



01.

نكتب  $z$  على شكل  $a+bi$  مع  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{R}$  حيث :  $z = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$  ؛

$$. z = 2 + 6i - (-5 + 7i) + 2 + 5 + 6i - 7i = 7 - i$$

$$. z = (1 - 2i)(2 - 5i) = 1 \times 2 + 1 \times (-5i) - (2i) \times 2 - (2i) \times (-5i) = 2 - 5i - 4i - 10 = -8 - 9i$$

$$. z = 2i(1 - 2i)(1 - 2i) = 2i(1 + 2i)(1 - 2i) = 2i(1^2 - (2i)^2) = 2i + 2i \times 4 = 10i$$

$$. z = (1 + 3i)^2(-5 + 7i) = (1 + 2 \times 3i - 9)(-5 + 7i) = (-8 + 6i)(-5 + 7i) = 40 - 56i - 30i - 42 = -2 - 86i$$

$$. 3i - \frac{7}{i} = 3i - \frac{7 \times (-i)}{i \times (-i)} = 3i - \frac{-7i}{1} = 3i + 7i = 10i$$

$$. z = \frac{8}{2 - 3i} = \frac{8(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{16 + 24i}{2^2 + 3^2} = \frac{16}{13} + \frac{24}{13}i$$

$$. z = \frac{1}{2 - 7i} + \frac{1}{2 + 7i} = \frac{1 \times (2 + 7i) + 1 \times (2 - 7i)}{(2 - 7i)(2 + 7i)} = \frac{4}{2^2 + 7^2} = \frac{4}{53}$$

$$. z = \frac{8i - 1}{2 - 3i} = \frac{(8i - 1)((2 + 3i))}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{16i - 24 - 2 - 3i}{2^2 + 3^2} = \frac{-26 + 13i}{13} = -2 + i$$

$$. z = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}\right)^2 = \left(\frac{2+2i+2i-1}{2^2+1}\right)^2 = \left(\frac{1+4i}{5}\right)^2 = \frac{1-16+8i}{25} = \frac{-15}{25} + \frac{8}{25}i$$

02.

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم لحق النقطة  $M$  هو العدد العقدي  $z = x + yi$  مع  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}$  نربط كل عدد

$$. Z = \frac{z - 2 - i}{z + i} \text{ عقدي } z \text{ حيث } z \neq -i \text{ بالعدد العقدي}$$

01. حدد :  $\text{Re}(Z)$  و  $\text{Im}(Z)$ .

• نحسب :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{z - 2 - i}{z + i} = \frac{x + yi - 2 - i}{x + yi + i} = \frac{(x - 2 + (y - 1)i)}{(x + (y + 1)i)} = \frac{((x - 2 + (y - 1)i))(x - (y + 1)i)}{(x + (y + 1)i)((x - (y + 1)i))} \\ &= \frac{(x - 2)x + (y - 1)(y + 1) + ((x - 2)(-y - 1) + (y - 1)x)i}{x^2 + (y + 1)^2} = \frac{x^2 - 2x + y^2 - 1}{x^2 + (y + 1)^2} + \frac{(x - 2)(-y - 1) + (y - 1)x}{x^2 + (y + 1)^2}i \\ &= \frac{x^2 - 2x + y^2 - 1}{x^2 + (y + 1)^2} + \frac{2y - x + 2}{x^2 + (y + 1)^2}i \end{aligned}$$



سلسلة رقم

تصحيح تمارين : الأعداد العقدية الجزء (1)



الصفحة

خلاصة : و  $\text{Im}(Z) = \frac{(x-2)(-y-1) + (y-1)x}{x^2 + (y+1)^2} = \frac{2y-x+2}{x^2 + (y+1)^2}$

02. حدد مجموعة النقط M من المستوي  $\text{Re}(Z) = \frac{x^2 - 2x + y^2 - 1}{x^2 + (y+1)^2}$  وى حيث يكون :

أ  $Z$  عددا حقيقيا يكافئ :  $\text{Im}(Z) = \frac{2y-x+2}{x^2 + (y+1)^2} = 0$

يكافئ :  $2y - x + 2 = 0$

و هي تمثل معادلة ديكارتية لمستقيم

خلاصة : مجموعة النقط M من المستوي حيث يكون  $Z$  عددا حقيقيا هي المستقيم الذي معادلة ديكارتية له هي :  $2y - x + 2 = 0$

