تمرين 1:

1-أ) $x \in Df \Leftrightarrow (x \neq 1$ و $(x+1)(x-1) \geq 0)$

$\Leftrightarrow [x \neq 1$ و $(x \geq 1$ أو $x \leq -1)]$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty,-1] \cup]1,+\infty[$

إذن $D_f =]-\infty,-1] \cup]1,+\infty[$

ب) $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$

إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

بما أن $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$

فإن $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

و $f(-1) = 0$

2- أ) $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^-} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 0$

إذن f قابلة للاشتقاق عل اليسار في 1-.

و $f'_g(-1) = 0$

ب) $x \in D_f - \{-1\}$

$$f'(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + (x+1)\frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$$

$$= \frac{(x-1)^2 \frac{x+1}{x-1} - (x+1)}{(x-1)^2 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$$

إذن

لكل x من $D_f - \{-1\}$ $\quad f'(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)^2 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$

ج) إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(x+1)(x-2)$

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	//////	‖	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	0	//////	‖ $+\infty$	↘	$3\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

$f(2) = 3\sqrt{3}$

3-أ-)

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim_{|x|\to+\infty}(x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-(x+2)$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{(x+1)^2\dfrac{x+1}{x-1}-(x+2)^2}{(x+1)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+(x+2)}$$

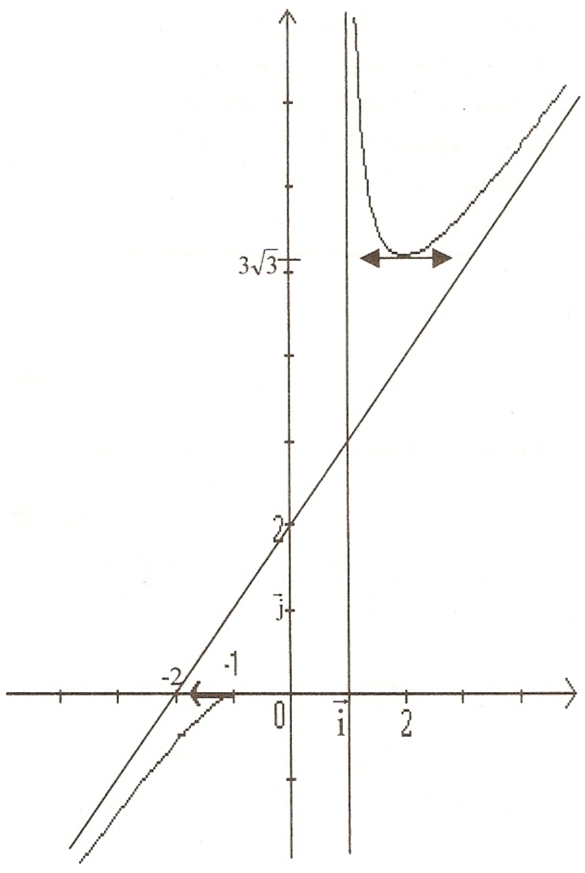
$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{3x+5}{(x^2-1)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+(x+2)(x-1)}$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{3+\dfrac{5}{x}}{(x-\dfrac{1}{x})\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+(1+\dfrac{2}{x})(x-1)}=0$$

إذن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x+2$

مقارب ل (C) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

ب) إنشاء (C)



تمرين 2:

-1 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x-4)\left[-1+\dfrac{2}{\sqrt{4-x}}\right] = -\infty$

-2

$$\lim_{\substack{x\to4\\x\prec4}} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{\substack{x\to4\\x\prec4}} \frac{x-4+2\sqrt{4-x}}{x-4}$$

$$= \lim_{\substack{x\to4\\x\prec4}} \left(1-\frac{2}{\sqrt{4-x}}\right) = -\infty$$

f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 4

يقبل (C) نصف مماس في النقطة A(4,0) يوازي محور الأراتيب.

-3 أ-) لكل x من $]-\infty,4[$

$$f'(x) = 1+2\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}$$

$$= 1-\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{\sqrt{4-x}-1}{\sqrt{4-x}}$$

ب-) إشارة f'(x) هي إشارة $\sqrt{4-x}-1$

$$\sqrt{4-x}-1 = \frac{4-x-1}{\sqrt{4-x}+1} = \frac{3-x}{\sqrt{4-x}+1}$$

لدينا : $\forall x \prec 4 \quad \sqrt{4-x}+1 \succ 0$

إذن إشارة f'(x) هي إشارة $3-x$

$$x \prec 3 \Leftrightarrow f'(x) \succ 0$$

$$3 \prec x \prec 4 \Leftrightarrow f'(x) \prec 0$$

x	$-\infty$		3		4
f'(x)		+	0	−	‖
f(x)	$-\infty$	↗	1	↘	0

$$f(3) = -1+2 = 1$$

-4

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{4}{x}+\frac{2\sqrt{4-x}}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{4}{x}-2\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-4+2\sqrt{4-x}\right) = +\infty$$

إذن يقبل (C) فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذي المعادلته $y = x$

-5 $x \prec 4$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x-4+2\sqrt{4-x} = 0$$

