



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء



الصفحة

درس مجموعة الأعداد العقدية الجزء I

I. تقديم المجموعة $\mathbb{C}$:

01. نشاط:

لنعتبر المعادلة: $x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0$

(1) هذه المعادلة: ليس لها حل في $\mathbb{R}$. وهذا يفرض علينا أن نستعمل العدد i وهو عدد تخيلي حيث $i^2 = (-i)^2 = -1$ ومنه نحصل على أن

i و $-i$ حلين للمعادلة

(2) لنعتبر المعادلة: $(E): x^2 - 2x + 2 = 0$

باستعمال نفس خاصيات عمليتي الجمع و الضرب في $\mathbb{R}$ و العدد التخيلي i حيث $i^2 = (-i)^2 = -1$.

تحقق أن: المعادلة (E) تكتب على الشكل الآتي $(E): (x-1)^2 + 1 = 0$

تحقق بأن: $1+i$ و $1-i$ حلي للمعادلة (E)

02. مفردات:

- العدد i هو عدد تخيلي.
- العددين $1+i$ و $1-i$ نسميهما عددين عقديين و بصفة عامة
- نكتب عدد عقدي على الشكل $z = a + bi$ مع $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}$.

03. تعريف:

- عدد عقدي هو عدد يكتب على الشكل $z = a + bi$ حيث a و b من $\mathbb{R}$ و i يسمى عدد تخيلي يحقق $i^2 = -1$.
- الأعداد العقدية تكون مجموعة تسمى مجموعة الأعداد العقدية ونرمز لها ب: $\mathbb{C}$.
- المجموعة $\mathbb{C}$ مزودة بعمليتي الجمع و الضرب تمددان نفس العمليتين في $\mathbb{R}$ ولهما نفس الخاصيات. (التبادلية ؛ التجمعية

04. مفردات :

- $a + bi$ يسمى عدد عقدي و نرمز له في الغالب ب: z
- المجموعة $\mathbb{C}$ تسمى مجموعة الأعداد العقدية.
- الكتابة: $a + bi$ تسمى الكتابة الجبرية للعدد العقدي z أو أيضا الشكل الجبري للعدد العقدي z
- العدد الحقيقي a يسمى الجزء الحقيقي ل: z ونكتب: $\text{Re}(z) = a$ مثال: $\text{Re}(2-3i) = 2$
- العدد الحقيقي b يسمى الجزء التخيلي ل: z ونكتب: $\text{Im}(z) = b$ مثال: $\text{Im}(2-3i) = -3$
- العدد العقدي $z' = a - bi$ يسمى مرافق العدد العقدي z ويرمز له ب: $z' = \bar{z} = a - bi$
- مثال: $z = 2 - 3i$ مرافقه هو $\bar{z} = 2 + 3i = 2 - (-3i)$
- $a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow a = a'$ و $b = b'$

II. العمليات على الأعداد العقدية :

ليكن: $z = x + yi$ و $z' = x' + y'i$ من $\mathbb{C}$

مثال	العملية : الجمع في $\mathbb{C}$
$z + z' = 1 + 5i + 2 - 3i = 3 + 2i$	$z + z' = x + yi + x' + y'i = (x + x') + (y + y')i$
مثال	العملية : الضرب في $\mathbb{C}$
$z \times z' = (1 + 5i) \times (2 - 3i)$ $= 1 \times 2 + 5i \times (-3i) + (1 \times (-3) + 5 \times 2)i = 17 + 7i$	$z \times z' = (x + yi) \times (x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + yx')i$



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء



الصفحة

درس مجموعة الأعداد العقدية الجزء I

العملية : الضرب في $\mathbb{C}$ (حالة خاصة)	مثال
$k.z = k.(x+yi) = kx + kyi$ (1) $z \times \bar{z} = x^2 + y^2$ (2)	$-3 \times z = -3 \times (1+5i) = -3 - 15i$ (1) $(2+3i) \times (2+3i) = 2^2 + 3^2 = 13$ (2)
المقلوب في $\mathbb{C}$ (نستعمل مرافق z')	مثال
$\frac{1}{z'} = \frac{1}{x'+y'i} = \frac{1 \times \bar{z}'}{z' \bar{z}'} =$ $= \frac{1 \times (x'-y'i)}{(x'+y'i)(x'-y'i)} = \frac{x'}{x'^2+y'^2} - \frac{y'}{x'^2+y'^2} i$	$\frac{1}{z'} = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i) \times (2+3i)}$ $= \frac{2}{2^2+3^2} + \frac{3}{2^2+3^2} i = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} i$
الخارج في $\mathbb{C}$ (نستعمل مرافق z')	مثال
$\frac{z}{z'} = \frac{x+yi}{x'+y'i} = \frac{z \times \bar{z}'}{z' \times \bar{z}'} = \frac{1}{z' \times \bar{z}'} \times z \times \bar{z}'$ $= \frac{1}{x'^2+y'^2} \times (x+yi)(x'-y'i)$ $= \frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2} + \frac{yx'-xy'}{x'^2+y'^2} i$	$\frac{z}{z'} = \frac{1+5i}{2-3i} = \frac{(1+5i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}$ $= \frac{1 \times 2 + 5i \times 3i}{2^2+3^2} + \frac{5i \times 2 + 1 \times 3i}{2^2+3^2}$ $= \frac{-13}{13} + \frac{13}{13} i = -1 + i$