ب  $Z$  عددا تخيليا صرفا يكافئ  $\text{Re}(Z) = \frac{x^2 - 2x + y^2 - 1}{x^2 + (y+1)^2} = 0$

يكافئ  $\frac{(x-1)^2 + (x-0)^2 - 2}{x^2 + (y+1)^2}$

يكافئ  $(x-1)^2 + (x-0)^2 - 2 = 0$

يكافئ  $(x-1)^2 + (x-0)^2 = 2 = \sqrt{2}^2$

و هي تمثل معادلة ديكارتية لدائرة مركزها النقطة  $\Omega$  التي لحقها  $z_{\Omega} = 1$  و شعاعها  $r = \sqrt{2}$

خلاصة : مجموعة النقط M من المستوي حيث يكون  $Z$  عددا تخيليا صرفا هي الدائرة التي مركزها النقطة  $\Omega$  التي لحقها  $z_{\Omega} = 1$

شعاعها  $r = \sqrt{2}$

ج  $|Z| = \sqrt{2}$  أي :  $Z = \left| \frac{z-2-i}{z+i} \right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|z-2-i|}{|z+i|} = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |x-2+(y-1)i| = \sqrt{2}|x+(y+1)i|$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2(x^2 + (y+1)^2)$

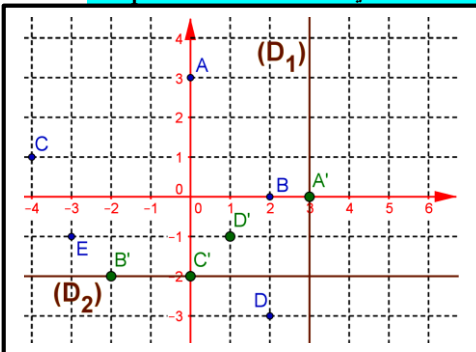
$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 2x^2 + 2y^2 + 4y + 2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x + 4y + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+2)^2 = \sqrt{5}^2$

خلاصة : مجموعة النقط M من المستوي حيث يكون  $|Z| = \sqrt{2}$  هي الدائرة التي مركزها النقطة I التي لحقها  $z_I = -2-2i$  و

شعاعها  $r = \sqrt{5}$



03.

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

01. نعطي ألق النقط A و B و C و D و E.

هي على التوالي:  $z_A = 3i$  و  $z_B = 2$  و  $z_C = -4+i$  و  $z_D = 2-3i$  و  $z_E = -3-i$

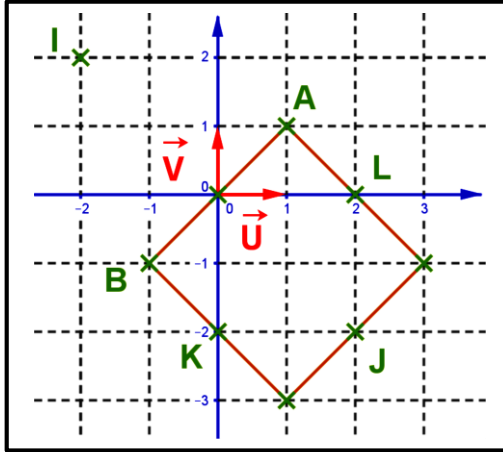


02. ننشئ النقط  $A'$  و  $B'$  و  $C'$  و  $D'$  التي الحاقها 3 و  $-2-2i$  و  $-2i$  و  $1-i$ .

03. في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

نحدد مبيانيا معيار وعمدة للحق كل نقطة من النقطة التالية :

- بالنسبة ل  $A$  : المعيار هو  $|z_A| = \sqrt{2}$  العمدة هي  $\frac{\pi}{4} [2\pi]$   $\arg(z_A) \equiv \frac{\pi}{4}$
- بالنسبة ل  $B$  : المعيار هو  $|z_B| = \sqrt{2}$  العمدة هي  $\frac{-3\pi}{4} [2\pi]$   $\arg(z_B) \equiv \frac{-3\pi}{4}$
- بالنسبة ل  $I$  : المعيار هو  $|z_I| = 2\sqrt{2}$  العمدة هي  $\frac{3\pi}{4} [2\pi]$   $\arg(z_I) \equiv \frac{3\pi}{4}$
- بالنسبة ل  $J$  : المعيار هو  $|z_J| = 2\sqrt{2}$  العمدة هي  $\frac{-\pi}{4} [2\pi]$   $\arg(z_J) \equiv \frac{-\pi}{4}$
- بالنسبة ل  $K$  : المعيار هو  $|z_K| = 2$  العمدة هي  $\frac{-\pi}{2} [2\pi]$   $\arg(z_K) \equiv \frac{-\pi}{2}$
- بالنسبة ل  $L$  : المعيار هو  $|z_L| = 2$  العمدة هي  $0 [2\pi]$   $\arg(z_L) \equiv 0$



04.