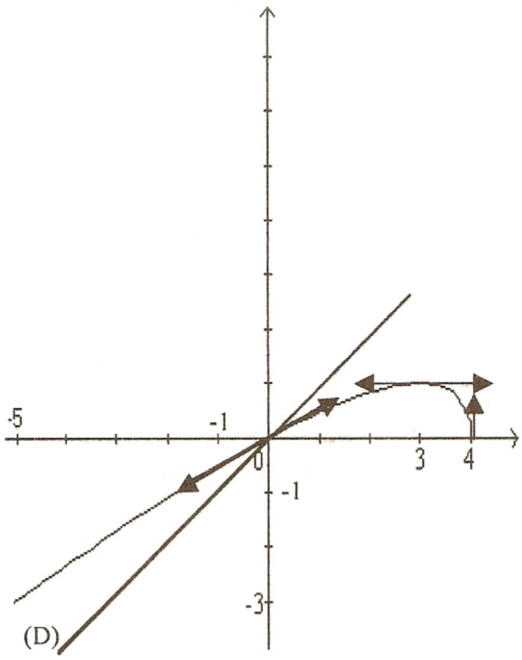
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{4-x} = 4-x$$
$$\Leftrightarrow 4 = 4-x$$
$$\Leftrightarrow x = 0$$

إذن (C) يقطع محور الأفاصيل في أصل المعلم.

6- $f(0)=0$ و $f'(0)=\frac{1}{2}$

$(T): y=\frac{1}{2}x$

7- $f(-5)=-3$



تمرين 3:

1-) $x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + x \succ 0$

$\Leftrightarrow x(x+1) \succ 0$

$x \in \Leftrightarrow x \ ]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

إذن $D_f =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

2-) نعلـــم أن

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} = \frac{1}{x^2+x}$

إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

وبما أن $\lim_{x\to0^+} \sqrt{x^2+x} = 0$ و $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^2+x} = +\infty$

فإن $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

3-) $f\left[2\left(-\frac{1}{2}\right)-x\right] = f(-1-x)$

$= \frac{1}{(x+1)^2-1-x} - \sqrt{(x+1)^2-1-x}$

$= \frac{1}{x^2+2x-1-x} - \sqrt{x^2+2x+1-1-x} = f(x)$

إذن $(\forall x \in D_f)\ f\left[2\left(-\frac{1}{2}\right)-x\right] = f(x)$

المستقيم (Δ) محور تماثل (C) .

4-) ليكن x من D_f

$f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x)^2} - \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$

$= -(2x+1)\left[\frac{1}{(x^2+x)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}\right]$

5-) $(\forall x \in D_f\ ]0,+\infty[)\ \frac{1}{(x^2+x)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \succ 0$

إذن تقبل $f'(x)$ إشارة عكس إشارة $2x+1$ على $]0,+\infty[$

بما أن : $(\forall x\rangle 0)\ \ 2x+1 \succ 0$

فإن : $\forall x \succ 0\ f'(x) \prec 0$

x	0		$+\infty$
f'(x)	‖	-	
f(x)	‖	$+\infty$ ↘	$-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^3+x^2}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2+x}-\left[\sqrt{x^2+x}-x\right]\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

إذن $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)=-\frac{1}{2}$

وبالتالي فإن المستقيم (D) الذي معادلته $y=-x-\frac{1}{2}$ مقارب ل (c) بجوار $+\infty$

7-) $f(x)=0$ $x\succ 0$

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{x^2+x}=\sqrt{x^2+x}$$

$$\Leftrightarrow(x^2+x)^2=1$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-1=0$$

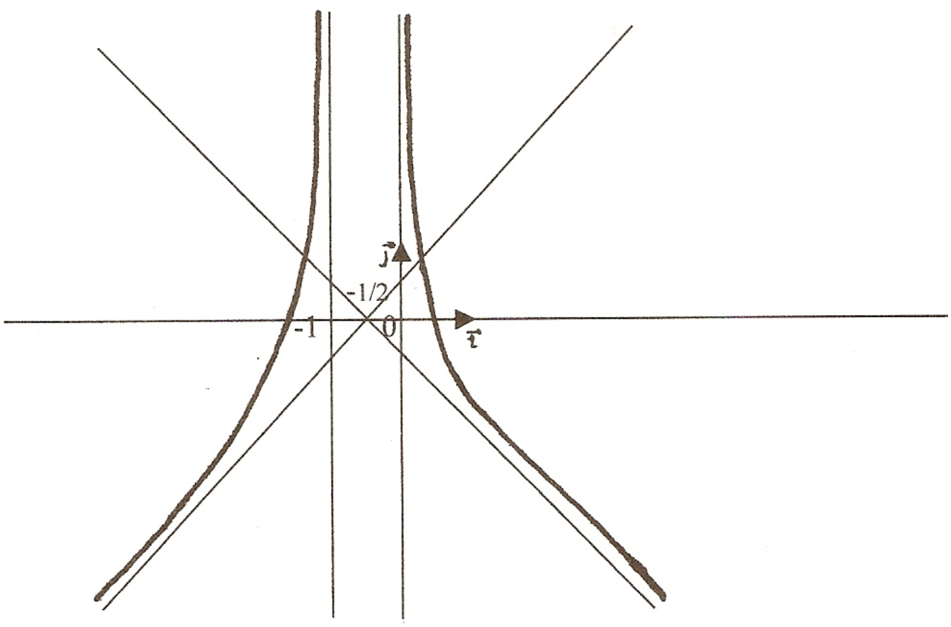
$$\Delta=1+4=5$$

إذن $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(الحل $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ غير مقبول لأنه سالب)