❖ أمثلة: أحسب ما يلي:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= 2+5i - (-4+2i) = 2+4 + (5-2)i = 6+3i \\
 z_2 &= 2+5i - 3i(-4+2i) = 2+5i + 12i + 6 = 8+17i \\
 z_3 &= (2+5i)(-4+2i) = 2 \times (-4) + 5i \times 2i + (2 \times 2 + 5 \times (-4))i = -18-16i \\
 z_4 &= \frac{1}{1+3i} = \frac{1 \times (1-3i)}{(1+3i) \times (1-3i)} = \frac{1-3i}{1^2+3^2} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10} i \\
 z_5 &= \frac{2+3i}{5-i} = \frac{(2+3i) \times (5+i)}{(5-i) \times (5+i)} = \frac{10-3+(2+15)i}{5^2+1^2} = \frac{7+17i}{26} = \frac{7}{26} + \frac{17}{26} i
 \end{aligned}$$

❖ ملحوظة:

$$\begin{aligned}
 (a+bi)^2 &= a^2 + 2abi + (bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2 \\
 (a-bi)^2 &= a^2 - 2abi + (-bi)^2 = a^2 - 2abi - b^2 \\
 (a+bi)(a-bi) &= a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2
 \end{aligned}$$

III. التمثيل الهندسي لعدد عقدي :

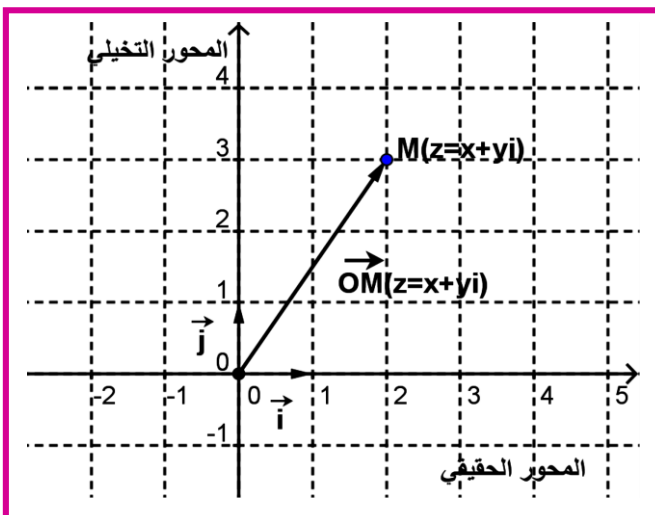
01. نشاط:

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(\vec{i}, \vec{j})$ نعتبر التطبيق

$$f: \mathbb{C} \rightarrow (P)$$

$$(\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}) \quad (z = x+yi \mapsto f(z) = f(x+yi) = M(x,y))$$

(I) أنشئ النقط التالية M_5, M_4, M_3, M_2, M_1 صورة الأعداد التالية :





درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء



الصفحة

درس مجموعة الأعداد العقدية الجزء I

$$z_5 = 2 - i \text{ و } z_4 = 2 + i \text{ و } z_3 = -2 - 3i \text{ و } z_2 = 3i \text{ و } z_1 = 3$$

02 مفردات:

- المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر $(0, \vec{i}, \vec{j})$ يسمى المستوى العقدي.
- النقطة $M(x, y)$ هي صورة العدد العقدي $z = x + yi$.
- نكتب: $M(z)$ أو $M(x+yi)$ نقرأ: النقطة M التي لحقها z . نكتب كذلك: z_M ونقرأ z لحق النقطة M .
- المتجهة $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ تسمى صورة العدد العقدي z .
- نكتب: $\vec{OM}(z)$ أو $\vec{OM}(x+yi)$ نقرأ $\vec{OM}$ المتجهة التي لحقها z . نكتب كذلك: $z_{\vec{OM}}$ نقرأ z لحق المتجهة $\vec{OM}$.
- كل عدد عقدي حقيقي صرف z أي $(z = x)$ صورته النقطة $M(x, 0)$ تنتمي لمحور الأفاصيل $(0, \vec{i})$ ولهذا $(0, \vec{i})$ يسمى المحور الحقيقي.
- كل عدد عقدي تخيلي صرف z أي $(z = yi)$ صورته النقطة $M(0, y)$ تنتمي لمحور الأراتيب $(0, \vec{j})$ ولهذا $(0, \vec{j})$ يسمى المحور التخيلي.

03 نتائج:

- $I(z_1)$ و $C(z_C); B(z_B); A(z_A)$ أربع نقط من المستوى العقدي ألحاقها على التوالي: $z_A = x_A + y_A i$ و $z_B = x_B + y_B i$ و $z_C = x_C + y_C i$ و $z_I = x_I + y_I i$.
 - المتجهة $\vec{AB}$ لحقها هو: $z_B - z_A$.
 - المتجهة $k \cdot \vec{AB}$ لحقها هو: $k \times (z_B - z_A)$.
 - I منتصف القطعة: $[A, B]$ لحق I هو: $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.
 - A و B و C نقط مختلفة مثنى مثنى هي مستقيمية $(\vec{AC} = k\vec{AB})$ يكافئ $z_C - z_A = k(z_B - z_A)$ و $k \in \mathbb{R}$. أو أيضا:
- $$\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k \in \mathbb{R} \right) \text{ مع } (z_B - z_A \neq 0)$$

❖ نبرهن على أن: العدد العقدي $z_B - z_A$ هو لحق المتجهة $\vec{AB}$ A و B نقطتان من المستوى العقدي لحقهما على التوالي $z_A = x_A + y_A i$ و $z_B = x_B + y_B i$.• $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ زوج إحداثيات المتجهة $\vec{AB}$ • توجد نقطة وحيدة M من المستوى العقدي (P) حيث: $\vec{AB} = \vec{OM}$. إذن: $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ هو زوج إحداثيات النقطة Mومنه: لحق النقطة M أو كذلك المتجهة $\vec{AB} = \vec{OM}$ هو العدد العقدي:

$$z_{\vec{AB}} = (x_B - x_A) + (y_B - y_A)i$$

$$= (x_B + y_B i) - (x_A + y_A i) = z_B - z_A$$

• خلاصة: العدد العقدي $z_B - z_A$ هو لحق المتجهة: $\vec{AB}$.



