



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ



الصفحة

تمارين : الأعداد العقدية الجزء (2)

01.

01. نحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 4z + 13 = 0$.
- نحسب المميز Δ : لدينا : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 13 = -36 = i^2 \times 6^2 = (6i)^2$
 - حلي المعادلة هما : $z_1 = \frac{4+6i}{2} = 2+3i$ و $z_2 = \bar{z}_1 = 2-3i$

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة : $S = \{2+3i; 2-3i\}$

02. لكل عدد عقدي z نضع $P(z) = z^3 - 6z^2 + 21z - 26$

أ- نحسب $P(2)$.

لدينا : $P(2) = 2^3 - 6 \times 2^2 + 21 \times 2 - 26 = 0$. خلاصة : $P(2) = 0$

- ب- نحدد a و b من $\mathbb{R}$ حيث : $P(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$ ثم حل المعادلة : $P(z) = 0$: $z \in \mathbb{C}$.
- نحدد a و b من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$\begin{aligned} P(z) = (z-2)(z^2 + az + b) &\Leftrightarrow z^3 - 6z^2 + 21z - 26 = (z-2)(z^2 + az + b) \\ &\Leftrightarrow z^3 - 6z^2 + 21z - 26 = z^3 + az^2 + bz - 2z^2 - 2az - 2b \\ &\Leftrightarrow z^3 - 6z^2 + 21z - 26 = z^3 + (a-2)z^2 + (b-2a)z - 2b \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a-2 = -6 \\ b-2a = 21 \\ -2b = -26 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 13 \end{cases} \end{aligned}$$

و منه : $a = -4$ و $b = 13$

• نحل المعادلة :

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2)(z^2 - 4z + 13) = 0$$

$$\Leftrightarrow z-2=0 \text{ أو } (z^2 - 4z + 13) = 0$$

$$\Leftrightarrow z=2 \text{ أو } z=2-3i \text{ أو } z=2+3i$$

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة : $S' = \{2; 2+3i; 2-3i\}$

02. باك 2015 الدورة العادية

01. نحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 + 10z + 26 = 0$ (0,75 ن)

- نحسب المميز Δ : لدينا : $\Delta = 10^2 - 4 \times 1 \times 26 = -4 = i^2 \times 2^2 = (2i)^2$
- حلي المعادلة هما : $z_1 = \frac{-10+2i}{2} = -5+i$ و $z_2 = \bar{z}_1 = -5-i$

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة : $S = \{-5+i; -5-i\}$



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ



الصفحة

تمارين : الأعداد العقدية الجزء (2)

02. نعتبر ، في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ النقط A و B و C و Ω التي

الحاقها على التوالي هي a و b و c و ω حيث : $a = -2 + 2i$ و $b = -5 + i$ و $c = -5 - i$ و $\omega = -3$.

أ- نبين أن : $\frac{b - \omega}{a - \omega} = i$ (0,5 ن)

لدينا : $\frac{b - \omega}{a - \omega} = \frac{-5 + i - (-3)}{-2 + 2i - (-3)} = \frac{-2 + i}{1 + 2i} = \frac{i(2i + 1)}{1 + 2i} = i$ **خلاصة :** $\frac{b - \omega}{a - \omega} = i$

ب- نستنتج طبيعة المثلث ΩAB (0,5 ن)

بما أن : $\frac{b - \omega}{a - \omega} = i$ إذن $\frac{\Omega B}{\Omega A} = |i| = 1$ و $\frac{\Omega B}{\Omega A} = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ $\arg\left(\frac{b - \omega}{a - \omega}\right) = \arg i = \frac{\pi}{2}$ $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \equiv \arg\left(\frac{b - \omega}{a - \omega}\right) = \arg i = \frac{\pi}{2}$

خلاصة : المثلث ΩAB متساوي الساقين وقائم الزاوية في Ω .

03. لتكن D صورة النقطة C بالإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}$ التي لحقها $6 + 4i$.

أ- نبين أن : d لحق للنقطة D هو $1 + 3i$ (0,5 ن)
لدينا :

$$T(C) = D \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow Z_{CD} = Z_{\vec{u}}$$

$$\Leftrightarrow Z_D - (-5 - i) = 6 + 4i$$

$$\Leftrightarrow Z_D = -5 - i + 6 + 4i$$

$$\Leftrightarrow Z_D = 1 + 3i$$

خلاصة : لحق للنقطة D هو $d = 1 + 3i$.

