



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء



الصفحة

درس الأعداد العقدية الجزء 2

I. المعادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد في المجموعة $\mathbb{C}$.01. حل المعادلة: $z \in \mathbb{C} / z^2 = a$ مع a عدد حقيقي

❖ نشاط:

أ - حل المعادلة: $z \in \mathbb{C} / z^2 = 0$ ب - حل المعادلة: $z \in \mathbb{C} / z^2 = 2$ ج - حل المعادلة: $z \in \mathbb{C} / z^2 = -2$
 د - أعط الخاصية:

❖ خاصية:

ليكن a من $\mathbb{R}$. مجموعة حلول المعادلة: $z \in \mathbb{C} / z^2 = a$ هي:

- إذا كان: $a = 0$ $S = \{0\}$
- إذا كان: $a > 0$ $S = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$
- إذا كان: $a < 0$ $S = \{i\sqrt{-a}, -i\sqrt{-a}\}$

02. المعادلة $z \in \mathbb{C} / az^2 + bz + c = 0$ مع a و b و c من $\mathbb{R}$ (معاملاتها أعداد حقيقية) مع $a \neq 0$.

❖ نشاط:

03. خاصية و تعريف:

لنعتبر المعادلة: $(E): z \in \mathbb{C} / az^2 + bz + c = 0$ حيث a و b و c من $\mathbb{R}$ (معاملاتها أعداد حقيقية) مع $a \neq 0$.■ المعادلة (E) تسمى معادلة من الدرجة الثانية بمجهول z في $\mathbb{C}$ معاملاتها الأعداد الحقيقية a و b و c مع $a \neq 0$ ■ العدد الحقيقي $\Delta = b^2 - 4ac$ يسمى مميز المعادلة (E) .■ إذا كان $\Delta = 0$ المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا مزدوج $z = \frac{-b}{2a}$ ■ إذا كان $\Delta > 0$ المعادلة (E) تقبل حلين حقيقيين هما: $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.■ إذا كان $\Delta < 0$ المعادلة (E) تقبل حلين عقديين مترافقين و مختلفين هما: $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.■ لدينا: $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ و $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$.■ تعميل ل: $az^2 + bz + c$ هو $\Delta \neq 0$: $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ $\Delta = 0$: $az^2 + bz + c = a(z - z_1)^2$.

04. برهان:

لنعتبر المعادلة: $(F): z \in \mathbb{C} / az^2 + bz + c = 0$

$$az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

أ- لدينا و منه:

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0$$



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء



الصفحة

درس الأعداد العقدية الجزء 2

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \quad ; (a \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \quad ; (1)$$

حالة 1: $\Delta = 0$ نحصل على: $\Delta = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow (1)$ ومنه: المعادلة لها حل مزدوج هو $z = -\frac{b}{2a}$

حالة 2: $\Delta > 0$ بما أن $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ المعادلة لها حلين مختلفين هما: $z = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ أو $z = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

حالة 3: $\Delta < 0$ إذن $-\Delta > 0$ ومنه: $\Delta = -1 \times (-\Delta) = i^2 (\sqrt{-\Delta})^2 = (i\sqrt{-\Delta})^2$

$$(1) \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{(i\sqrt{-\Delta})^2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ أو } z + \frac{b}{2a} = -\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ أو } z = -\frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ أو } z = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

ومنه: المعادلة لها حلين هما: $z = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ أو $z = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ (حلين عقديين مترافقين).

05. مثال :

لنعتبر المعادلة التالية: $(E): z \in \mathbb{C} / z^2 + z + 1 = 0$

(1) أحسب: Δ المميز للمعادلة (E):

(2) حل المعادلة: $(E): z \in \mathbb{C} / z^2 + z + 1 = 0$.

(3) أعط الشكل المثلثي للحلين.

II. الشكل العقدي لبعض التحويلات في المستوى

01. مفردات :

المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

$$g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

• لنعتبر تطبيق f المعروف بما يلي: $z \mapsto f(z) = z'$

• M و M' نقطتين من (P) لحقهما على التوالي z و z'.

