعني أن تحقيق أحدهما لا يتأثر بتحقيق أو عدم تحقيق الآخر .

03. أمثلة:

مثال 1 :

نعتبر صندوقين U_1 و U_2 حيث : R = لون أحمر، V = لون أخضر، B = لون أزرق.



نسحب كرة من الصندوق U_1 وكرة من الصندوق U_2 .

التجربة متكونة من اختبارين مستقلين

" سحب كرة حمراء من الصندوق U_1 و كرة خضراء من الصندوق U_2 " $A_{R1;V2}$

نعتبر الأحداث التالية :

" سحب كرة حمراء من الصندوق U_1 " R_1

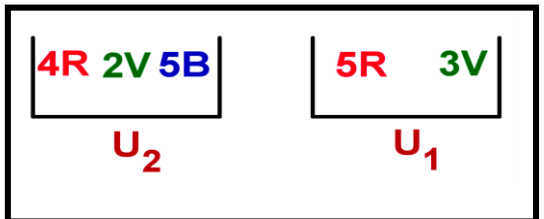
إن: $p(R_1) = \frac{5}{8}$

" سحب كرة خضراء من الصندوق U_2 " V_2

إن: $p(V_2) = \frac{2}{11}$

" سحب كرة حمراء من الصندوق U_1 و كرة خضراء من الصندوق U_2 " $A_{R1;V2}$

الحدثين R_1 و V_2 مستقلين. (لأن سحب كرة من أحد الصندوقين احتمالها غير مرتبط بنتائج الاختبار لصندوق الآخر.



إن: $p(A_{R1;V2}) = p(R_1) \times p(V_2) = \frac{5}{8} \times \frac{2}{11} = \frac{5}{44}$

مثال 2 :

نعتبر صندوقين U_1 و U_2 حيث : R = لون أحمر، V = لون أخضر، B = لون أزرق.

نختار عشوائيا أحد الصندوقين ثم نسحب منه بندق واحدة .

لنعتبر الحدث " الحصول على بندق أخضر " V

1. أنشئ شجرة الإمكانات و الاحتمالات للتجربة .

2. أحسب : $p(V)$.

3. ما هو احتمال :

B " اختيار الصندوق U_1 علمنا اننا حصلنا على بندق أخضر "

جواب :

1. ننشئ شجرة : (أنظر الشكل أمامه)

2. نحسب : $p(A)$.

V " سحب بندق أخضر "

U_1 " اختيار الصندوق U_1 "

U_2 " اختيار الصندوق U_2 "

V "البندق المسحوب لونه أخضر " أو أيضا " اختيار الصندوق U_1 و السحب يعطي بندق أخضر أو اختيار الصندوق U_2 و السحب يعطي

بندق أخضر "

ومنه : نعبر عن V بما يلي : $V = (U_1 \cap V) \cup (U_2 \cap V)$ إذن :

$$\begin{aligned} p(V) &= P((U_1 \cap V) \cup (U_2 \cap V)) \\ &= p(U_1 \cap V) + p(U_2 \cap V) \\ &= p(U_1)p_{U_1}(V) + p(U_2)p_{U_2}(V) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{11} \\ &= \frac{49}{176} \end{aligned}$$

خلاصة : $p(V) = \frac{49}{176}$

3. حساب : $p(B)$

$$p(B) = p_V(U_2) = p(U_2 / V) = \frac{p(U_2 \cap V)}{p(V)} = \frac{p(U_2) \times p_{U_2}(V)}{p(V)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{11}}{\frac{49}{176}} = \frac{16}{49}$$

C. الاختبارات المتكررة:

01. نشاط:

يحتوي كيس على 6 كرات مرقمة من 1 إلى 6. نسحب عشوائيا و تأنيا كرتين من الصندوق .

ما هو احتمال الحدث A " الحصول على رقمين زوجيين "؟

نعيد سحب عشوائي و تأنيا كرتين من الصندوق ثلاث مرات متتابة و نهتم كم من مرة تحقق الحدث A بعد إعادة اختبار 3 مرات متتابة وما هو احتمالها .

