I. تقديم الدالة $f(x)=\ell n(x)$ (اللوغاريتم النبيري):

01. تقديم الدالة اللوغاريتم النبيري :

❖ نشاط :

لنعتبر الدالة العددية المعرفة ب : $f\ :\ ]0,+\infty[\to\mathbb{R}$

$$x\to f(x)=\frac{1}{x}$$

1) هل f تقبل دالة أصلية على المجال $]0,+\infty[$ ؟ علل جوابك

2) كم توجد من دالة أصلية F ل f حيث $F(1)=0$ ؟

❖ مفردات:

الدالة الأصلية F للدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ على $]0,+\infty[$ حيث $F(1)=0$

- نرمز لها ب $F(x)=\ell n(x)$
- الدالة F تسمى الدالة اللوغاريتمي النبيري

❖ تعريف :

الدالة الأصلية F للدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ والتي تنعدم في 1 (أي $F(1)=0$) تسمى الدالة اللوغاريتم النبيري و يرمز لها ب $F(x)=\ell n(x)$

❖ ملحوظة:

بدلا من كتابة: $F(x)=\ell n(x)$ نكتب: $f(x)=\ell n(x)$

❖ نتائج:

- الدالة $f(x)=\ell n(x)$ مجموعة تعريفها هي $D_f=]0,+\infty[$
- $f(1)=\ell n(1)=0$
- الدالة $f(x)=\ell n(x)$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و دالتها المشتقة هي $f'(x)=[\ell n(x)]'=\frac{1}{x}>0$
- إذن الدالة $f(x)=\ell n(x)$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$
- $\forall a,b\in]0,+\infty[,a<b\Leftrightarrow \ell n(a)<\ell n(b)$.
- $\forall a,b\in]0,+\infty[,a=b\Leftrightarrow \ell n(a)=\ell n(b)$.

01. إشارة $\ell n(x)$ هي كما يلي:

إشارة $\ln(x)$: نعلم أن: $\ln(1)=0$

لدينا : 1) $x>1 \Rightarrow \ln(x)>0$

2) $0<x<1 \Rightarrow \ln(x)<0$

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

تطبيق:

1) مجموعة تعريف الدالة $f(x)=\dfrac{2}{\ln(x)}$

2) مجموعة تعريف الدالة $f(x)=\sqrt{\ln(x)}$

3) حل المعادلة: $\ln(2x)-\ln(x-1)=0$

4) حل المتراجحة: $\ln(2x)-\ln(x-1)\leq 0$

02. الخاصيات الجبرية:

خاصيات:

لكل a b من $]0,+\infty[$

- $\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)$ (هذه الخاصية تقبل)
- $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right)=-\ln(b)$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$
- $\ln(a^r)=r\times\ln(a)$ مع $r\in\mathbb{Q}$
- $\ln(\sqrt{a})=\dfrac{1}{2}\times\ln(a)$ و $\ln(\sqrt[3]{a})=\dfrac{1}{3}\times\ln(a)$

❖ نبرهن على: $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right)=-\ln(b)$.

نأخذ : $b>0$ لدينا:

$$\ln(1)=0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{b}{b}\right)=0 \Leftrightarrow \ln\left(b\times\frac{1}{b}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \ln(b)+\ln\left(\frac{1}{b}\right)=0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{b}\right)=-\ln(b)$$

خلاصة: $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right)=-\ln(b)$

❖ تطبيق:

- نضع: $\ln(2)\simeq 0,69$. أحسب: $\ln(4)$ و $\ln(8)$
- بسط: $\ln(9)+\ln(\sqrt{3})$

- بسط: $\ln\left[\left(\sqrt{5}\right)^{2012}\right]-\ln\left(\sqrt{5}\right)$

❖ ملحوظة:

الكتابة: $\ln(x)\times\ln(x)=\ln^2(x)$

الكتابة: $\ln(x)\times\ln(x)\times\ln(x)=\ln^3(x)$

بصفة عامة: $\underbrace{\ln(x)\times\ln(x)\times\cdots\times\ln(x)}_{n \text{ fois}}=\ln^n(x)$ $n\in\mathbb{N}^*$

❖ تطبيق: بسط : $\ln^2\left(3-\sqrt{2}\right)-\ln^2\left(3+\sqrt{2}\right)$

03. نهايات اعتيادية :

❖ خاصيات:

الدالة: $f(x)=\ln(x)$ معرفة على $D_f=]0,+\infty[$ إذن:

- $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ (ومنه الدالة f تقبل مقارب عمودي معادلته: $x=0$ (اي محور الأراتيب))
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ (ومنه يجب دراسة الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$)
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ ومنه $a=0$ (إذن الدالة f تقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأفاصيل)

❖ تطبيق: أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+2)}{x}$

04. نهايات ضرورية معرفتها :

❖ خاصيات:

- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\times\ln(x)=0^-$
- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(x)}{x-1}=1$.
- $\lim\limits_{x\to0^+}x^n\times\ln(x)=0^-$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^n}=0$; $n\in\mathbb{N}^*$