• التطبيق f في المستوى (P) الذي يربط كل نقطة $M_{(z)}$ بالنقطة $M_{(z')}$ يسمى تحويل المرتبط ب g.



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء



الصفحة

درس الأعداد العقدية الجزء 2

• الكتابة $z' = f(z)$ تسمى **الكتابة العقدية** للتحويل f .**02.** الكتابة العقدية لبعض التحويلات الهندسية :أ- الكتابة العقدية للإزاحة $f = t_{\vec{u}}$:

❖ خاصية :

الكتابة العقدية للإزاحة $t_{\vec{u}}$ ذات المتجهة $\vec{u}$ التي لحقها b هي $z' = z + b$ (أي $f(z) = z + b$).

❖ ملحوظة :

 $\vec{u} = \vec{0}$ نحصل على $z' = z$ أي $M = M'$ التحويل يصبح التطبيق المطابق في المستوى .

❖ مثال :

لنعتبر التحويل f الذي يربط كل نقطة $M_{(z)}$ بالنقطة $M_{(z')}$ حيث : $z' = z + 2 - 3i$.التحويل هو إزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ التي لحقها $b = 2 - 3i$ (أي $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$) .ب- الكتابة العقدية للتحاكي $f = h(\Omega, k)$:

❖ خاصية :

الكتابة العقدية للتحاكي الذي مركزه Ω التي لحقها ω ونسبته عدد حقيقي k غير منعدم و يخالف 1 هو : $z' - \omega = k(z - \omega)$.أو أيضا : $z' = kz + b$ (مع $b = k\omega + \omega \in \mathbb{C}$) (أي $f(z) = kz + b$ مع $k \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$) .

❖ ملحوظة :

النقط Ω ولحقها ω صامدة بالتحويل تحقق ما يلي: $\omega = k\omega + b$ إذن : $\omega = \frac{b}{1-k}$.

❖ مثال :

لنعتبر التحويل f الذي يربط كل نقطة $M_{(z)}$ بالنقطة $M_{(z')}$ حيث : $z' = 2z + 1 + i$.لدينا : الكتابة العقدية هي على شكل : $z' = kz + b$ مع $k = 2 \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ إذن التحويل هو تحاكي نسبته $k = 2$ و مركزه $\Omega_{(\omega)}$ حيث : $\omega = \frac{b}{1-k} = \frac{1+i}{1-2} = -1-i$.**خلاصة:** التحويل هو التحاكي: $h(\Omega_{(\omega=-1-i)}, 2)$ (المركز هو النقطة $\Omega(-1, -1)$)ج- الكتابة العقدية للدوران $f = r(\Omega, \theta)$

❖ خاصية :

الكتابة العقدية للدوران الذي مركزه Ω التي لحقها ω وزاويته θ هو : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.أو أيضا : $z' = ze^{i\theta} + b$ (مع $b = \omega - \omega e^{i\theta} \in \mathbb{C}$) (أي $f(z) = ze^{i\theta} + b$) .❖ ملحوظة : بالنسبة للتطبيق : $f(z) = ze^{i\theta} + b$ • المركز هو : النقط Ω ولحقها ω صامدة بالتحويل تحقق ما يلي: $\omega = \omega e^{i\theta} + b$ إذن : $\omega = \frac{b}{1-e^{i\theta}}$.



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء



الصفحة

درس الأعداد العقدية الجزء 2

• قياس زاويته هو : $\theta \equiv \arg(e^{i\theta}) (2\pi)$ أو أيضا : $\theta \equiv \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) (2\pi)$.

❖ مثال :

نعتبر التحويل f الذي يربط كل نقطة $M_{(z)}$ بالنقطة $M_{(z')}$ حيث : $z' = -iz + 1 - i$.