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  نعتبر النقط حيث :

01.  $A_{(z_A=1+i\sqrt{3})}$  و  $B_{(z_B=-1-i)}$  و  $C_{(z_C=3-i)}$  . حدد طبيعة المثلث ABC .

- لدينا :  $AB = |z_B - z_A| = |-1-i - (1+i\sqrt{3})| = |-2-(1+\sqrt{3})i| = \sqrt{4+(1+\sqrt{3})^2} = \sqrt{8+2\sqrt{3}}$
- لدينا :  $AC = |z_C - z_A| = |3-i - (1+i\sqrt{3})| = |2-(1+\sqrt{3})i| = \sqrt{4+(1+\sqrt{3})^2} = \sqrt{8+2\sqrt{3}}$
- لدينا :  $BC = |z_C - z_B| = |3-i + 1+i| = |4| = 4$

و منه :  $AB = AC$

خلاصة : المثلث ABC متساوي الساقين في A .

02. ننشئ النقط  $A_{(z_A=-2+i)}$  و  $B_{(z_B=4i)}$  و  $C_{(z_C=\frac{7}{2}+2i)}$  و  $D_{(z_D=\frac{3}{2}-i)}$

ثم نحدد طبيعة الرباعي ABCD .

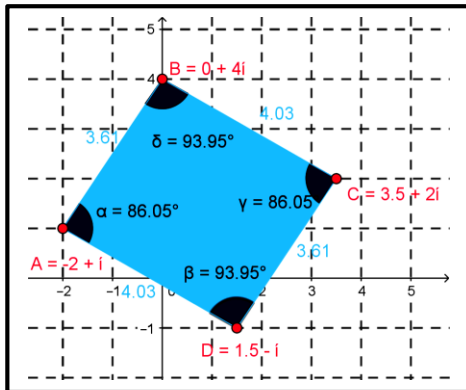
- لدينا :  $AB = |z_B - z_A| = |4i - (-2+i)| = |-2+3i| = \sqrt{4+3^2} = \sqrt{13}$

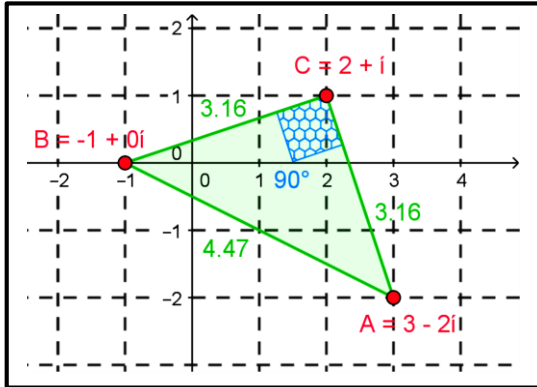
- لدينا :  $DC = |z_C - z_D| = |\frac{7}{2}+2i - (\frac{3}{2}-i)| = |\frac{7}{2}-\frac{3}{2}+(2+1)i| = \sqrt{(2)^2+3^2} = \sqrt{13}$

- لدينا :  $BC = |z_C - z_B| = |\frac{7}{2}+2i - 4i| = |\frac{7}{2}-2i| = \sqrt{(\frac{7}{2})^2+2^2} = \sqrt{\frac{53}{4}} = \frac{\sqrt{53}}{2}$

- لدينا :  $AD = |z_D - z_A| = |\frac{3}{2}-i - (-2+i)| = |\frac{7}{2}-2i| = \sqrt{(\frac{7}{2})^2+2^2} = \frac{\sqrt{53}}{2}$

و منه :  $BC = AD$  و  $AB = DC$





### خلاصة : الرباعي ABCD متوازي الأضلاع .

03. النقطة A و B و C ألحقها  $3-2i$  ;  $-1$  ;  $2+i$  على التوالي .