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء



الصفحة

درس مجموعة الأعداد العقدية الجزء I

04. مثال:

نعتبر $I(z_I)$; $A(z_A = 2 + i)$; $B(z_B = -2 + i)$; $C(z_C = 5 + xi)$ أربع نقط من المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أوجد $z_{\overline{AB}}$ لحق المتجهة $\overline{AB}$.

(2) أوجد z_I لحق I منتصف القطعة $[AB]$.

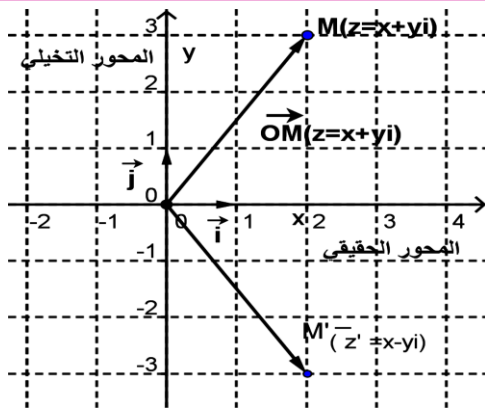
(3) حدد x حيث النقط A و B و C مستقيمة.

IV. مرافق عدد عقدي :

01. تعريف:

ليكن $z = x + yi$ من $\mathbb{C}$ مع x و y من $\mathbb{R}$.

العدد الحقيقي $x - yi$ يسمى مرافق العدد العقدي z ونرمز له ب: $\overline{z} = x + yi = x - yi$.



02. أمثلة:

$$\begin{aligned} \overline{z} = 1 + 5i &= 1 - 5i \quad \text{لدينا:} & z = 1 + 5i \\ \overline{z} = -1 - 3i &= -1 + 3i \quad \text{لدينا:} & z = -1 - 3i \\ \overline{z} = 1 &= 1 \quad \text{لدينا:} & z = 1 \\ \overline{z} = 2i &= -2i \quad \text{لدينا:} & z = 2i \\ \overline{z} = -6i &= 6i \quad \text{لدينا:} & z = -6i \end{aligned}$$

03. خاصيات المرافق:

$\mathbb{C}$ من $z' = x' + y'i$ و $z = x + yi$

$$z - \overline{z} = 2yi \quad \text{و} \quad z + \overline{z} = 2x \quad \text{و} \quad \overline{\overline{z}} = z$$

$$z \times \overline{z} = x^2 + y^2$$

$$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'} \quad \text{و} \quad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$z^p = (\overline{z})^p \quad \text{مع } p \text{ من } \mathbb{Z} \quad ; \quad \left(\frac{z}{z'} \right) = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \quad ; \quad \left(\frac{1}{z'} \right) = \frac{1}{\overline{z'}}$$

04. أمثلة:

$$\overline{2 + 3i} = 2 + 3i$$

$$\overline{(2 + 3i) + 1 - 2i} = \overline{2 + 3i} + \overline{1 - 2i} = 2 - 3i + 1 + 2i = 3 - i$$

$$\overline{(2 + 3i) \times (1 - 5i)} = \overline{2 + 3i} \times \overline{1 - 5i} = (2 - 3i)(1 + 5i)$$

$$\overline{\left(\frac{2 + 3i}{1 - 5i} \right)} = \frac{\overline{2 + 3i}}{\overline{1 - 5i}} = \frac{2 - 3i}{1 + 5i} \quad \text{و} \quad \overline{\left(\frac{1}{1 - 5i} \right)} = \frac{1}{\overline{1 - 5i}} = \frac{1}{1 + 5i}$$

$$\overline{(2 + 3i)^n} = (2 - 3i)^n$$



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء



الصفحة

درس مجموعة الأعداد العقدية الجزء I

05. ملحوظة:

- (أي z عددا حقيقيا صرفا) : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$
- (أي z عددا تخيليا صرفا) : $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

V. معيار عدد عقدي :

01. نشاط:

لتكن $M(z=x+yi)$ نقطة من المستوى العقدي المنسوب

إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0, \vec{i}, \vec{j})$

(1) أوجد: $z \times \bar{z}$

(2) أعطي كتابة للمتجهة $\overrightarrow{OM}$ في المعلم $(0, \vec{i}, \vec{j})$

(3) أوجد $\|\overrightarrow{OM}\|$. ماذا تستنتج ؟

02. تعريف :

$z = x + yi$ من $\mathbb{C}$ مع x و y من $\mathbb{R}$.

العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{zz}$ يسما معيار العدد العقدي $z = x + yi$. نكتب : $|z| = \sqrt{zz} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

03. التأويل الهندسي للمعيار

إذا كان $z = x + yi$ لحق M فإن: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|\overrightarrow{OM}\|$ يمثل المسافة بين أصل المعلم و النقطة M .