ب- نبين أن : $\frac{b - d}{a - d} = 2$ واستنتج أن النقطة A هي منتصف القطعة [BD] (0,5 ن)
• نبين أن :

لدينا : $\frac{b - d}{a - d} = \frac{-5 + i - (1 + 3i)}{-2 + 2i - (1 + 3i)} = \frac{-6 - 2i}{-3 - i} = \frac{2(-3 - i)}{-3 - i} = 2$

خلاصة : $\frac{b - d}{a - d} = 2$

• نستنتج أن النقطة A هي منتصف القطعة [BD].

من خلال : $\frac{b - d}{a - d} = 2$ فإن : $b - d = 2(a - d)$ أي $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DA}$ أي $\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ و منه : A هي منتصف القطعة [BD].

خلاصة : النقطة A هي منتصف القطعة [BD].

03. باك 2015 الدورة الاستدراكية

01. أ- نحل في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة : $z^2 - 8z + 32 = 0$ (0,75 ن)

• نحسب المميز Δ : لدينا : $\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times 32 = -64 = i^2 \times 8^2 = (8i)^2$



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ



الصفحة

تمارين : الأعداد العقدية الجزء (2)

- حل المعادلة هما : $z_1 = \frac{8+8i}{2} = 4+4i$ و $z_2 = \bar{z}_1 = 4-4i$

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة : $S = \{4+4i; 4-4i\}$

- ب -** نعتبر العدد العقدي d حيث : $a = 4+4i$. نكتب العدد العقدي على الشكل المثلثي ثم استنتج أن a^{12} عدد حقيقي سالب. (0,75 ن)
- نكتب العدد العقدي على الشكل المثلثي :

$$a = 4+4i = 4(1+i) = [4, 0] \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right] = \left[4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right]$$

- نستنتج أن a^{12} عدد حقيقي سالب : لدينا :

$$a^{12} = \left[4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right]^{12} = \left[(4\sqrt{2})^{12}, 12 \times \frac{\pi}{4} \right] = [4^{15}, 3\pi] = [4^{15}, \pi] = 4^{15} (\cos(\pi) + i \sin(\pi)) = 4^{15} \times (-1) = -4^{15} \in \mathbb{R}^-$$

خلاصة : الشكل المثلثي ل d هو $a = \left[4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right]$ ثم $a^{12} = -4^{15} \in \mathbb{R}^-$

02. نعتبر ، في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر $(0, \vec{u}, \vec{v})$ النقط A و B و C التي ألحاقها على

التوالي هي d و b و c حيث : $a = 4+4i$ و $b = 2+3i$ و $c = 3+4i$.

ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ - بين أن : $z' = iz + 7 + i$ (0,5 ن)

لدينا : الشكل العقدي للدوران هو : $z' - \omega = (z - \omega)e^{i\theta}$ مع ω هو لحق مركز الدوران و θ هو قياس زاوية الدوران :
و منه :

$$z' - (3+4i) = (z - (3+4i))e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z' = 3+4i + (z - (3+4i))i$$

$$z' = 3+4i + zi - 3i + 4$$

$$z' = iz + 7 + i$$

خلاصة : $z' = iz + 7 + i$

ب - نتحقق أن : d لحق النقطة D صورة النقطة A بالدوران R هو $3+5i$ (0,5 ن)
لدينا :

$$R(A) = D \Leftrightarrow d = ia + 7 + i$$

$$\Leftrightarrow d = i(4+4i) + 7 + i$$

$$\Leftrightarrow d = 5i + 3$$

خلاصة : d لحق النقطة D صورة النقطة A بالدوران R هو $3+5i$.

ج - نبين أن : مجموعة النقط M ذات اللحق z حيث $|z-3-5i| = |z-4-4i|$ هي المستقيم (BC) (0,5 ن)

لدينا : $MD = MA \Leftrightarrow |z-3-5i| = |z-4-4i|$ وهذا يكافئ النقطة M تنتمي للمستقيم (Δ) لواسط [AD]

إذن نبين أن $(\Delta) = (BC)$ أي نبين أن $B \in (\Delta)$ و $C \in (\Delta)$.