$$S=\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

$\left(A=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},0\right)$ هي نقطة تقاطع (C) ومحور الأفاصيل على $\mathbb{R}^{*+}$.



تمرين 4:

-1 $x\in D \Leftrightarrow 2x+1\succ 0$

$\Leftrightarrow x\in \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$

$D=\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$

لدينا $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^+}(x+1)=\frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^+}\sqrt{2x+1}=0^+$

إذن $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}=+\infty$$

-2 $(D): y=-\frac{1}{2}$ مقارب ل (C)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{2x+1}}=0$$

إذن (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل

3-أ) ليكن x من D .

$$f'(x)=\frac{\sqrt{2x+1}-(x+1)\frac{1}{\sqrt{2x+1}}}{(2x+1)}$$

$$=\frac{2x+1-x-1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$$

$$=\frac{x}{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}=x(2x+1)^{\frac{-3}{2}}$$

ب-)

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
f'(x)	||	−	0	+	
f(x)	|| $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

4-أ) ليكن x من D .

$$f''(x)=(2x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}\times(2x+1)^{\frac{-5}{2}}\times 2$$

$$=(1-x)(2x+1)^{\frac{-5}{2}}$$

$$(\forall x \succ -\frac{1}{2})\ f''(x)=(1-x)(2x+1)^{\frac{-5}{2}}$$

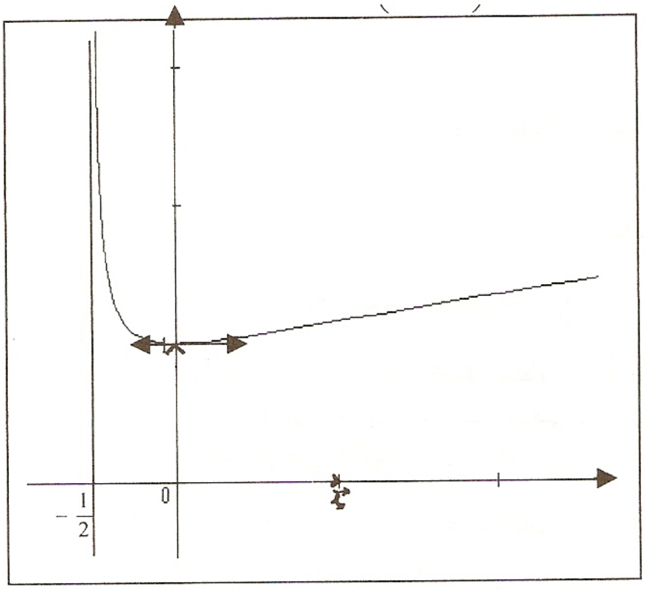
ب-) $x \succ -\frac{1}{2}$

$$f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow 1-x \succ 0$$
$$\Leftrightarrow x \prec 1$$

إذن f'' تنعدم وتغير الإشارة في $x_0=1$

$$f(1)=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ومنه فإن $A\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ نقطة انعطاف ل (C).



6-أ-) g دالة متصلة وتناقصية قطعا على I .

و $J=g(I)=[1,+\infty[$

ومنه فإن g تقابل من I نحو J.

ب-) ليكن x من I و y من J .

$$y=g(x)\Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}=y$$

$$\Leftrightarrow y^2=\frac{x^2+2x+1}{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x(1-y^2)+1-y^2=0$$

$$\Delta'=y^2(y^2-1)\geq 0$$

إذن $x_1=y^2-1-y\sqrt{y^2-1}$ و $x_2=y^2-1+y\sqrt{y^2-1}$

الحل $x_1=y^2-1-y\sqrt{y^2-1}$ غير مقبول لأنه سالب .

إذن $x=x_2=y^2-1+y\sqrt{y^2-1}$

ومنه فإن : $g^{-1}(x)=x^2-1+x\sqrt{x^2-1}$

تمرين 5:

I -1- $\forall x \succ 0 \quad h'(x) = 3(1-2\sqrt{x})$

$h'(x) \succ 0 \Leftrightarrow 1-2\sqrt{x} \succ 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} \prec \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 0 \prec x \prec \frac{1}{4}$

x	0		1/4		$+\infty$
h'(x)		+	0	-	
h(x)		↗	0	↘	

-2 $h\left(\frac{1}{4}\right)$ قيمة قصوية للدالة h .

إذن $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \;\; h(x) \le h\left(\frac{1}{4}\right)$

أي أن $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad h(x) \le 0$

II 1-

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{4x-1}{\sqrt{x}} - 4x\right) = -\infty$$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر.