04. أمثلة:

$$\begin{aligned} \bullet | -7 | &= | -7 + 0i | = \sqrt{(-7)^2 + 0^2} = 7 \quad \bullet | 5 | = | 5 + 0i | = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5 \\ \bullet | -2i | &= | 0 - 2i | = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2 \quad \bullet | 2i | = | 0 + 2i | = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2 \\ \bullet | 1 + i\sqrt{3} | &= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \quad \bullet | 1 + i | = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

05. خاصيات المعيار:

$z = x + yi$ و $z' = x' + y'i$ من $\mathbb{C}$

$$\bullet |z + z'| \leq |z| + |z'| \quad \text{و} \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad \text{و} \quad |\bar{z}| = |-z| = |z|$$

$$\bullet (z' \neq 0) ; \quad \frac{|z|}{|z'|} = \left| \frac{z}{z'} \right| ; \quad \frac{1}{|z'|} = \left| \frac{1}{z'} \right| ; \quad |z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$\bullet |z^p| = |z|^p \quad \text{مع} \quad p \in \mathbb{Z} \quad \text{و} \quad z \neq 0$$

06. أمثلة:

$$\bullet |\overline{1+i}| = |-1-i| = |1+i| = \sqrt{2}$$

$$\bullet |(1-i) \times (2+3i)| = |1-i| \times |2+3i| = \sqrt{2} \times \sqrt{13} = \sqrt{26}$$



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء



الصفحة

درس مجموعة الأعداد العقدية الجزء I

$$\left| \frac{1+i}{2} \right| = \frac{|1+i|}{|2|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|-i+i| \leq |-i| + |i| \Leftrightarrow 0 \leq 1+1$$

$$|(1+i)^6| = |1+i|^6 = (\sqrt{2})^6 = 8$$

07. تمرين:

أحسب معيار الأعداد العقدية: $z_1 = -5+3i$ و $z_2 = 4i(-2+3i)$ و $z_3 = 1+i\sqrt{3}$ و $z_4 = 5+i5\sqrt{3}$ و $z_5 = \frac{7}{1-i\sqrt{3}}$

$$z_7 = \frac{4(1+i)^2}{2i(-5-i5\sqrt{3})^6} \text{ و } z_6 = \frac{4(1+i)}{2i(-5-i5\sqrt{3})}$$

08. نتائج هندسية:

A و B و C ثلاث نقط من المستوى العقدي أحاقها $z_A = x_A + y_A i$ و $z_B = x_B + y_B i$ و $z_C = x_C + y_C i$ على التوالي مع $z_A \neq z_C$ لدينا :

$$\| \overline{AB} \| = AB = |z_B - z_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \frac{AB}{AC} = 1 \text{ ومنه : } \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \frac{AB}{AC}$$

المثلث ABC متساوي الساقين في A

09. مثال:

ثلاث نقط من المستوى العقدي. $C(z_C = 3i); B(z_B = -1+i); A(z_A = 1+i)$

1 نحسب أطوال أضلاع المثلث ABC. لدينا:

$$AB = |z_B - z_A| = |-1+i - (1+i)| = |-2| = 2$$

$$AC = |z_C - z_A| = |3i - (1+i)| = |-1+2i| = \sqrt{5}$$

$$CB = |z_B - z_C| = |-1+i - (3i)| = |-1-2i| = \sqrt{5}$$

2 ماهي طبيعة المثلث ABC.

بأن: $AC = CB$ المثلث ABC متساوي الساقين في C.

VI. عدة لعدد عقدي غير منعدم:

01. نشاط:

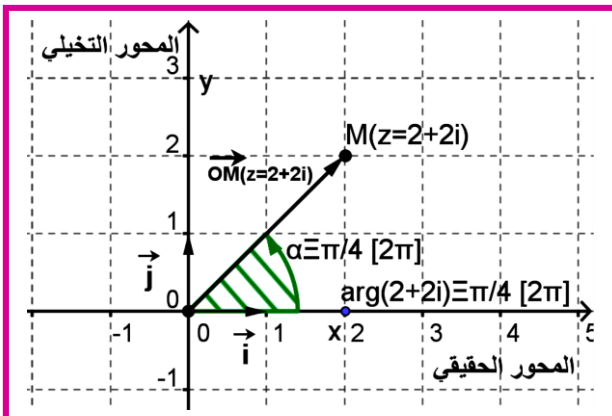
لنأخذ عدد عقدي z غير منعدم و M صورته في المستوى العقدي إن: $M \neq O$

مثال: $z = 2+2i$ من $\mathbb{C}^*$.

02. تذكير:

- لنأخذ الزاوية الموجهة: $(\vec{i}, \overline{OM})$

- قياسات هذه الزاوية الموجهة هي: $(\vec{i}, \overline{OM}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ أو أيضا: $(\vec{i}, \overline{OM}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$





درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء



الصفحة

درس مجموعة الأعداد العقدية الجزء I

03. مفردات :

- قياس الزاوية الموجهة $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ و هو يسمى عمدة العدد العقدي $z = 2 + 2i$
- كذلك كل قياس من بين القياسات $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ (مع $k \in \mathbb{Z}$) للزاوية الموجهة $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ يسمى عمدة العدد العقدي $z = 2 + 2i$.
- نرمز للعمدة العدد العقدي الغير المنعدم $z = 2 + 2i$ ب: $\arg(z) \equiv \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM} \right) [2\pi]$ أو $\arg(2 + 2i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$
- كل عدد من بين الأعداد التي هي على شكل $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ هو كذلك عمدة العدد العقدي $z = 2 + 2i$
- بصفة عامة نكتب: $\arg(z) \equiv \alpha [2\pi]$ أو $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$
- ونفضل أخذ $\alpha \in]-\pi, \pi]$ (أي القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$) كعمدة للعدد العقدي الغير المنعدم z .
- العدد العقدي $z = 0$ ليس له عمدة (لأن $M = O$ ضلع غير محدد لهذه الزاوية)

04. تعريف:

ليكن z عدد عقدي غير منعدم و M صورته في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0, \vec{i}, \vec{j})$ إذن: $M \neq O$.