جواب:

نحسب : $p = p(A)$

▪ نحسب $card\Omega$ (عدد سحبات الممكنة)

سحب تأنيا كرتين من بين 6 كرات تحمل هو تأليفة ل 2 من بين 6 إذن عدد السحبات الممكنة هو : $card\Omega = C_6^2 = 15$

▪ نحسب : $cardA$

سحب تأنيا كرتين من بين 3 كرات تحمل الأرقام زوجية هو تأليفة ل 2 من بين 3 إذن : $cardA = C_3^2 = 3$

▪ احتمال A :

$$p = p(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

02. مفردات :

نقول إن الاختبار تكرر 3 مرات . أما الحدث A تحقق k مرة مع $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

03. خاصية:

احتمال تحقق k مرة بالضبط الحدث A بعد تكرار الاختبار n مرة متتالية وفي نفس الظروف هو : $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

مع $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ و $p = p(A)$

04. مثال :

نأخذ المثال السابق:

نحسب $p_{k=2}(A)$ الحدث A تحقق مرتين بعد إعادة الإختبار 3 مرات متتالية: لدينا حسب الخاصية:

$$p_{k=2}(A) = C_3^2 \times [p(A)]^2 \times [1-p(A)]^{3-1} = 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)$$

VI. المتغير العشوائي - قانون احتمالي :

A. متغير عشوائي

01. نشاط:

يحتوي كيس على 6 كرات مرقمة من 1 إلى 6. نسحب عشوائيا و تأنيا كرتين من الصندوق .

حدد عدد المرات التي نحصل فيها على رقم فردي بعد كل سحبة ؟

جواب : عدد المرات التي نحصل على عدد فردي هي 0 أو 1 أو 2.

02. مفردات:

العلاقة التي تربط كل عنصر ω_i (أي كل حدث أولي) من Ω بعدد الأرقام الفردية التي أعطتها السحبة ω_i تسمى متغير عشوائي ونرمز له ب : X أو Y أو Z ... وهذه العلاقة يمكن كتابتها كما يلي:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \rightarrow X(\omega) = x_i$$

- الأعداد : 0 ، 1 ، 2 : تسمى قيم المتغير العشوائي X ونرمز لها ب : $x_1 = 0$ و $x_2 = 1$ و $x_3 = 2$ (بصفة عامة x_i) وهي تكون مجموعة نرمز لها ب : $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$
- بصفة عامة $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$
- جميع الأحداث الأولية ω حيث $X(\omega) = x_i$ تكون مجموعة ضمن Ω إذن هي حدث ونرمز لهذا الحدث ب : $(X = x_i)$.
- إذن : $(X = x_i) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i\}$
- الكتابة : $p(X = x_i)$ تعني : احتمال الحصول على الحدث $(X = x_i)$.

B. قانون احتمال عشوائي:

01. نشاط: نأخذ النشاط السابق: لنعتبر الأحداث التالية:

A " ليس هناك رقم فردي " . نرمز له ب : $X = 0$ ومنه : احتمال الحدث A هو : $p(A) = p(X = 0)$

B " نحصل فقط على رقم واحد يكون فردي " . نرمز له ب : $X = 1$ ومنه احتمال الحدث B هو : $p(B) = p(X = 1)$

C " نحصل فقط على رقمين فرديين " . نرمز له ب : $X = 2$.

ومنه احتمال الحدث C هو : $p(C) = p(X = 2)$

02. مفردات:

حساب جميع الاحتمالات : $p(X = x_i)$ لكل x_i من $X(\Omega)$ يسمى قانون احتمال للمتغير العشوائي X .
نلخص قانون احتمال للمتغير العشوائي X في جدول.

03. مثال: نأخذ النشاط السابق:

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$p(X=0) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}$	$p(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_3^1}{C_6^2} = \frac{3}{5}$	$p(X=2) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}$

VII. الأمل الرياضي – المغايرة – الانحراف الطرازي:

01. تعاريف:

ليكن $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ مجموعة قيم المتغير العشوائي X . و $p_i = p(X=x_i)$ احتمالات قيم المتغير العشوائي X .

1. العدد : $\sum_{i=1}^n p(X=x_i) = x_1 \times p(X=x_1) + x_2 \times p(X=x_2) + \dots + x_n \times p(X=x_n)$ يسمى الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X ويرمز له ب : $E(X)$ أو أيضا ب : $\bar{X}$.

2. العدد : $V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 \times p(X=x_i)$

$= (x_1)^2 \times p(X=x_1) + (x_2)^2 \times p(X=x_2) + \dots + (x_n)^2 \times p(X=x_n) - [E(X)]^2$

3. يسمى المغايرة للمتغير العشوائي X . (ملحوظة: $V(X) \geq 0$ (عدد موجب))

4. العدد : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ يسمى الانحراف الطرازي للمتغير العشوائي X .

