المتتاليات العددية

تمرين1

لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متتاليتين عدديتين معرفتين بما يلي $\begin{cases} v_0 = 12 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1- نضع $w_n = v_n - u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$

أ- بين أن $(w_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية و أحسب w_n بدلالة n

ب- حدد $\lim w_n$

2-- أ- بين أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية تزايدية و أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية تناقصية

ب- بين أن $u_n \prec v_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$

ج- استنتج أن $(w_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متقاربتين

تمرين2

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $\begin{cases} u_0 = -1 \quad ; \quad u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4} u_n \end{cases}$

1- أحسب $u_2 \quad ; \quad u_3$

2- نعتبر المتتاليتين (a_n) و (b_n) حيث

$$a_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n \quad ; \quad b_n = 2^n u_n$$

أ- بين أن (a_n) متتالية هندسية و أحسب a_n بدلالة n

ب- بين أن (b_n) متتالية حسابية و أحسب b_n بدلالة n

ج- استنتج u_n بدلالة n

3- أ- بين بالترجع $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

ب- حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n}$ ثم $\lim u_n$

تمرين3

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة ب:

$$u_0 = \frac{3}{2} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{u_n^{\,2} + u_n}{u_n^{\,2} + 1}$$

1) –بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \succ 1$

2) أدرس رتابة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3) استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة

أ – بين أن لكل $n \in \mathbb{N}$: $0 \prec u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$

ب – استنتج : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \prec u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

ثم أحسب $\lim u_n$

تمرين4

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة ب :

$$u_1 = \frac{3}{2} \qquad \left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) : u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

1) بين أن : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) : \sqrt{2} \prec u_n \leq \frac{3}{2}$

2) بين أن (u_n) تناقصية قطعا و استنتج أن (u_n) متقاربة

3) أ. بين أن :

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

ب.استنتج : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) : u_{n+1} - \sqrt{2} \prec \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$

ت. استنتج : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) : 0 \prec u_n - \sqrt{2} \prec \frac{1}{2^{n-1}}\left(u_1 - \sqrt{2}\right)$

ث.استنتج $\lim u_n$

تمرين5

نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب: $f(x) = x^2 + \frac{3}{4}x$

1) ضع جدول تغيرات f .

2) نعتبرالمجال $I = \left[0; \frac{1}{4}\right]$ بين أن $f(I) = I$

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب:

$$u_0 = \frac{1}{5} \text{ و } (\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = u_n^{\,2} + \frac{3}{4} u_n$$

أ. بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$

ب. ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ت. بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة

حدد نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

تمرين6

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$

1- بين أن $u_n \prec 2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$

2- بين أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية تزايدية و استنتج أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية متقاربة .

3- استنتج $\lim u_n$

تمرين7

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n(u_n + 1) \end{cases}$

1- أحسب $u_1 \quad ; \quad u_2$.

2- بين أن (u_n) متتالية تزايدية.

3- بين أن $u_{n+1} \succ 2u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ و استنتج

$u_n \succ 3 \times 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4- أحسب $\lim u_n$

تمرين8

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ

$$u_0 = -\frac{5}{4} \qquad u_{n+1} = (u_n + 2)^2 - 2$$

1- بين أن $-2 \prec u_n \prec -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2- بين أن (u_n) متتالية تناقصية و استنتج أن (u_n) متقاربة .

4- أحسب $\lim u_n$.

تمرين9

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ

$$u_0 = \frac{3}{2} \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$$

-1 بين بالترجح أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \prec u_n \prec 2$

-2 تأكد أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{2 + u_n - u_n^2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}$ ثم

استنتج أن (u_n) متتالية تزايدية.

-3 أ- تأكد أن $\dfrac{1}{2 + \sqrt{u_n + 2}} \prec \dfrac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ثم بين أن

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 - u_{n+1} \prec \frac{2 - u_n}{2}$$

ب- بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \prec 2 - u_n \prec \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ثم

استنتج $\lim u_n$

تمرين10

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة ب: $u_1 = 1$ ولكل

$n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = 2u_n + \dfrac{n+2}{n(n+1)}$

(1 - أحسب u_2 و u_3

(2- نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة ب:

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) : v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

أ - بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ هندسية محددا أساسها وحدها الأول

ب - - أحسب v_n ثم u_n بدلالة n

ج – هل $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة

تمرين11

I ـ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي: $f(x) = 3 - \dfrac{9}{4x}$

(1 ضع جدول تغيرات الدالة f .

(2 نضع $I = \left]\dfrac{3}{2}, 3\right]$.

أ ـ بين أن : $f(I) \subset I$.

ب ـ بين أن : $(\forall x \in I) \; f(x) < x$

II ـ لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = 3 - \dfrac{9}{4u_n} \end{cases}$$

(1 أ رسم التمثيل المبياني للدالة f و المستقيم ذي المعادلة $y = x$. مثل على محور الأفاصيل الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية (u_n).

(2 بين بالترجح أن : $\dfrac{3}{2} < u_n \leq 3 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

(3 بين أن المتتالية (u_n) تناقصية . استنتج أنها متقاربة و حدد نهايتها .

(4 نضع $v_n = \dfrac{2}{2u_n - 3}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ ـ بين أن المتتالية (v_n) حسابية محددا أساسها و حدها الأول .

ب ـ أحسب v_n ثم u_n بدلالة n.

ج ـ أحسب من جديد $\lim u_n$.

تمرين12 (بعد درس الدوال اللوغاريتم و الاسية)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = 1 + \sqrt[3]{u_n - 1} \end{cases}$$

.1 بين بالترجح أن : $1 < u_n < 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

.2

.i بين أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \sqrt[3]{u_n - 1}\left(1 - \sqrt[3]{u_n - 1}\right)\left(1 + \sqrt[3]{u_n - 1}\right)$$

.ii استنتج أن المتتالية (u_n) تزايدية .

.iii بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها .

.3 نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي :

$$v_n = \ln(u_n - 1) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \; .$$

.i تحقق أن $v_0 = -\dfrac{1}{3}$ ثم بين أن (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها $\dfrac{1}{3}$.

.ii استنتج أن : $\ln(u_n - 1) = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

.iii احسب u_n بدلالة n .