- كل قياس α للزاوية الموجهة $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ يسمى **عمدة العدد العقدي** z ويرمز له ب: $\arg(z)$

نكتب: $\arg(z) \equiv \alpha [2\pi]$ أو $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

05. أمثلة:

- 1- أنشئ في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0, \vec{i}, \vec{j})$ النقاط التالية: $M_1(z_1=2)$ و $M_2(z_2=-3)$ و $M_3(z_3=2i)$ و $M_4(z_4=-3i)$ و $M_5(z_5=1+i)$ و $M_6(z_6=1-i)$ و $M_7(z_7=2+2i)$ و $M_8(z_8=-1-i)$
- 2- استنتج عمدة لحق النقاط السابقة.

06. ملحوظة:

a و b من $\mathbb{R}$ و $z \neq 0$ (أي $(a,b) \neq (0,0)$) حيث: $z = a + bi$ و $-z = -a - bi$ و $\bar{z} = a - bi$

- $z = a > 0$ لدينا: $\arg(a) \equiv 0 [2\pi]$ مثال: $\arg(3) \equiv 0 [2\pi]$
- $z = a < 0$ لدينا: $\arg(a) \equiv \pi [2\pi]$ مثال: $\arg(-3) \equiv \pi [2\pi]$
- $z = bi$; $b > 0$ لدينا: $\arg(bi) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ مثال: $\arg(3i) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$
- $z = bi$; $b < 0$ لدينا: $\arg(bi) \equiv \frac{3\pi}{2} [2\pi]$ مثال: $\arg(-3i) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$
- $z \neq 0$ لدينا: $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z) [2\pi]$ مثال: $\arg(-2-2i) \equiv \pi + \frac{\pi}{4} [2\pi]$ و $\arg(2+2i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$
- $z \neq 0$ لدينا: $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$ مثال: $\arg(\overline{2-2i}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$ و $\arg(2+2i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

أمثلة ميبانيا:



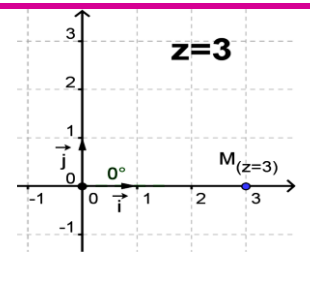
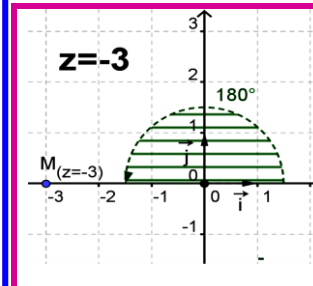
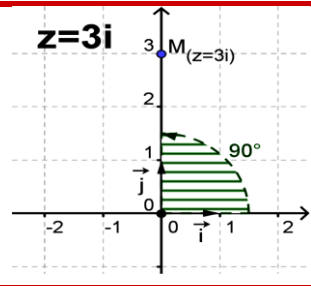
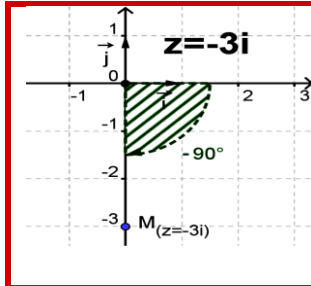
الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء



درس رقم

درس مجموعة الأعداد العقدية الجزء I

الصفحة



07. خاصيات العدة:

خاصية

ليكن z و z' من $\mathbb{C}^*$ لدينا:

$$\arg(z \times z') \equiv \arg z + \arg z' [2\pi]$$

$$p \in \mathbb{Z} ; \arg(z^p) \equiv p \times \arg z [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{1}{z'}\right) \equiv -\arg z' [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' [2\pi]$$

$$\arg(kz) \equiv \arg(z) [2\pi] \text{ إذا كان } k > 0$$

$$\arg(kz) \equiv \pi + \arg(z) [2\pi] \text{ إذا كان } k < 0$$

08. البرهان (انظر الشكل المثلثي و العمليات)

09. مثال:

أوجد عدة : $z_1 = 1 + i$ و $z_2 = 4i(1 + i)$ و $z_3 = (1 - i)$ و $z_4 = (1 - i)(1 + i)^8$ و $z_5 = 1 - i\sqrt{3}$ و $z_6 = \frac{(1 + i)}{(1 - i\sqrt{3})}$

VII. شكل مثلثي لعدد عقدي غير منعدم:

01. نشاط:

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم م. م. م. $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

لنأخذ عدد عقدي $z = x + yi$ غير منعدم و M صورته في المستوى

العقدي (P) إذن: $M \neq O$ مع $\arg(z) \equiv (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv \alpha [2\pi] (C)$