5. لكل $x \in \mathbb{R}$ نرمز للحدث $\{\omega \in \Omega / X(\omega) < x\}$ ب : $(X < x)$

$F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$

6. الدالة F المعرفة ب: $x \rightarrow F(x) = p(X < x)$ حيث :

$\forall x \in [x_i, x_{i+1}[$: $p(X < x) = p(X=x_1) + p(X=x_2) + \dots + p(X=x_i)$ تسمى دالة التجزئ للمتغير العشوائي X .

$x \in$	$]-\infty, x_1]$	$]x_1, x_2]$	$]x_2, x_3]$	...	$]x_{n-1}, x_n]$	$]x_n, +\infty[$
$F(x) =$	0	$p(X=x_1)$	$p(X=x_1) + p(X=x_2)$	...	$p(X=x_1) + p(X=x_2) + \dots + p(X=x_{n-1})$	1

02. ملحوظة : دالة التجزئ خارج المقرر

03. مثال:

نأخذ المثال السابق:

1. أعط قانون احتمال .

2. الأمل الرياضي .

3. المغايرة .

4. الانحراف الطرازي .

جواب: لنعتبر الجدول الآتي:

قيم المتغير العشوائي	X_i	0	1	2	المجموع
قانون احتمال X	$p(X=x_i)$	$p(X=0) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}$	$p(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_3^1}{C_6^2} = \frac{3}{5}$	$p(X=2) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}$	1
الأمّل الرياضي $E(X)$	$x_i \times p(X=x_i)$	$0 \times \frac{1}{5}$	$1 \times \frac{3}{5}$	$2 \times \frac{1}{5}$	$E(X) = \frac{0+3+2}{5} = 1$
لحساب المغايرة $V(X)$	$x_i^2 \times p(X=x_i)$	$0^2 \times \frac{1}{5}$	$1^2 \times \frac{3}{5}$	$2^2 \times \frac{1}{5}$	$\sum_{i=1}^n x_i^2 \times p(X=x_i) = \frac{0+3+4}{5} = \frac{7}{5}$

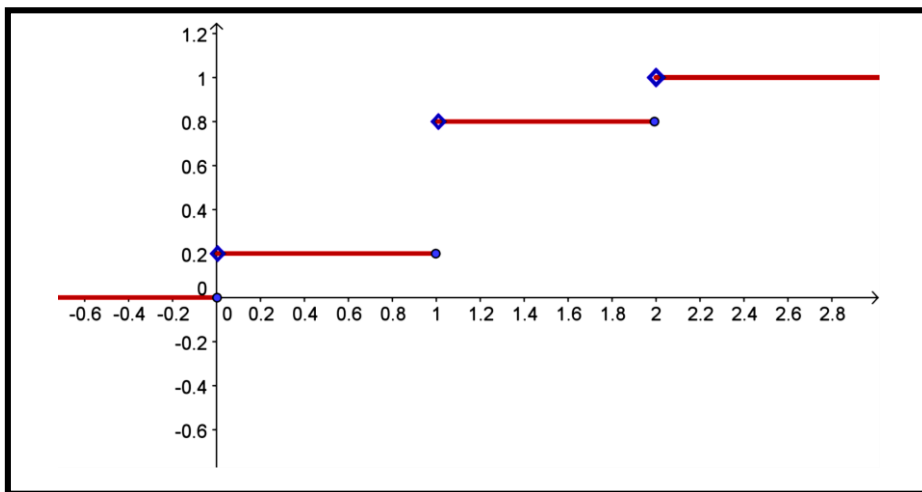
حسب الجدول :

* الأمّل الرياضي هو $E(X) = 1$

* المغايرة هي: $V(X) = \frac{7}{5} - (E(X))^2 = \frac{7}{5} - 1^2 = \frac{2}{5}$

* الانحراف الطرازي هو: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2}{5}}$

3. التمثيل المباني لدالة التجزيئ



VIII. التوزيع الحداني أو المتغير الحداني :

01. تعريف و خاصيات :

ليكن p هو احتمال الحدث A خلال تجربة واحدة. نعيد التجربة n مرة (في نفس الظروف) . ليكن X المتغير العشوائي الذي يهتم بعدد المرات التي نحصل فيها على الحدث A بعد n تجربة . لدينا :

- $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$.
- $\forall k \in X(\Omega) : p(X=k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$.
- المتغير العشوائي X يسمى قانون حداني واسطيه n و p .
- الأمّل الرياضي هو : $E(X) = np$.
- المغايرة هي : $V(X) = n \times p \times (1-p)$.