أ- ننشئ النقط : A و B و C في المستوى العقدي .

ب- نبين أن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية .

• لدينا :  $AB = |z_B - z_A| = |-1 - (3 - 2i)| = |-4 + 2i| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$

• لدينا :  $AC = |z_C - z_A| = |2 + i - (3 - 2i)| = |-1 + 3i| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$

• لدينا :  $BC = |z_C - z_B| = |2 + i + 1| = |3 + i| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

و منه :  $AB^2 = CA^2 + CB^2$  و  $CA = CB$

خلاصة : المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية .

### 05.

أحسب معيار الأعداد:  $3$  ;  $-2$  ;  $5i$  ;  $-3i$  ;  $2-i$  ;  $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$  ;  $1-i$  ;  $1+i$  ;  $1-i\sqrt{3}$  ;  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$  ;  $(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)$

لدينا :

•  $\left|\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$  و  $|2-i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$  و  $|-3i| = 3$  و  $|5i| = 5$  و  $|-2| = 2$  و  $|3| = 3$

• و  $|1-i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$  و  $|1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$  و  $|1-i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = 2$

و  $\left|(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)\right| = |1+i\sqrt{3}| |\sqrt{3}-i| = 2 \times 2 = 4$  و  $\left|\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3\right| = \left|\frac{1+i}{1-i}\right|^3 = \left(\frac{|1+i|}{|1-i|}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^3 = 1$

### 06.

نحدد الشكل المثلثي للأعداد العقدية التالية:

### 01.

•  $z_1 = 1+i = |z_1| \left( \frac{1}{|z_1|} + i \frac{1}{|z_1|} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \left[ \sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]$

•  $z_2 = 1+i\sqrt{3} = |z_2| \left( \frac{1}{|z_2|} + i \frac{\sqrt{3}}{|z_2|} \right) = 2 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = \left[ 2; \frac{\pi}{3} \right]$

•  $z_3 = 1-i\sqrt{3} = \overline{z_2} = 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = \left[ 2; -\frac{\pi}{3} \right]$

•  $z_4 = 1-i = \overline{z_1} = \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \left[ \sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]$

•  $z_5 = 7+7i = 7(1+i) = [7; 0] \left[ \sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right] = \left[ 7\sqrt{2}; 0 + \frac{\pi}{4} \right] = \left[ 7\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]$



سلسلة رقم

تصحيح تمارين : الأعداد العقدية الجزء (1)

الصفحة



الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ

$$z_6 = -8 - 8\sqrt{3}i = -8(1 + i\sqrt{3}) = -8z_2 = [8; \pi] \left[ 2; \frac{\pi}{3} \right] = [16; \pi + \frac{\pi}{3}] = [16; \frac{4\pi}{3}] = [16; -\frac{2\pi}{3}]$$

$$z_7 = 3 - 3i = 3(1 - i) = 3z_4 = [3; 0] \left[ \sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right] = [3\sqrt{2}; 0 - \frac{\pi}{4}] = [3\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}]$$

$$z_8 = \frac{4}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{[4, 0]}{[2; \frac{\pi}{3}]} = \left[ \frac{4}{2}, 0 - \frac{\pi}{3} \right] = \left[ 2, -\frac{\pi}{3} \right] \text{ نحسب :}$$

$$z_9 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{[2, \frac{\pi}{3}]}{[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}]} = \left[ \frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right] = \left[ \sqrt{2}, \frac{\pi}{12} \right] \text{ نحسب :}$$

ثم سنتج  $\cos \frac{\pi}{12}$  و  $\sin \frac{\pi}{12}$  من خلال

$$z_9 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{[2, \frac{\pi}{3}]}{[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}]} = \left[ \frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right] = \left[ \sqrt{2}, \frac{\pi}{12} \right] \Leftrightarrow z_9 = \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{12} \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow z_9 = \frac{1 + \sqrt{3} + (-1 + \sqrt{3})i}{2} = \sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{12} \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow z_9 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{(-1 + \sqrt{3})i}{2} = \sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{12} \right) \right)$$

$$\frac{-1 + \sqrt{3}}{2} = \sqrt{2} \sin \left( \frac{\pi}{12} \right) \text{ و } \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{12} \right) \text{ : ومنه}$$

$$\sin \left( \frac{\pi}{12} \right) = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \text{ و } \cos \left( \frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \text{ : خلاصة : } \sin \left( \frac{\pi}{12} \right) = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \text{ و } \cos \left( \frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \text{ و بالتالي}$$

07.