يقبل(C)نصف مماس عمودي في النقطة ذات الأفصول 0

2-أ-) لكل x من $\mathbb{R}^{*+}$

$$f'(x) = 4\sqrt{x} + (4x-1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 8x$$

$$= \frac{8x-4x-1-16x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{12x-16x\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}} = \frac{4\left(3x-4x\sqrt{x}-\frac{1}{4}\right)}{2\sqrt{x}}$$

وباتالي فإن لكل x من $\mathbb{R}^{*+}$: $f'(x) = \frac{2h(x)}{\sqrt{x}}$

ب-)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0$$

إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

x	0		$+\infty$
f'(x)	||	-	
fx)	1/2	↘	$+\infty$

ج-) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}-4+\frac{1}{2x^2}\right)=-\infty$

يقبل (C) فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب .

3-أ-) g دالة متصلة وتناقصية قطعا على I .

إذن g تقابل من I نحو J .

$$J=g(1)\left]\lim_{x\to+\infty}g(x),g\left(\frac{1}{4}\right)\right]$$

ومنه $J=\left]-\infty,\frac{1}{4}\right]$

ب-) لدينا g تقابل من I نحو J و $0\in J$

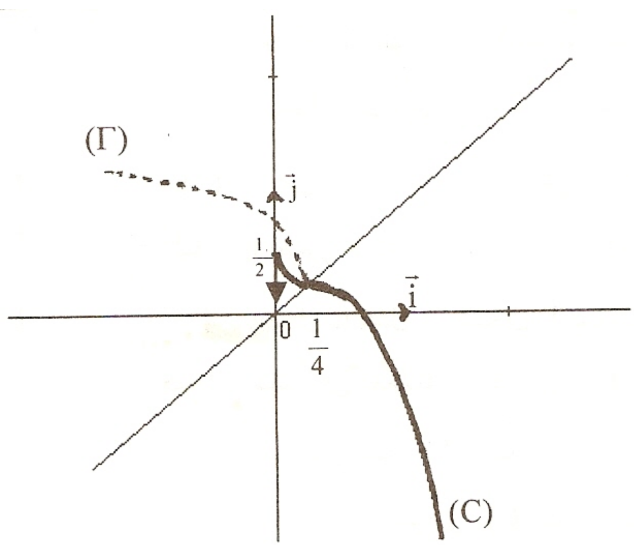
إذن 0 يقبل سابق وحيد في I .

يعني أن المعادلة $g(x)=0$ $x\in I$ تقبل حلا وحيدا α

لدينا $g(\frac{1}{2})=\frac{2\sqrt{2}+1}{4}\succ 0$ و $g(\frac{3}{4})=\sqrt{3}-\frac{7}{4}\prec 0$

إذن $\alpha\in\left]\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right[$

-4



تمرين 6:

1- لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-1\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

يعني أن $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}=+\infty$

إذن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$$

وبما أن $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}=+\infty$

فإن $\lim(x-\sqrt{x^2-1}=-\infty$

ومنه $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$

2-أ-)

$$\lim\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\lim x+\sqrt{x^2-1}-1}{x-1}$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}\right)=\lim_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\left(1+\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=+\infty$$

لأن $\lim_{x\to1}(x+1)=2$ و $\lim_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\sqrt{x^2-1}=0^+$

$$\lim_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$$

وبالتالي فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين 1 و (C) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأراتيب الموجبة عند النقطة $A(1,1)$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}}\frac{x+\sqrt{x^2-1}+1}{x+1}$$

$$=\lim_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}}\left(1+\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=-\infty$$

لأن $\lim_{x\to-1}(x-1)=-2$ و $\lim_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}}\sqrt{x^2-1}=0^+$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=-\infty$$

الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يسار 1 و (C) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو محور الأراتيب الموجبة عند النقطة $B(-1,-1)$

ب-) $x\in\left]-\infty,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\forall x \in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[)\quad f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$$

ج-) لدينا : $(\forall x \in]+1,+\infty[)\sqrt{x^2-1}+x \succ 0$

وبالتالي فإن $(\forall x \in]1,+\infty[) f'(x) \succ 0$

إذن f دالة تزايدية على $]1,+\infty[$

$(\forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[)$

$$f'(x) = \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x^2-1}-x)}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x^2-1}-x)}$$

$(\forall x \in]-\infty,-1[)\left(\sqrt{x^2-1}-x\right) \succ 0$

إذن $(\forall x \in]-\infty,-1[)\ f'(x) \prec 0$

وبالتالي فإن f تناقصية على $]-\infty,-1[$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		$-$	‖		‖	$+$	
f(x)	0	↘	1		1	↗	$+\infty$