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ



الصفحة

تمارين : الأعداد العقدية الجزء (2)

• بالنسبة ل : $B \in (\Delta)$

لدينا :

$$|b-3-5i| = |2+3i-3-5i| = |-1-2i| = \sqrt{5}$$

$$|b-4-4i| = |2+3i-4-4i| = |-2-i| = \sqrt{5}$$

ومنه : $|b-3-5i| = |b-4-4i|$ ومنه $B \in (\Delta)$

• بالنسبة ل : $C \in (\Delta)$

لدينا :

$$|c-3-5i| = |3+4i-3-5i| = |-i| = 1$$

$$|c-4-4i| = |3+4i-4-4i| = |-1| = 1$$

ومنه : $|c-3-5i| = |c-4-4i|$ ومنه $C \in (\Delta)$

ومنه : $(\Delta) = (BC)$

خلاصة : مجموعة النقط M ذات اللحق z حيث $|z-3-5i| = |z-4-4i|$ هي المستقيم (BC).

طريقة 2 :

• نبين أن : $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AD}$

$$Z_{\overrightarrow{BC}} = c - b = 3 + 4i - 2 - 3i = 1 + i$$

إذن $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $Z_{\overrightarrow{AD}} = d - a = 3 + 5i - 4 - 4i = -1 + i$ ومنه : $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0$$

ومنه : $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AD}$ وبالتالي

نبين أن : $BD = BA$

$$BD = |d - b| = |3 + 5i - 2 - 3i| = |1 + 2i| = \sqrt{5}$$

$$BA = |a - b| = |4 + 4i - 2 - 3i| = |2 + i| = \sqrt{5}$$

ومنه : $BD = BA$ إذن المثلث متساوي الساقين في B و $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AD}$ إذن (BC) ارتفاع ومنه (BC) واسط القطعة [AD] إذن

(BC) هو مجموعة النقط M ذات اللحق z حيث $|z-3-5i| = |z-4-4i|$

خلاصة : مجموعة النقط M ذات اللحق z حيث $|z-3-5i| = |z-4-4i|$ هي المستقيم (BC).

طريقة 3 :

$$|z-3-5i| = |z-4-4i| \Leftrightarrow MD = MA$$

$$\Leftrightarrow (-3-x)^2 + (-5-y)^2 = (-4-x)^2 + (-4-y)^2$$

$$\Leftrightarrow 9 + 6x + x^2 + 25 + 10y + y^2 = 16 + 8x + x^2 + 16 + 8y + y^2$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y + 1 = 0$$

مجموعة النقط هي المستقيم (Δ) الذي معادلته الديكارتية هي $x - y + 1 = 0$ منظمة عليه هي $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

لدينا : $Z_{\overrightarrow{BC}} = c - b = 3 + 4i - 2 - 3i = 1 + i$ إذن $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ومنه : $\overrightarrow{BC}$ منظمة على (Δ)



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ



الصفحة

تمارين : الأعداد العقدية الجزء (2)

ولدينا $b = 2 + 3i$ إذن $B \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ تحقق المعادلة $x - y + 1 = 0$ وبالتالي $B \in (\Delta)$ و بالتالي $(\Delta) = (BC)$

خلاصة : مجموعة النقط M ذات اللحق z حيث $|z - 3 - 5i| = |z - 4 - 4i|$ هي المستقيم (BC) طريقة 4 :

$$|z - 3 - 5i| = |z - 4 - 4i| \Leftrightarrow MD = MA$$

$$\Leftrightarrow (-3 - x)^2 + (-5 - y)^2 = (-4 - x)^2 + (-4 - y)^2$$

$$\Leftrightarrow 9 + 6x + x^2 + 25 + 10y + y^2 = 16 + 8x + x^2 + 16 + 8y + y^2$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y + 1 = 0$$

مجموعة النقط هي المستقيم (Δ) الذي معادلته الديكارتية هي $x - y + 1 = 0$ من جهة أخرى :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (BC) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{BC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ y-3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 - y + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y + 1 = 0$$

ومنه : $(\Delta) = (BC)$

خلاصة : مجموعة النقط M ذات اللحق z حيث $|z - 3 - 5i| = |z - 4 - 4i|$ هي المستقيم (BC)

04.

المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0, \vec{u}, \vec{v})$ (وحدة القياس هي 4 cm) .

لنعتبر النقطه A التي لحقها $z_A = i$ والنقطه B التي لحقها $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

01. لنعتبر الدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$. نضع $r(B) = C$.

أ- نحدد كتابة عقدية للدوران r .