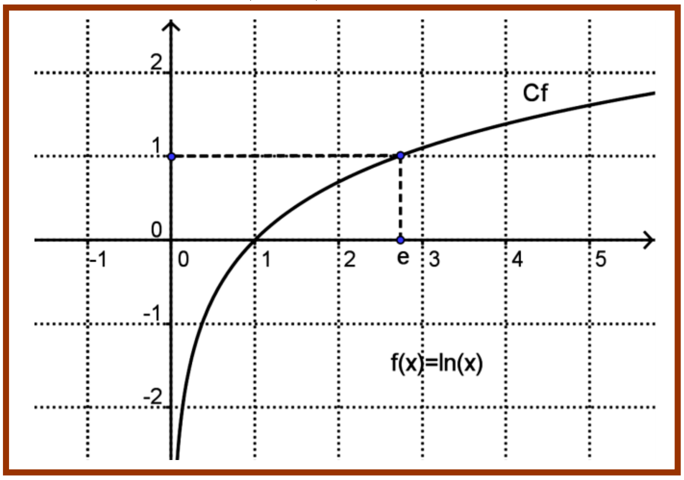
❖ تطبيق: أحسب : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x\times\ln(x)}$ و $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x^3}$

05. دراسة الدالة $f(x)=\ln(x)$:

- حسب ما سبق نستنتج: جدول تغيرات f

x	0	1	$+\infty$
f '	‖	+	
f	‖ $-\infty$	↗ 0 ↗	$+\infty$

- إنشاء منحنى الدالة: f في م. م. م $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$



❖ نتائج:

- الدالة $f\left(x\right)=\ell n\left(x\right)$ متصلة و تزايدية قطعا على $\left]0,+\infty\right[$
- f تقابل من $\left]0,+\infty\right[$ إلى $\left]-\infty,+\infty\right[$ $f\left(\left]0,+\infty\right[\right)=\left]-\infty,+\infty\right[$
- المعادلة $f(x)=1$ (أي $\ell n\left(x\right)=1$) تقبل حلا وحيدا على $\left]0,+\infty\right[$ ونرمز لهذا الحل ب: e مع $\left(e\simeq 2,718\right)$
- $\forall r\in\mathbb{Q}: r=\ell n\left(e^{r}\right)$.

مثال: $3=\ell n\left(e^{3}\right)$ و $-\frac{2}{7}=\ell n\left(e^{-\frac{2}{7}}\right)$

❖ تطبيق: حدد مجموعة تعريف الدالة: $f(x)=\dfrac{1}{3-\ell n\left(x\right)}$

06. المشتقة اللوغاريتمية لدالة:

❖ تعريف و خاصية:

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I $\forall x\in I: u(x)\neq 0$.

- الدالة $x\to\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ تسمى المشتقة اللوغاريتمية للدالة u على المجال I.
- الدالة: $f(x)=\ell n\left|u(x)\right|$ قابلة للاشتقاق على المجال I و دالتها المشتقة هي: $f'(x)=\left[\ell n\left|u(x)\right|\ \right]'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ (أي المشتقة اللوغاريتمية ل u على I).

❖ برهان:

لدينا : u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I إذن u متصلة على I

بمأن : $\forall x\in I: u(x)\neq 0$ إذن $u(x)<0$ و إما $u(x)>0$.

- حالة : $u(x)>0$ ومنه : $f(x)=\ell n\left|u(x)\right|=\ell n\left(u(x)\right)$

بمأن $u(x)>0$ إذن $u(I)\subset\left]0,+\infty\right[$ ومنه الدالة $x\to \ln(x)$ قابلة للاشتقاق على $u(I)$

ومنه :
$$I \xrightarrow{u} u(I) \xrightarrow{\ln} \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow u(x) \longrightarrow \ln(u(x)) = \ln\circ u(x)$$

إذن: f قابلة للاشتقاق لأنها مركبة دالتين قابلتين للاشتقاق ومنه:

$$f'(x)=\left[\ln|u(x)|\right]'=\left[\ln(u(x))\right]'$$
$$=\left[\ln\circ u(x)\right]'=u'(x)\times \ln'\circ u(x)$$
$$=u'(x)\times\frac{1}{u(x)}=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

- حالة : $u(x)<0$ ومنه : (بنفس الطريقة نبرهن على ذلك)

❖ مثال :

نحسب : f' مع $f(x)=\left[\ln|x^2-x|\ \right]$

لدينا: $f'(x)=\left[\ln|x^2-x|\ \right]'=\dfrac{(x^2-x)'}{x^2-x}=\dfrac{2x-1}{x^2-x}$

❖ مثال:

لنعتبر الدالة : $u(x)=3x^2-5x$

أوجد الدالة المشتقة اللوغاريتمية ل u.

الدالة المشتقة اللوغاريتمية ل u هي الدالة: $x\to\dfrac{6x-5}{3x^2-5x}$

❖ استنتاج

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I حيث $\forall x\in I: u(x)\neq 0$

الدوال الأصلية للدالة: $x\to\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ على المجال I هي الدوال التي على شكل $F(x)=\ln|u(x)|+c$ مع $(c\in\mathbb{R})$.