3-أ-) $x \in]1,+\infty[$

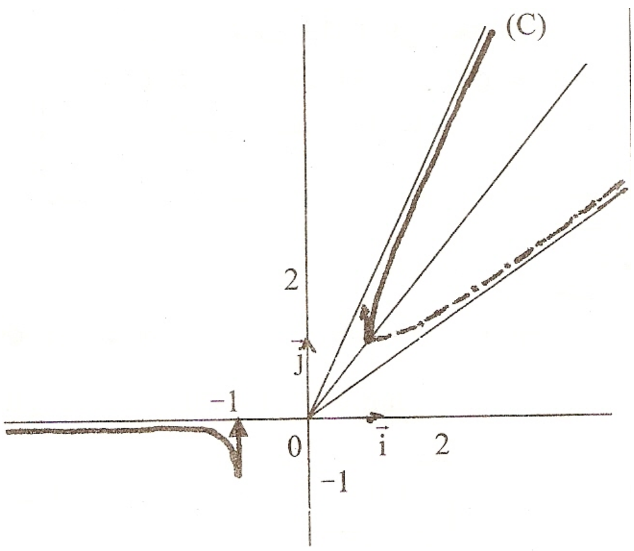
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x] = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right) = +\infty$

إذن المنحنى (C) يقبل مقارب بجوار $+\infty$ معادلته $y = 2x$

ب-)



1- g دالة متصلة وتزايدية قطعا على I .

و $g(I) = I$

إذن g تقابل من I نحو I.

ومنه فإن g تقبل دالة عكسية

g^{-1} معرفة على I .

تمرين 7:

1-أ-) $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

ب-) إذا كان $x \in \mathbb{R}^*$ فإن $-x \in \mathbb{R}^*$

و $f(-x) = -2x - \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{-x}$

$= -2x + \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x} = -f(x)$

إذن $\forall \in \mathbb{R}^*\ f(-x) = -f(x)$

إذن f دالة فردية.

-2 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x - \dfrac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)}}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x - \sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}\right) = +\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

1-3 -) $x \in I$

$f(x) - (2x-1) = 2x - \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x} - 2x + 1$

$= 1 - \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x} = \dfrac{x - \sqrt{x^2+3}}{x}$

ب-)

$f(x) - (2x-1) = \dfrac{x^2 - (x^2+3)}{x\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)} = \dfrac{-3}{x\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)}$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(x+\sqrt{x^2+3}\right) = +\infty$

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3}{x\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)} = 0$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - (2x-1)\right] = 0$

وبالتالي فإن (Δ) مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

ج-) لدينا $(\forall x \in I)\ \dfrac{-3}{x\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)}$

أي أن $f(x) \prec 2x-1 \qquad (\forall x \in I)$

إذن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (Δ) على المجال $]0,+\infty[$

4-أ)
$$x \neq 0;\ f'(x) = 2 - \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}} - \sqrt{x^2+3}}{x^2}$$
$$= 2 - \frac{x^2 - (x^2+3)}{x^2\sqrt{x^2+3}}$$
$$= 2 + \frac{3}{x^2\sqrt{x^2+3}}$$

$$(\forall x \in I)\ \ f'(x) = 2 + \frac{3}{x^2\sqrt{x^2+3}}$$

ب-)

x	0		$+\infty$
f'(x)	||	+	
f(x)	|| $-\infty$	↗	$+\infty$

5-أ) تقاطع (C) مع محور الأفاصيل على I .

$$\begin{cases} x \in I \\ f(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in I \\ x^2 - \sqrt{x^2+3} = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \sqrt{x^2+3} \\ x \in I \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4 - x^2 - 3 = 0 \\ x \in I \end{cases}$$

المعادلة $4x^4 - x^2 - 3 = 0$ يؤول حلها إلى معادلة من الدرجة الثانية .

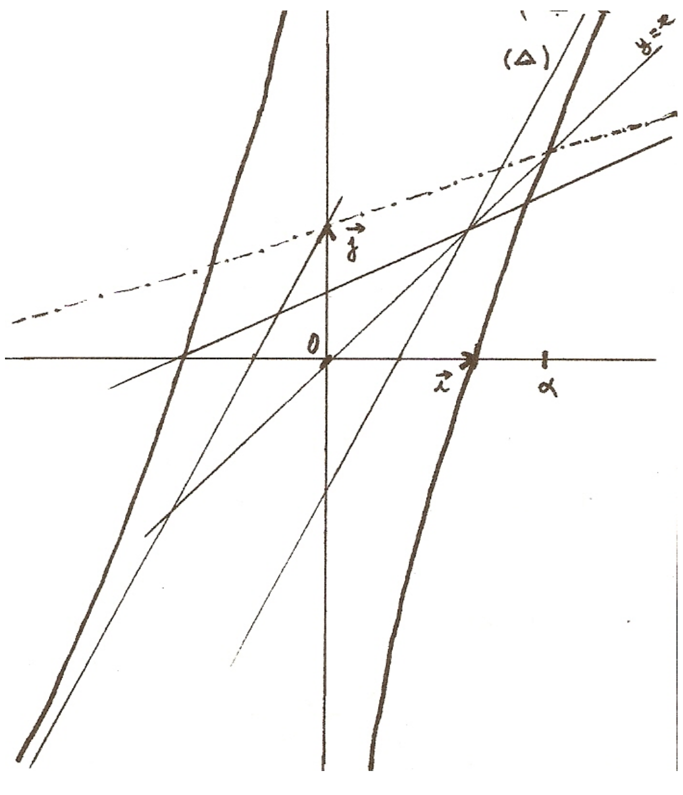
$$4x^4 - x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 = 1 \text{ أو } x^2 = -\frac{3}{4})$$
$$\Leftrightarrow (x = 1 \text{ أو } x = -1)$$
$$\left.\begin{matrix} f(x)=0 \\ x \in I \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x = 1$$