01. حدد المعيار و عمدة الأعداد العقدية التالية "

$$a - i \text{ لدينا } z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2} = a + bi \text{ : } |z_1| = |\sqrt{6} - i\sqrt{2}| = \sqrt{6 + 2} = 2\sqrt{2} \text{ و } \arg z_1 \equiv \alpha [2\pi] \text{ مع}$$

$$\arg z_1 \equiv \alpha = -\frac{\pi}{6} [2\pi] \text{ و بالتالي } \alpha = -\frac{\pi}{6} [2\pi] \text{ : ومنه : } \begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{|z_1|} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{b}{|z_1|} = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{خلاصة : معيار } |z_1| = 2\sqrt{2} \text{ و عمدة } \arg z_1 \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi]$$



ب -  $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = a + bi$  لدينا :  $|z_2| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  و  $\arg z_2 \equiv \alpha \in [2\pi]$  مع

و منه :  $\alpha \equiv -\frac{3\pi}{4} \equiv \frac{5\pi}{4} \in [2\pi]$  و بالتالي  $\arg z_2 \equiv \alpha \equiv -\frac{3\pi}{4} \in [2\pi]$  و  $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{|z_2|} = \frac{-1}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{b}{|z_2|} = \frac{-1}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

**خلاصة :** معيار  $|z_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}$  و عمدة  $\arg z_2 \equiv -\frac{3\pi}{4} \in [2\pi]$

ج - بالنسبة ل  $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  نستعمل طريقة أخرى :

نلاحظ أن :

$z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left[1; \frac{2\pi}{3}\right]$

**خلاصة :** معيار  $|z_3| = 1$  و عمدة  $\arg z_3 \equiv \frac{2\pi}{3} \in [2\pi]$

د - بالنسبة ل  $z_1 z_2$  :

• بالنسبة للمعيار :  $|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2| = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$

• بالنسبة للعمدة :  $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv -\frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} \equiv -\frac{11\pi}{12} \in [2\pi]$

بالنسبة ل :  $\frac{z_1}{z_2}$

• بالنسبة للمعيار :  $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4$

• بالنسبة للعمدة :  $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2) \equiv -\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} \equiv \frac{7\pi}{12} \in [2\pi]$

بالنسبة ل :  $z_2^2$

• بالنسبة للمعيار :  $|z_2^2| = |z_2|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

• بالنسبة للعمدة :  $\arg(z_2^2) \equiv 2 \times \arg(z_2) \equiv 2 \times -\frac{3\pi}{4} \equiv -\frac{3\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2} \in [2\pi]$

02. نحدد الشكل المثلثي و الشكل الأسّي ثم المعيار و عمدة لكل عدد عقدي من بين الأعداد العقدية التالية "

•  $\arg(z_1) \equiv -\frac{\pi}{4} \in [2\pi]$  و  $|z_1| = 3\sqrt{2}$  و منه :  $z_1 = 3 - 3i = 3(1 - i) = [3; 0] \times \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right] = \left[3\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right] = 3\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$



•  $\arg(z_2) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$  و  $|z_1| = 3\sqrt{2}$  : منه و  $z_2 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = [2; 0] \times \left[1; -\frac{\pi}{3}\right] = \left[2; -\frac{\pi}{3}\right] = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$

•  $z_1 z_2 = \left[3\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right] \left[2; -\frac{\pi}{3}\right] = \left[3\sqrt{2} \times 2; -\frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = \left[6\sqrt{2}; -\frac{7\pi}{12}\right]$   
 و منه :  $|z_1| = 3\sqrt{2}$   
 $= 3\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i} \times 2e^{-\frac{\pi}{3}i} = 6\sqrt{2}e^{-\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)i} = 6\sqrt{2}e^{-\frac{7\pi}{12}i}$

$\arg(z_2) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$

•  $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]$  و  $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 4$  : منه و  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\left[3\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right]}{\left[2; -\frac{\pi}{3}\right]} = \left[\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right] = \left[4; \frac{\pi}{12}\right] = 4e^{\frac{\pi}{12}i}$