لدينا : الشكل العقدي للدوران هو : $z' - \omega = (z - \omega)e^{i\theta}$ مع ω هو لحق مركز الدوران و θ هو قياس زاوية الدوران :
ومنه :

$$z' - 0 = (z - 0)e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z' = z \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)$$

$$z' = z \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ



الصفحة

تمارين : الأعداد العقدية الجزء (2)

خلاصة : كتابة عقدية للدوران r $z' = z \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

بـ نبين أن : لحق النقطة C هو $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$ لدينا :

$$\begin{aligned} r(B) = C &\Leftrightarrow c = e^{-i\frac{5\pi}{6}} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &\Leftrightarrow c = e^{-i\frac{5\pi}{6}} e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \left(j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &\Leftrightarrow c = e^{i\frac{-5\pi+4\pi}{6}} \\ &\Leftrightarrow c = e^{-i\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

خلاصة : لحق النقطة C هو $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

جـ نكتب : z_C و z_B على الشكل الجبري .

• لدينا : $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

• لدينا : $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

• **خلاصة :** الشكل الجبري ل : $z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ و $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

دـ ننشئ النقط A و B و C .

02 .نعتبر D مرجح النقط A و B و C معينة بالأوزان 2 و -1 و 2 على التوالي .

أـ نبين أن : لحق D هو $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ثم أنشئ النقطة D .

لدينا : D مرجح النقط A و B و C معينة بالأوزان 2 و -1 و 2 على التوالي ومنه : $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2-1+2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

$$z_D = \frac{2z_A - z_B + 2z_C}{2-1+2} = \frac{1}{3} \left(2i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

ومنه : $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

خلاصة : لحق D هو $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

بـ نبين أن النقط A و B و C و D تنتمي لنفس الدائرة .

نلاحظ أن : $|z_A| = |i| = 1$ و $|z_B| = \left| e^{-i\frac{5\pi}{6}} \right| = 1$ و $|z_C| = \left| e^{-i\frac{\pi}{6}} \right| = 1$ و $|z_D| = \left| \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right| = 1$ ومنه النقط A و B و C

و D تنتمي لنفس الدائرة التي مركزها O أصل المعلم و شعاعها 1 .



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ



الصفحة

تمارين : الأعداد العقدية الجزء (2)

خلاصة: النقط A و B و C و D تنتمي لنفس الدائرة التي مركزها O أصل المعلم و شعاعها 1 .

03. لنعتبر التحاكي h الذي مركزه A ونسبته 2 ؛ نضع $h(D) = E$.

أ- نحدد كتابة عقدية للتحاكي h .
لدينا :

$$\begin{aligned} h(M) = M' &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AM} \\ &\Leftrightarrow z' - i = 2(z - i) \\ &\Leftrightarrow z' = 2z - i \end{aligned}$$

خلاصة: الكتابة عقدية للتحاكي h هي : $z' = 2z - i$.

ب- نبين أن : لحق E هو $z_E = \sqrt{3}$ ثم أنشئ النقطة E .

$$h(D) = E \Leftrightarrow z_E = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - i = \sqrt{3}$$

خلاصة: لحق E هو $z_E = \sqrt{3}$.

04. **أ-** نحسب النسبة $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$ ثم إعطاء الشكل الأسى .

$$\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)}{\sqrt{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)} = \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

• إعطاء الشكل الأسى :

$$\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ و } \frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ : خلاصة}$$

ب- نستنتج طبيعة المثلث CDE .

$$\text{من خلال } \frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ إذن : } \left|\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}\right| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1 \text{ و منه } DC = EC \text{ و}$$

$$\left(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CE}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

خلاصة: المثلث CDE متساوي الأضلاع .

05.

المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0, \vec{u}, \vec{v})$ (وحدة القياس هي 2 cm) .

لنعتبر النقط I و A و B ألقاها $z_I = 1$ و $z_A = 1 - 2i$ و $z_B = -2 + 2i$ على التوالي و الدائرة (C) التي قطرها [AB] .



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ



الصفحة

تمارين : الأعداد العقدية الجزء (2)

01. نحدد المركز Ω و الشعاع للدائرة (C) .

• المركز Ω هو منتصف [AB] ومنه $z_{\Omega} = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{z_A = 1 - 2i - 2 + 2i}{2} = \frac{-1}{2}$

• الشعاع هو : $r = \frac{AB}{2} = \frac{|z_B - z_A|}{2} = \frac{|-2 + 2i - 1 + 2i|}{2} = \frac{|-3 + 4i|}{2} = \frac{5}{2}$

خلاصة : المركز Ω لحقه هو $z_{\Omega} = \frac{1}{2}$ و الشعاع للدائرة $r = \frac{5}{2}$ (C) .