إذن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في النقطة $A(1,0)$ على المجال I

معادلة (T) مماس (C) عند النقطة A هي:

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$T : y = 3x - 3$$

ب-



لدينا f' دالة فردية

إذن منحناها (C) متماثل بالنسبة للنقطة O أصل المعلم.

6-

g دالة متصلة وتزايدية قطعا على المجال I .

و $g(1) = \mathbb{R}$

إذن g تقابل من I نحو $\mathbb{R}$

تمرين 8:

1-أ-)

لدينا $\lim_{x\to+\infty}(x+2)(x-3)=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

إذن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ب- $\lim_{\substack{x\to-2\\x\succ-2}}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{\substack{x\to-2\\x\succ-2}}\frac{2\sqrt{(x+2)(x+3)}}{x+2}$

$$=\lim_{\substack{x\to-2\\x\succ-2}}\frac{2(x+2)(x+3)}{(x+2)\sqrt{(x+2)(x+3)}}=\lim_{\substack{x\to-2\\x\succ-2}}\frac{2(x+3)}{\sqrt{(x+2)(x+3)}}$$

بما أن $\lim_{x\to-2}2(3-x)=10$

$\lim_{\substack{x\to-2\\x\succ-2}}\sqrt{(x+2)(x+3)}=0^+$

فإن $\lim_{\substack{x\to-2\\x\succ-2}}\frac{f(x)}{x+2}=+\infty$

$$\lim_{\substack{x\to3\\x\succ3}}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{\substack{x\to3\\x\succ3}}\frac{2\sqrt{(x+2)(x-3)}}{x-3}$$

$$=\lim_{\substack{x\to3\\x\succ3}}\frac{2(x+2)}{\sqrt{(x+2)(x+3)}}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to3\\x\succ3}}\frac{f(x)}{x-3}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to3\\x\prec3}}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{\substack{x\to3\\x\prec3}}\frac{2\sqrt{(x+2)(3-x)}}{x-3}$$

$$\lim_{\substack{x\to3\\x\prec3}}\frac{-2(x+2)}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to3\\x\prec3}}\frac{f(x)}{x-3}=-\infty$$

2-أ-)

$$\begin{cases}f(x)=2\sqrt{(x+2)(3-x)};-2\prec x\prec3\\ f(x)=2\sqrt{(x+2)(x-3)};x\succ3\end{cases}$$

إذا كان $x\in]-2,3[$

فإن $f'(x)=\frac{2[(x+2)(3-x)]'}{2\sqrt{(x+2)(3-x)}}$

أي أن $(\forall x\in]-2,3[)\ \ f'(x)=\frac{1-2x}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}$

وبالتالي فإن إشارة $f'(x)$ على $]-2,3[$ هي إشارة $1-2x$ (لأن $0\prec\sqrt{(x-2)(3-x)}$)

إذا كان $x\in]3,+\infty[$

فإن $f'(x)=2\dfrac{[(x+2)(x-3)]'}{2\sqrt{(x+2)(x-3)}}$

$$(\forall x\in]3,+\infty[)\quad f'(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{(x+2)(x-3)}}$$

$$x\succ 3\Rightarrow x\succ\frac{1}{2}\Rightarrow 2x-1\succ 0$$

$$\Rightarrow f'(x)\succ 0$$

إذن $\forall x\in]3,+\infty[\ f'(x)\succ 0$

ب-

x	-2		$1/2$		3		$+\infty$
f'(x)	||	+	0	−	||	+	
f(x)	0	↗	5	↘	0	↗	$+\infty$

3-أ)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{(x+2)(x-3)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x^2-x-6}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\sqrt{x^2 1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}=2$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{6}{x^2}=0$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{(x+2)(x-3)}-2x\right]$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)(x-3)-x^2}{\sqrt{(x+2)(x-3)}+x}$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{6-x}{\sqrt{(x+2)(x-3)}+x}$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{6}{x}-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x}}+1} = -1$$