لدينا : $z' = -iz + 1 - i = e^{i\pi}z + (1 - i)$ الكتابة العقدية هي على شكل : $z' = ze^{i\theta} + b$

التحويل هو الدوران الذي :

لحق مركزه $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1-i}{1+i} = -i$ ومنه : المركز هي النقطة $\Omega_{(\omega=-i)}$ أو أيضا $\Omega(0, -1)$.

قياسات زاويته : $\arg(e^{i\theta}) \equiv \arg(-i) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

خلاصة: التحويل هو الدوران : $r\left(\Omega_{(\omega=-i)}, -\frac{\pi}{2}\right)$ (مركزه هي النقطة $\Omega(0, -1)$)

د- تمرين تطبيقي :

من بين الكتابات العقدية التالية حدد طبيعة التحويلات و حدد عناصرها المميزة .

1. $z' = -4z - 2 + 5i$

2. $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z - 4 + 2i$

جواب :

1. بالنسبة ل : $z' = -3z - 8 + 12i$

لدينا : الكتابة العقدية هي على شكل : $z' = kz + b$ مع $k = -4 \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ إذن التحويل هو تحاكي نسبته $k = -3$.

مركزه : $\Omega_{(\omega)}$ نقطة صامدة إذن $\Omega = \Omega'$ ومنه $\omega' = \omega$ و بالتالي : $\omega = -3\omega - 8 + 12i$ ومنه :

$$\left(\omega = \frac{b}{1-k} = \frac{-8+12i}{1+3} = -2+3i\right) \quad \left(\omega = \frac{-8+12i}{4} = -2+3i\right) \quad \text{(يمكنك استعمال العلاقة)}$$

خلاصة: التحويل هو التحاكي نسبته $k = -3$ و مركزه Ω التي لحقها $\omega = -2 + 3i$.

2. بالنسبة ل : $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z - 4 + 2i$

لدينا : $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z - 4 + 2i = \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)z - 4 + 2i = e^{i\frac{\pi}{6}}z - 4 + 2i$

$$z' = ze^{i\theta} + b$$

التحويل هو الدوران الذي :

$$\text{لحق مركزه } \omega = \frac{b}{1-e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{-4+2i}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)} = -4 - \sqrt{3} - (3+2\sqrt{3})i$$

أو أيضا $\Omega(-4 - \sqrt{3}; -(3+2\sqrt{3}))$.

$$\arg(e^{i\theta}) \equiv \arg\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

خلاصة: التحويل هو الدوران : و مركزه Ω التي لحقها $\omega = -4 - \sqrt{3} - (3+2\sqrt{3})i$ وزاويته $\frac{\pi}{6}$.



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء



الصفحة

درس الأعداد العقدية الجزء 2

ملخص لبعض التحويلات :

طبيعة التحويل : f	العناصر المميزة	تعريف التحويل مع : $f(M) = M'$	الكتابة العقدية ل f مع $M'_{(z')}$ و $M_{(z)}$
إزاحة : $f = t_{\vec{u}}$	متجهة معلومة $\vec{u}$ غير منعدمة لحقها b	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' - z = b$ أي $z' = z + b$
تحاكي : $f = h(\Omega, k)$	- نقطة Ω صامدة لحقها ω - عدد حقيقي k غير منعدم	$\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = k(z - \omega)$ أي $z' = kz + b$ (مع $b = k\omega + \omega \in \mathbb{C}$)
دوران : $f = r(\Omega, \alpha)$	- نقطة Ω صامدة لحقها ω - زاوية موجهة قياسها α بترديد 2π	$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) \equiv \alpha \pmod{2\pi} \end{cases}$	$z' - \omega = (z - \omega)e^{i\alpha}$ أي $z' - \omega = e^{i\alpha}z + b$ (مع $b = \omega - \omega e^{i\alpha}$)

ملحوظة بالنسبة للدوران :

لدينا :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) \equiv \alpha \pmod{2\pi} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \alpha \pmod{2\pi} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \alpha \pmod{2\pi} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = [1, \alpha] = e^{i\alpha} \\
 &\Leftrightarrow z' - \omega = (z - \omega)e^{i\alpha}
 \end{aligned}$$