الدائرة المثلثية المرتبطة بالمعلم $(0, \vec{i}, \vec{j})$ تقطع نصف المستقيم

$[O, M)$ في M_0 و لحقها هو $z_0 = \cos \alpha + i \sin \alpha$

لدينا : M_0 و M و O مستقيمية و $\overrightarrow{OM_0}$ و $\overrightarrow{OM}$ لهما نفس الاتجاه و منه: $\overrightarrow{OM} = k \overrightarrow{OM_0}$ مع $k > 0$ (لأن $M \neq O$)

* لحق $\overrightarrow{OM}$ هو $z = x + yi$. لحق $\overrightarrow{OM_0}$ هو $z_0 = \cos \alpha + i \sin \alpha$

لدينا : O و M و M_0 مستقيمية و منه: $\overrightarrow{OM} = k \overrightarrow{OM_0}$. إذن: $z = kz_0 \Leftrightarrow x + yi = k(\cos \alpha + i \sin \alpha)$



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء



الصفحة

درس مجموعة الأعداد العقدية الجزء I

نحصل على : (1) : $x + yi = k(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ نحدد $z = kz_0 : k$ إذن $|z| = |kz_0| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = |k||z_0| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = |k| = k$ نحصل على : (2) : $k = \sqrt{x^2 + y^2}$ • حسب العلاقة (1) و (2) نحصل على العلاقة التالية: $z = x + yi = \sqrt{x^2 + y^2}(\cos \alpha + i \sin \alpha) = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

02. مفردات:

(1) الكتابة : $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ (3) تسمى الشكل المثلثي للعدد العقدي الغير المنعدم $z = x + yi$.(2) الكتابة (3) : نكتبها كذلك على الشكل الآتي: $(3) : z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha) = [|z|, \arg(z)] = [r, \alpha]$

03. تعريف وخاصية:

ليكن عدد عقدي $z = x + yi$ من $\mathbb{C}^*$ و $\arg(z) \equiv \alpha [2\pi]$ و $r = |z|$ ▪ العدد العقدي z يكتب على شكل: $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ أو $z = \sqrt{x^2 + y^2}(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ أو

$$z = [|z|, \arg(z)] = [r, \alpha]$$

▪ كل كتابة من الكتابات السابقة تسمى شكل مثلثي للعدد العقدي الغير المنعدم z .

04. أمثلة:

نعطي الشكل المثلثي ل:

$$z_2 = -5 = 5(-1 + 0i) = 5(\cos \pi + i \sin \pi) = [2, \pi] \quad z_1 = 2 = 2(1 + 0i) = 2(\cos 0 + i \sin 0) = [2, 0]$$

$$z_3 = 7i = 7(0 + i) = 7\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = \left[7, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$z_4 = -\frac{3}{5}i = \frac{3}{5}(0 - i) = \frac{3}{5}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[\frac{3}{5}, -\frac{\pi}{2}\right]$$

$$z_5 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$$

05. ملحوظة: (1) الشكل المثلثي (حالات خاصة)

مثال	$a > 0$ و $b > 0$ الشكل المثلثي
$z = 3 = [3, 0]$	$z = a = [a, 0]$
$z = -3 = [3, \pi]$	$z = -a = [a, \pi]$
$z = 3i = \left[3, \frac{\pi}{2}\right]$	$z = bi = \left[b, \frac{\pi}{2}\right]$
$z = -3i = \left[3, -\frac{\pi}{2}\right]$	$z = -bi = \left[b, -\frac{\pi}{2}\right]$

لدينا : $z = [r, \alpha]$ و $-z = [r, \pi + \alpha]$ و $\bar{z} = [r, -\alpha]$ و $-\bar{z} = [r, \pi - \alpha]$



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء

10

الصفحة

درس مجموعة الأعداد العقدية الجزء I

$$-z = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} + \pi \right] = \left[\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4} \right] \text{ و } \bar{z} = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} \right] \text{ فإن } z = 1+i = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right]$$

$$.z_4 = 1 - \sqrt{3} = \left[2, -\frac{\pi}{3} \right] \text{ و } z_3 = 1 + \sqrt{3} = \left[2, \frac{\pi}{3} \right] \text{ و } 1 - i = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} \right] \text{ و } 1 + i = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right] \text{ ملحوظة: } \mathbf{06}$$

الشكل المثلي و العمليات **07**

$$z' = [r', \alpha'] = r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha') \text{ و } z = [r, \alpha] = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \text{ حيث } \mathbb{C}^* \text{ من } z' \text{ و } z$$

$$z \times z' = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \times r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha') \text{ أو } z \times z' = [r, \alpha] \times [r', \alpha'] = [r \times r', \alpha + \alpha'] \text{ جداء } z' \text{ و } z$$

$$zz' = rr'(\cos(\alpha + \alpha') + i \sin(\alpha + \alpha')) \text{ أو } zz' = rr'(\cos(\alpha + \alpha') + i \sin(\alpha + \alpha'))$$

$$z^n = (r(\cos \alpha + i \sin \alpha))^n = r^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha) \text{ أو } z^n = [r, \alpha]^n = [r^n, n\alpha] \text{ نتيجة لذلك:}$$

$$[1, \alpha]^n = [1^n, n\alpha] = [1, n\alpha] \text{ r = 1 حالة خاصة: نحصل على:}$$

$$\text{أو أيضا: } (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) \text{ هي تسمى صيغة موافر (formule de MOIVRE)}$$

$$\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha')} = \frac{1}{r'}(\cos(-\alpha') + i \sin(-\alpha')) \text{ أو } \frac{1}{z'} = \frac{1}{[r', \alpha']} = [r', -\alpha'] \text{ مقلوب } z'$$