إذن المستقيم (D) مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

ب-) ليكن x عنصرا من $]3,+\infty[$

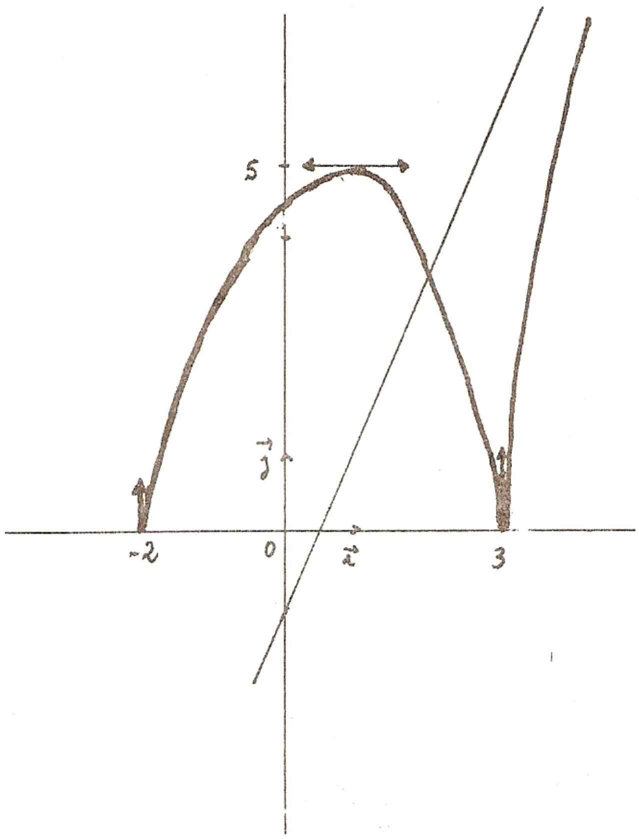
$$f(x)-(2x-1) = 2\sqrt{(x+2)(x-3)}-(2x-1)$$

$$= \frac{4(x+2)(x-3)-(2x-1)^2}{2\sqrt{(x+2)(x-3)}+(2x-1)}$$

$$= \frac{-25}{2\sqrt{(x+2)(x-3)}+(2x-1)} \prec 0$$

لكل x من $]3,+\infty[\,;\ f(x)\prec 2x-1$

إذن المستقيم (D) يوجد تحت المنحنى (C) على المجال $]3,+\infty[$.



تمرين 9:

-1

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2+2x \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x(x+2) \geq 0$$
$$x \in]-\infty,2] \cup [0,+\infty[$$
$$D_f =]-\infty,2] \cup [0,+\infty[$$

بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+2x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+2x} = +\infty$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

-2 $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+\sqrt{x^2+2x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}-x}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2}-x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1}$$

لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right) = 1$

إذن $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}-1\right) = -2$

وبالتالي فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

ومنه فإن المنحنى (C) يقبل مقارب بجوار $-\infty$ معادلته $y=-1$

-3

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ x \prec -2}} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x \prec -2}} \frac{x+\sqrt{x^2+2x}+2}{x+2}$$

$$= \lim_{\substack{x \to -2 \\ x \prec -2}} \left(1+\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+2}\right) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x \prec -2}} \left(1+\frac{x^2+2x}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x \to -2 \\ x \prec -2}} \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}}\right) = -\infty$$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يسار 2-.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \succ 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \succ 0}} \left(1+\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \succ 0}} \left(1 + \frac{x(x+2)}{x\sqrt{x^2+2x}}\right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \succ 0}} \left(1 + \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x}}\right)$$

إذن $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \succ 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$

وبالتالي فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين 0.

4-أ-) ليكن x من $\left]-\infty,-2\right[\cup \left]0,+\infty\right[$

إذن $f'(x) = 1 + \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} = 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$

$$(\forall x \in D - \{-2,0\})$$

$$x \succ 0 \Rightarrow x+1 \succ 0 \Rightarrow x+1+\sqrt{x^2+2x} \succ 0$$

$$\forall x \in \left]0,+\infty\right[\quad f'(x) \succ 0$$

إذن f تزايدية على المجال $\left]0,+\infty\right[$

ليكن x من D .

$$x+1+\sqrt{x^2+2x} = \frac{(x+1)^2-(x^2+2x)}{(x+1)-\sqrt{x^2+2x}}$$

$$= \frac{1}{(x+1)-\sqrt{x^2+2x}}$$

$$x \prec -2 \Rightarrow \begin{cases} x+1 \prec -1 \prec 0 \\ -\sqrt{x^2+2x} \prec 0 \end{cases}$$

إذن $\forall x \in \left]-\infty,-2\right[\quad f'(x) \prec 0$

وبالتالي فإن الدالة f تناقصية على $\left]-\infty,-2\right[$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'(x)		-	|		||	+	
f(x)	-1	$\searrow$	-2		0	$\nearrow$	$+\infty$

5-أ-)

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x)-(2x+1)] = \lim_{x \to +\infty} \left[x+\sqrt{x^2+2x}-2x-1\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2+2x}-(x+1)\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2x-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x}+(x+1)}$$