02. نعتبر النقطة D التي لحقها $z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$

• نعطي الشكل الجبري ل z_D

$$z_D = \frac{3+9i}{4+2i} = \frac{(3+9i)(4-2i)}{20} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

• نثبت أن D تنتمي للدائرة (C) .

لدينا : $\Omega D = r$ و $\Omega D = |z_D - z_{\Omega}| = \left| \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{1}{2} \right| = \left| 2 + \frac{3}{2}i \right| = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2} = r$

خلاصة : D تنتمي للدائرة (C) .

03. على الدائرة (C) ؛ نعتبر النقطة E التي لحقها z_E حيث قياس بالريديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega E})$ هو $\frac{\pi}{4}$.

أ- نحدد المعيار و عمدة ل $z_E + \frac{1}{2}$.

لدينا :

• النقطة E التي لحقها z_E حيث قياس بالريديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega E})$ هو $\frac{\pi}{4}$ و منه :

• المعيار هو : $\Omega E = \left| z_E + \frac{1}{2} \right|$ و لدينا : $\Omega E = r = \frac{5}{2}$ و منه : $\left| z_E + \frac{1}{2} \right| = \frac{5}{2}$

• عمدة : لدينا :

$$(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega E}) = \frac{\pi}{4} [2\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_E - z_{\Omega}}{z_I - z_{\Omega}}\right) \equiv \arg\left(z_E + \frac{1}{2}\right) - \arg\left(\frac{3}{2}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \Leftrightarrow \arg\left(z_E + \frac{1}{2}\right) - 0 \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

ومنه : $\arg\left(z_E + \frac{1}{2}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

خلاصة : المعيار $z_E + \frac{1}{2}$ هو $\frac{5}{2}$ و عمدة ل $z_E + \frac{1}{2}$ هو $\arg\left(z_E + \frac{1}{2}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

ب- نستنتج أن $z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$

من خلال : المعيار $z_E + \frac{1}{2}$ هو $\frac{5}{2}$ و عمدة ل $z_E + \frac{1}{2}$ هو $\arg\left(z_E + \frac{1}{2}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ الشكل المثلثي هو $z_E + \frac{1}{2} = \left[\frac{5}{2}; \frac{\pi}{4} \right]$



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ



الصفحة

تمارين : الأعداد العقدية الجزء (2)

ومنه $z_E + \frac{1}{2} = \left[\frac{5}{2}; \frac{\pi}{4} \right] = \frac{5}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \frac{5\sqrt{2}}{4} + i \frac{5\sqrt{2}}{4}$ ومنه :

$$z_E = \frac{5\sqrt{2}}{4} + i \frac{5\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4} i$$

خلاصة : $z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4} i$

04. نعتبر التحويل r من المستوى (P) نحوى المستوى (P') الذي يربط كل نقطة M التي لحقها z بالنقطة M' التي لحقها z'

حيث : $z' + \frac{1}{2} = \left(z + \frac{1}{2} \right) e^{i\frac{\pi}{4}}$

أ- نحدد طبيعة التحويل r و عناصره المميزة .

التحويل هو على شكل : $z' - \omega = (z - \omega) e^{i\theta}$ إذن التحويل هو دوران مع $\omega = -\frac{1}{2}$ هو لحق مركز الدوران و $\theta = \frac{\pi}{4}$ هو قياس زاوية الدوران :

ب- لتكن النقطة K التي لحقها $z_K = 2$. بالحساب حدد صورة K ب r .

• بالحساب حدد صورة K ب r

نعتبر K' لحقها k' صورة K ب r .
ومنه :

$$r(K) = K' \Leftrightarrow z' + \frac{1}{2} = \left(z + \frac{1}{2} \right) e^{i\frac{\pi}{4}} ; (z = 2 ; z' = k')$$

$$\Leftrightarrow k' + \frac{1}{2} = \left(2 + \frac{1}{2} \right) e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow k' = \left(\frac{5}{2} \right) e^{i\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow k' = \frac{5}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) - \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{4} + i \frac{5\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow k' = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4} i = z_E$$

ومنه: صورة K هي K' التي لحقها z_E $k' = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4} i$