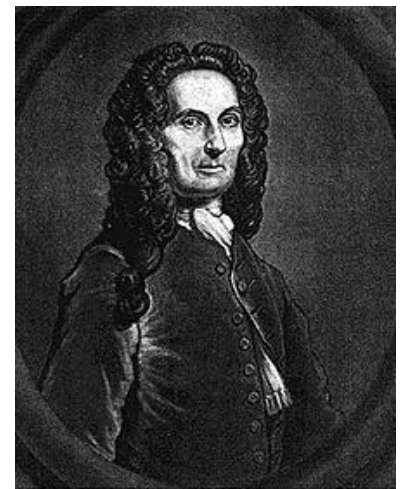
$$\frac{z}{z'} = \frac{r(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha')} = \frac{r}{r'}(\cos(\alpha - \alpha') + i \sin(\alpha - \alpha')) \text{ أو } \frac{z}{z'} = \frac{[r, \alpha]}{[r', \alpha']} = \left[\frac{r}{r'}, \alpha - \alpha' \right] \text{ خارج } z' \text{ و } z$$

$$-z = -1 \times z = [1, \pi][r, \alpha] = [r, \alpha + \pi] = r((\cos(\pi + \alpha) + i \sin(\pi + \alpha)))$$

$$\bar{z} = \overline{r(\cos \alpha + i \sin \alpha)} = r(\cos \alpha - i \sin \alpha) = r(\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)) = [r, -\alpha]$$

Données clés

Naissance	26 mai 1667 Vitry-le-François (France)
Décès	27 novembre 1754 (à 87 ans) Londres (Angleterre)
Domicile	Angleterre
Nationalité	Français
Champs	Mathématiques
Institutions	Royal Society
Diplôme	Académie de Saumur
Renommé pour	Formule de Stirling Théorème de Moivre-Laplace Formule de Moivre



Abraham de Moivre en 1736

08 أمثلة:

نعت الشكل المثلي ل:

$$i \times z = \left[1, \frac{\pi}{2} \right] \times [r, \alpha] = \left[r, \frac{\pi}{2} + \alpha \right]$$



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء

11

الصفحة

درس مجموعة الأعداد العقدية الجزء I

$$z_1 = 3 + 3i = 3(1 + i) = [3, 0] \times \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right] = \left[3\sqrt{2}, 0 + \frac{\pi}{4} \right]$$

$$z_2 = -3 - 3i = -3(1 + i) = [3, \pi] \times \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right] = \left[3\sqrt{2}, \pi + \frac{\pi}{4} \right]$$

$$z_3 = 2i(7 + 7i) = 14i(1 + i) = \left[14, \frac{\pi}{2} \right] \times \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right] = \left[14\sqrt{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right]$$

$$z_4 = \frac{1}{-4 - 4i} = \frac{1}{-4(1 + i)} = \frac{1}{[4, \pi] \times \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right]} = \frac{1}{\left[4\sqrt{2}, \pi + \frac{\pi}{4} \right]} = \left[\frac{1}{4\sqrt{2}}, -\frac{5\pi}{4} \right] = \left[\frac{1}{4\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{4} \right]$$

09. تمرين : أعط الشكل المثلثي ل:

$$z_5 = -\frac{5}{7}i(1 + \sqrt{3}i) \text{ و } z_4 = (-8 - 8\sqrt{3}i)^{15} \text{ و } z_3 = \frac{5i}{-4 - 4i} \text{ و } z_2 = -8 - 8\sqrt{3}i \text{ و } z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

10. ملحوظة: العلاقة التي تربط الشكل الجبري و الشكل المثلثي حيث $[z, \theta] = x + yi$ لدينا: $x = |z| \cos \theta$ و $y = |z| \sin \theta$

VIII. الترميز الأسّي لعدد عقدي غير منعدم:

01. تعريف:

كل عدد عقدي z غير منعدم حيث: $z = [r, \alpha] = [|z|, \arg z]$

نكتبه على شكل: $z = [r, \alpha] = re^{i\alpha}$ وتسمى الشكل الأسّي للعدد z إذن: $z = [r, \alpha] = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) = re^{i\alpha}$

وهذه الكتابة تحقق ما يلي: لكل α و β من $\mathbb{R}$ و n من $\mathbb{Z}$

$$(e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}; \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i(\alpha-\beta)}; \frac{1}{e^{i\beta}} = e^{-i\beta}; e^{i\alpha} \times e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$$

02. مثال:

الشكل الأسّي للأعداد العقدية التالية:

$$z_4 = -2i = 2e^{-\frac{\pi}{2}i}; z_3 = 2i = 2e^{\frac{\pi}{2}i}; z_2 = -2 = 2e^{i\pi}; z_1 = 2 = 2e^{i0}$$

$$z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{6}}; z_2 = 1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}; z_1 = 1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

03. صيغتا أولير: FORMULES D EULER

ليكن α من $\mathbb{R}$ و z و z' عدد عقدي معياره 1 و عمدته α

إذن: $z = \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$ ومنه نستنتج أن:

$$\left. \begin{aligned} z &= \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha} \\ \bar{z} &= \cos \alpha - i \sin \alpha = e^{-i\alpha} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} z + \bar{z} = 2 \cos \alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} \\ z - \bar{z} = 2i \sin \alpha = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} \end{cases}$$



Leonhard EULER
(Bâle 1707, Saint-Petersbourg 1783)

La notation i fut introduite par Euler, le grand mathématicien suisse. Dans ce livre, on notera j à la place de i , notation utilisée pour l'intensité en électricité.