$z_2^3 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\pi}{4}\right]^3 = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3; 3 \times \left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{9\pi}{4}\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{4}; -2\pi - \frac{\pi}{4}\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

و منه :  $\arg(z_2^3) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$  و  $|z_2^3| = \frac{\sqrt{2}}{4}$

•  $z_3 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \left[2; -\frac{\pi}{12}\right] = 2e^{-\frac{\pi}{12}i}$

•  $z_4 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \left[2; \frac{\pi}{12}\right]$

•  $z_5 = -2e^{\frac{5\pi}{4}i} = 2e^{-\pi i} \times e^{\frac{5\pi}{4}i} = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{4} - \pi\right)} = 2e^{\frac{i\pi}{4}} = \left[2; \frac{\pi}{4}\right]$

•  $z_6 = \frac{2i}{1-i} = \frac{\left[2; \frac{\pi}{2}\right]}{\left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right]} = \left[\frac{2}{\sqrt{2}}; \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \left[\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right] = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$

03. نعطي إخطا ل  $\cos^3 x$  أ  $\sin^4 x$  ب  $\cos^3 x$  أ  $\sin^4 x$  ب

حسب صيغتي أولير formules d'Euler  $\cos x = \frac{z + \bar{z}}{2}$  و  $\sin x = \frac{z - \bar{z}}{2i}$  مع  $z = [1; x] = \cos x + i\sin x$

أو أيضا :  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$  و  $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$  مع  $\cos x + i\sin x = e^{ix}$

طريقة 1 : نستعمل الكتابة  $\cos x = \frac{z + \bar{z}}{2}$

لا تنسى :

• formule de Moivre  $z^n = [1; nx] = \cos nx + i\sin nx$



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ



الصفحة

تصحيح تمارين : الأعداد العقدية الجزء ( I )

•  $z^n \times \bar{z}^n = 1$  و  $z^n - \bar{z}^n = 2i \sin(nx)$  و  $z^n + \bar{z}^n = 2 \cos(nx)$  ومنه :

$$\begin{aligned} \cos^3 x &= \left( \frac{z + \bar{z}}{2} \right)^3 = \left( \frac{1}{2} \right)^3 (z + \bar{z})^3 = \frac{1}{8} (z^3 + 3z^2\bar{z} + 3z\bar{z}^2 + \bar{z}^3) \\ &= \frac{1}{8} (z^3 + \bar{z}^3 + 3z\bar{z}(z + \bar{z})) \\ &= \frac{1}{8} (2\cos(3x) + 3 \times 1 \times 2 \cos x) \\ &= \frac{1}{8} (2\cos 3x + 6 \cos x) \end{aligned}$$

خلاصة :  $\cos^3 x = \frac{1}{8} (2\cos 3x + 6 \cos x)$

طريقة 2 : نستعمل الكتابة  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

لا تنسى :

•  $(e^{ix})^n = e^{inx}$  و  $\frac{1}{e^{ix}} = e^{-ix}$  و  $\frac{e^{ix}}{e^{iy}} = e^{i(x-y)}$  و  $e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)}$

•  $e^{inx} \times e^{-inx} = 1$  و  $(e^{ix})^n - (e^{-ix})^n = 2i \sin(nx)$  و  $(e^{ix})^n + (e^{-ix})^n = 2 \cos(nx)$  ومنه :

$$\begin{aligned} \cos^3 x &= \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 = \left( \frac{1}{2} \right)^3 (e^{ix} + e^{-ix})^3 = \frac{1}{8} ((e^{ix})^3 + 3(e^{ix})^2 \times e^{-ix} + 3e^{ix} \times (e^{-ix})^2 + (e^{-ix})^3) \\ &= \frac{1}{8} (e^{i3x} + 3e^{i2x} \times e^{-ix} + 3e^{ix} \times e^{-i2x} + e^{-i3x}) \\ &= \frac{1}{8} (e^{i3x} + e^{-i3x} + 3e^{ix} \times e^{-ix} \times (e^{ix} + e^{-ix})) \\ &= \frac{1}{8} (2\cos(3x) + 3 \times 1 \times 2 \cos x) \\ &= \frac{1}{8} (2\cos 3x + 6 \cos x) \end{aligned}$$

خلاصة :  $\cos^3 x = \frac{1}{8} (2\cos 3x + 6 \cos x)$

ب- إخطا ط  $\sin^4 x$

طريقة 1 : نستعمل الكتابة  $\sin x = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