❖ مثال:

- أوجد الدوال الأصلية للدالة: $f(x)=\dfrac{5}{x-2}$ على $\left]2,+\infty\right[$

II. دالة اللوغاريتم للأساس a مع: $a\in\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

❖ تعريف:

ليكن a من $\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ (a عدد موجب قطعا و $a\neq 1$)

الدالة المعرفة كما يلي:

$$f\ :\ \left]0,+\infty\right[\to\mathbb{R}$$
$$x\to f(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

تسمى الدالة اللوغاريتم للأساس a و نرمز لها ب $\log_a$.

❖ ملحوظة:

- في حالة : $a=10$ الدالة : $f(x)=\log_{10}(x)$ تسمى الدالة اللوغاريتم العشري ويرمز لها باختصار: $f(x)=\operatorname{Log}(x)$
- إذن: $\log_{10}=\operatorname{Log}$ ومنه : $\operatorname{Log}(10^r)=r\ ;\ \operatorname{Log}(10)=1\ ;\ \operatorname{Log}(1)=0$

❖ نتائج:

- $\log_a(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ و $\log_a(1)=\dfrac{\ln(1)}{\ln(a)}=0$
- $\log_a(a)=\dfrac{\ln(a)}{\ln(a)}=1$
- $\log_a(e)=\dfrac{\ln(e)}{\ln(a)}=\dfrac{1}{\ln(a)}$

❖ ملحوظة:

$\log_e(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(e)}=\ln(x)$ إذن $\log_e=\ln$

❖ خاصيات:

لكل x y من $]0,+\infty[$ و $a\in]0,1[\cup]1,+\infty[$

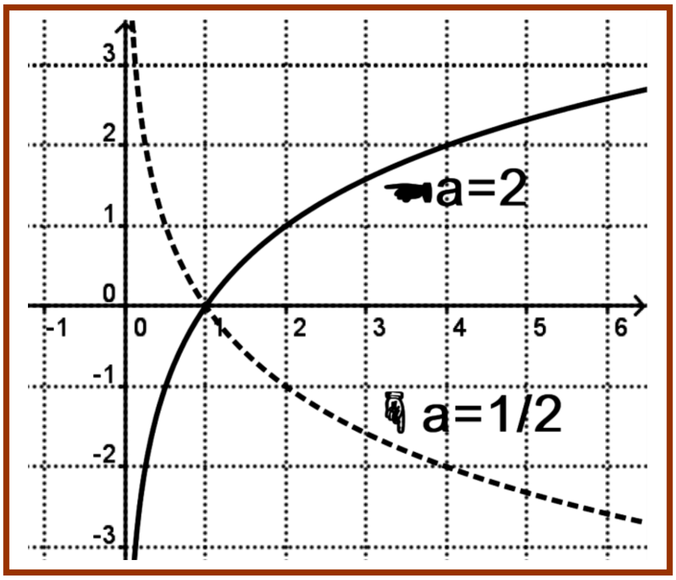
- $\log_a(x\times y)=\log_a(x)+\log_a(y)$
- $\log_a\left(\dfrac{1}{y}\right)=-\log_a(y)$
- $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$
- $\log_a(x^r)=r\times\log_a(x)$ مع $r\in\mathbb{Q}$
- $\log_a(\sqrt{x})=\dfrac{1}{2}\times\log_a(x)$ و $\log_a(\sqrt[3]{x})=\dfrac{1}{3}\times\log_a(x)$

❖ نبرهن على: $\log_a(x\times y)=\log_a(x)+\log_a(y)$

لدينا: $\log_a(x\times y)=\dfrac{\ln(x\times y)}{\ln(a)}=\dfrac{\ln(x)+\ln(y)}{\ln(a)}=\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}+\dfrac{\ln(y)}{\ln(a)}=\log_a(x)+\log_a(y)$

إذن: $\log_a(x\times y)=\log_a(x)+\log_a(y)$

- التمثيل المبياني ل $f(x)=\log_a(x)$.نأخذ: $= \quad a=\frac{1}{2}2$



❖ أمثلة:

بسط التعابير التالية:

1) $\log_2(8)-\log_2\left(\sqrt[3]{32}\right)+\log_2(9)-\log_2(3)$.

2) $\log_3\left(\frac{15}{4}\right)+\log_2\left(\frac{1}{27}\right)+\log_3\left(\frac{4}{5}\right)$.

3) $\log(100)-\log\left(10^{2013}\right)+\log\left(\frac{1}{10^{100}}\right)$.

4) بين أن: $\forall a,b\in\left]1,+\infty\right[\ \log_b(a)=\frac{1}{\log_a(b)}$.

5) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\log_3(2x)\times\left(\log_5(x)-1\right)=0$.

6) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\log_{\sqrt{3}}(3x-1)\geq\log_{\sqrt{3}}(x+1)$

7) أدرس الدالة : $f(x)=\log_5(x+1)$