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء

12

الصفحة

درس مجموعة الأعداد العقدية الجزء I

Données clés

Naissance

15 avril 1707

Bâle (Suisse)

Décès

18 septembre 1783 (à 76 ans)

Saint-Petersbourg (Russie)

Nationalité

Suisse

Champs

Mathématiques et physique

Institutions

Académie des sciences de Russie

Académie de Berlin

Renommé pour

Liste complète

Signature

Leonh. Euler

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \end{cases}$$

❖ صيغة أولير

ليكن α من $\mathbb{R}$ و $z = \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \end{cases}$$

كل صيغة تسمى صيغة أولير

04. ملحوظة:

حسب صيغة موافر

$$z^n = [1, \alpha]^n = (e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha} = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

$$(\bar{z})^n = [1, -\alpha]^n = (e^{-i\alpha})^n = e^{-in\alpha} = \cos n\alpha - i \sin n\alpha$$

$$z^n + (\bar{z})^n = 2 \cos n\alpha$$

$$z^n - (\bar{z})^n = 2i \sin n\alpha$$

$$z^n \times (\bar{z})^n = (z \times \bar{z})^n = (1^2)^n = 1$$

❖ صيغ :

$$z^n \times (\bar{z})^n = 1 \text{ و } z^n - (\bar{z})^n = 2i \sin n\alpha \text{ و } z^n + (\bar{z})^n = 2 \cos n\alpha$$

05. تطبيق : الإخطاط :

أخط $\cos^3 x$:لدينا: $z = \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$. حسب صيغة أولير:

$$\left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^3 = \frac{1}{2^3} (z + \bar{z})^3 = \frac{1}{8} (z^3 + 3z^2\bar{z} + 3z(\bar{z})^2 + (\bar{z})^3) = \frac{1}{8} (z^3 + (\bar{z})^3 + 3z\bar{z}(z + \bar{z}))$$

$$= \frac{1}{8} (2 \cos 3x + 3 \times 1 \times 2 \cos x) = \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x$$

خلاصة: $\cos^3 x = 2 \cos 3x + 6 \cos x$

IX. الأعداد العقدية و الهندسة

01. زاوية محددة بمتجهتين و عمدة خارج لحقيهما:



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء

13

الصفحة

درس مجموعة الأعداد العقدية الجزء I

❖ خاصية:

لتكن A و B و C و D أربع نقط من المستوى العقدي مختلفة مثنى مثنى ، ألقاها z_A و z_B و z_C و z_D على التوالي لدينا:

▪ المسافة AB هي : $AB = |z_B - z_A|$.

▪ I منتصف القطعة [AB] لحقها z_I هو : $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

▪ المتجهة $\overrightarrow{AB}$ لحقها هو : $z_B - z_A$.
قياس الزاوية الموجهة ل :

▪ $(\vec{i}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A) [2\pi]$ هو :

▪ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$ هو :

▪ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$ هو :

▪ استقامية ثلاث نقط : A و B و C يكافئ : $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ أي $z_C - z_A = k(z_B - z_A)$ أي $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k \in \mathbb{R}$ مع $A \neq B$

▪ استقامية ثلاث نقط : A و B و C يكافئ : $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv 0 [2\pi]$ أو $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv \pi [2\pi]$

▪ استقامية متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ يكافئ $\frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}}$ عدد حقيقي صرف (مع $z_{\vec{v}} \neq 0$)

▪ تعامد متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ يكافئ $\frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}}$ عدد تخيلي صرف (مع $z_{\vec{v}} \neq 0$)

▪ $(AB) // (CD)$ يكافئ : $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 [2\pi]$ أو $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \pi [2\pi]$ (أي $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 [\pi]$)

▪ $(AB) \perp (CD)$ يكافئ : $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ أو $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ (أي $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$)

▪ النقط A و B و C و D متداورة أو مستقيمة يكافئ : $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$ أو

العلاقة العقدية	المفهوم الهندسي	العلاقة العقدية	المفهوم الهندسي
$ z - z_A = z - z_B $	1. $AM = BM$ 2. M تنتمي لوسط [AB]	$\left \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right = 1$	المثلث ABC متساوي الساقين في A
$ z - z_A = k \ (k > 0)$	M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها A و شعاعها $r = k$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{2} \right] = e^{\pm \frac{\pi}{2} i}$	المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية في A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r; \pm \frac{\pi}{2} \right] = re^{\pm \frac{\pi}{2} i}$	المثلث ABC قائم الزاوية في A	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r; \pm \frac{\pi}{3} \right] = e^{\pm \frac{\pi}{3} i}$	المثلث ABC متساوي الأضلاع



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء

14

الصفحة

درس مجموعة الأعداد العقدية الجزء I

ملحوظة : 02

$$\bullet \quad (\cos \theta + \sin \theta) + (\cos \theta' + \sin \theta') = e^{i\theta} + e^{i\theta'} = 2\cos\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) e^{i\frac{\theta + \theta'}{2}}$$

$$\bullet \quad (\cos \theta + \sin \theta) - (\cos \theta' + \sin \theta') = e^{i\theta} - e^{i\theta'} = 2i\sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) e^{i\frac{\theta + \theta'}{2}}$$

$$\bullet \quad 1 + (\cos \theta + \sin \theta) = 1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$\bullet \quad 1 - (\cos \theta + \sin \theta) = 1 - e^{i\theta} = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$