لا تنسى :

• formule de Moivre صيغة موافر  $z^n = [1; nx] = \cos nx + i \sin nx$

•  $z^n \times \bar{z}^n = 1$  و  $z^n - \bar{z}^n = 2i \sin(nx)$  و  $z^n + \bar{z}^n = 2 \cos(nx)$  ومنه :





$$\begin{aligned}\sin^4 x &= \left( \frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^4 = \left( \frac{1}{2i} \right)^4 (z - \bar{z})^4 = \frac{1}{16} (z^4 - 4z^3\bar{z} + 6z^2\bar{z}^2 - 4z\bar{z}^3 + \bar{z}^4) \\ &= \frac{1}{16} (z^4 + \bar{z}^4 - 4z\bar{z}(z^2 + \bar{z}^2) + 6z^2\bar{z}^2) \\ &= \frac{1}{16} (2\cos(4x) - 4 \times 1 \times 2 \cos 2x + 6 \times 1) \\ &= \frac{1}{16} (2\cos 4x - 8 \cos 2x + 6) \\ &= \frac{1}{8} (\cos 4x - 4 \cos 2x + 3)\end{aligned}$$

خلاصة :  $\sin^4 x = \frac{1}{8} (\cos 4x - 4 \cos 2x + 3)$

طريقة 2 : نستعمل الكتابة  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

لا تنسى :

- $(e^{ix})^n = e^{inx}$  و  $\frac{1}{e^{ix}} = e^{-ix}$  و  $\frac{e^{ix}}{e^{iy}} = e^{i(x-y)}$  و  $e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)}$
- $e^{inx} \times e^{-inx} = 1$  و  $(e^{ix})^n - (e^{-ix})^n = 2i \sin(nx)$  و  $(e^{ix})^n + (e^{-ix})^n = 2 \cos(nx)$

$$\begin{aligned}\sin^4 x &= \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4 = \left( \frac{1}{2i} \right)^4 (e^{ix} - e^{-ix})^4 = \frac{1}{16} ((e^{ix})^4 - 4(e^{ix})^3 \times e^{-ix} + 6(e^{ix})^2 \times (e^{-ix})^2 - 4e^{ix} \times (e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4) \\ &= \frac{1}{16} (e^{i4x} - 4e^{i3x} \times e^{-ix} + 6e^{i2x} \times e^{-i2x} - 4e^{ix} \times e^{-i3x} + e^{-i4x}) \\ &= \frac{1}{16} (e^{i4x} + e^{-i4x} - 4e^{ix} \times e^{-ix} \times (e^{i2x} + e^{-i2x}) + 6 \times 1) \\ &= \frac{1}{16} (2\cos(4x) - 4 \times 1 \times 2 \cos 2x + 6) \\ &= \frac{1}{16} (2\cos 4x - 8 \cos 2x + 6) \\ &= \frac{1}{8} (\cos 4x - 4 \cos 2x + 3)\end{aligned}$$

خلاصة :  $\sin^4 x = \frac{1}{8} (\cos 4x - 4 \cos 2x + 3)$

01. نحدد الشكل المثلثي للأعداد العقدية التالية:  $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$  ;  $z_2 = 1 - i$  ;  $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$



• لدينا :  $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = \sqrt{2} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = \left[ \sqrt{2}; -\frac{\pi}{6} \right]$

$z_2 = 1 - i = \left[ \sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]$

$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\left[ \sqrt{2}; -\frac{\pi}{6} \right]}{\left[ \sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]} = \left[ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}; -\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] = \left[ 1; \frac{\pi}{12} \right]$

خلاصة :  $Z = \left[ 1; \frac{\pi}{12} \right]$

02

أ- نعطي الشكل الجبري ل: Z .

$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}}{1 - i} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - i)}{1 - i} = \sqrt{2} \frac{(\sqrt{3} - i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times (\sqrt{3} + 1 + (\sqrt{3} - 1)i) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} i$

خلاصة : الشكل الجبري ل: Z هو :  $Z = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} i$

ب- استنتج قيمة كل من :  $\cos \frac{\pi}{12}$  و  $\sin \frac{\pi}{12}$  .

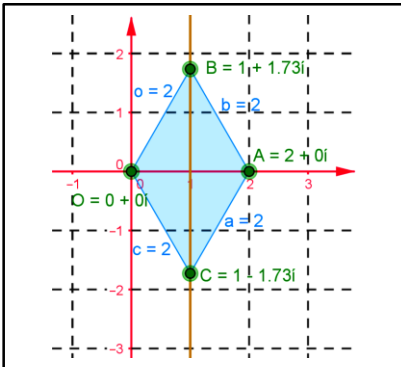
من خلال  $Z = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} i$  و  $Z = \left[ 1; \frac{\pi}{12} \right] = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

إذن :  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$  و  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

خلاصة :  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$  و  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

09

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  ( الوحدة 2 cm ) نعتبر النقط  $A(z_A=2)$  و  $B(z_B=1+i\sqrt{3})$  و  $C(z_C=1-i\sqrt{3})$



01. أ- نعطي الشكل المثلثي و الشكل الأساسي  $z_B$  ثم ل  $z_C$  .

•  $z_B = 1 + i\sqrt{3} = 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = \left[ 2; \frac{\pi}{3} \right] = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

•  $z_C = 1 - i\sqrt{3} = 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = \left[ 2; -\frac{\pi}{3} \right] = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ب- ننشئ النقط A و B و C .

ج- نستنتج ميانيا طبيعة الرباعي OBAC : لدينا : OBAC معين .

02. نحدد ثم أنشئ  $(\Delta)$  المجموعة النقط  $M_Z$  من المستوى العقدي حيث :  $|Z| = |z - 2|$  .



$$|z| = |z - 2| \Leftrightarrow OM = AM$$

$$\Leftrightarrow MO = MA$$

و منه : مجموعة النقط  $M$  هي واسط القطعة  $[OA]$ .

03..  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}$  لكل النقطة  $M$  لحقها العدد العقدي  $z = x + yi$  ( مع  $z \neq z_A$  ) نربطها بالنقطة  $M'$  التي لحقها  $z'$  حيث

$$z' = f(z) = \frac{-4}{z-2}$$

أ- نحل المعادلة :  $f(z) = z$

$$f(z) = z \Leftrightarrow \frac{-4}{z-2} = z$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 2z + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 2z + 1 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-1)^2 = -3 = (i\sqrt{3})^2$$

$$\Leftrightarrow z-1 = i\sqrt{3} \text{ أو } z-1 = -i\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow z = 1 + i\sqrt{3} \text{ أو } z = 1 - i\sqrt{3}$$

خلاصة : حلي المعادلة هما :  $z = 1 + i\sqrt{3}$  أو  $z = 1 - i\sqrt{3}$ .

ب- نستنتج النقطتين التي تربط  $B$  و  $C$ .

النقطة  $B$  نربطها بنفسها أي صامدة نفس الشيء ل  $C$ .

ج- لتكن  $G$  مركز ثقل المثلث  $OAB$  نربطها ب  $G'$  حدد ثم أنشئ النقطة  $G'$ .

$$\text{لدينا : لحق } G \text{ يحقق ما يلي : } Z_G = \frac{1}{3}(Z_O + Z_A + Z_B) = \frac{2+1-i\sqrt{3}}{3} = 1+i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{و منه : لحق } G' \text{ يحقق ما يلي } Z_{G'} = \frac{-4}{1+i\frac{\sqrt{3}}{3}-2} = \frac{-12}{-3+i\sqrt{3}} = \frac{-12(-3-i\sqrt{3})}{9+3} = 3+i\sqrt{3}$$

04...

$$\text{أ- نبين أن : } |z'-2| = \frac{2|z|}{|z-2|} \text{ . لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-4-2z+4}{z-2} \right| = \frac{2|z|}{|z-2|} \Leftrightarrow \left| \frac{-2z}{z-2} \right| = \frac{2|z|}{|z-2|}$$

$$\text{خلاصة : } |z'-2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$$

ب- نفترض أن : النقطة  $M$  تنتمي ل  $(\Delta)$  نربطها بالنقطة  $M'$ . بين أن  $M'$  تنتمي لدائرة يتم تحديد مركزها و شعاعها.

$$\text{لدينا : } |z| = |z-2| \text{ و } |z'-2| = \frac{2|z|}{|z-2|} \text{ و منه : } |z'-2| = \frac{2|z|}{|z|} = 2$$

و شعاعها  $R = 2$ . خلاصة :  $M' \in \mathcal{C}(A; 2)$