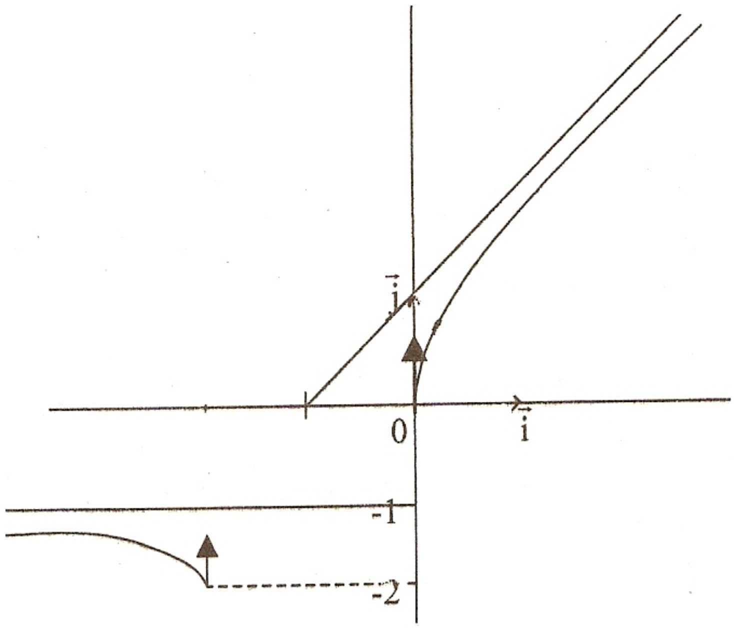
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2+2x}+x+1}$$

بما أن $\lim_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+2x} = +\infty$

وبالتالي فإن $\lim \frac{-1}{\sqrt{x^2+2x}+x+1} = 0$

يعني أن $\lim_{x \to +\infty} [f(x)-(2x+1)] = 0$

وبالتالي فإن المستقيم الذي معادلته $y = 2x+1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$



6-أ-) g دالة متصلة وتزايدية قطعا على $[0,+\infty[$ و $g([0,+\infty[) = [0,+\infty[$

إذن g تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$.

ليكن y من $\mathbb{R}^+$.

نقوم بحل المعادلة $y = g(x)$ $x \geq 0$

$$\begin{pmatrix} y = g(x) \\ x \geq 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+\sqrt{x^2+2x} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[y-x = \sqrt{x^2+2}, x \geq 0 \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[(y-x)^2 = x^2+2x, x \geq 0 \right]$$

$$\left[\Leftrightarrow (y^2-2xy+x^2 = x^2+2x, x \geq 0) \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[(2y+2)x-y^2 = 0, x \geq 0 \right]$$

بما أن $y \geq 0$ فإن $2y+2 \neq 0$

وبالتالي فإن $x = \frac{y^2}{2y+2}$

$$g^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto \frac{x^2}{2x+2}$$

تمرين 10:

a-1 – تحديد D .

بما أن : $D=\{x\in IR\,/\,2x\neq 0 \quad و \quad 27+x^2\geq 0\}$

وبما أن : $27+x^2\geq 0$ لكل x من IR

فإن : $D=\{x\in IR\,/\,2x\neq 0\}$

$=\{x\in IR\,/\,x\neq 0\}$

إذن : $D=IR^*$

$=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

b- حساب نهايات f عند محدات D

$$\lim_{|x|\to+\infty}\sqrt{27+x^2}=+\infty$$

و $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x+1}{2x}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$

إذن : $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty}f(x)=+\infty$

- لدينا : $\displaystyle\lim_{x\to0}\sqrt{27+x^2}=\sqrt{27}$

ولدينا : $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{x+1}{2x}=+\infty$ و $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\frac{x+1}{2x}=-\infty$

إذن $\displaystyle\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ و $\displaystyle\lim_{x\to0^-}f(x)=-\infty$

a-2 التحقق من صحة المتساوية

ليكن x عنصرا من IR^*

$$f(x)-\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{x+1}{2x}\sqrt{27+x^2}-\frac{x+1}{2}$$

$$=\frac{x+1}{2x}(\sqrt{27+x^2}-x)=\frac{x+1}{2x}\frac{(\sqrt{27+x^2}-x)(\sqrt{27+x^2}+x)}{\sqrt{27+x^2}+x}$$

$$=\frac{x+1}{2x}.\frac{27+x^2-x^2}{\sqrt{27+x^2}+x}$$

إذن : $\displaystyle f(x)-\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{x+1}{2x}\left(\frac{27}{\sqrt{x^2+27}+x}\right)$ لكل x من IR^*

b- الاستنتاج

بما أن : $\displaystyle f(x)-\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{x+1}{2x}\left(\frac{27}{\sqrt{x^2+27}+x}\right)$ لكل x من IR^*

وبما أن $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{2x}=\frac{1}{2}$ و $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{27}{\sqrt{x^2+27}+x}=0$

فإن : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{2x}\left(\frac{27}{\sqrt{x^2+27}+x}\right)=0$

إذن : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)-\left(\frac{x+1}{2x}\right)=0$

وبالتالي فإن المستقيم (Δ_1) ذا المعادلة $y=\dfrac{x+1}{2}$

هو بالفعل مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

c- لنبين أن (Δ_2) مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$

ليكن x عنصرا من IR^*

$$f(x)-\left(-\frac{x+1}{2}\right)=\frac{x+1}{2x}\sqrt{27+x^2}+\frac{x+1}{2}$$

$$=\frac{x+1}{2x}(\sqrt{27+x^2}+x)=\frac{(x+1)(27+x^2-x^2)}{2x(\sqrt{27+x^2}-x)}$$

$$=\frac{x+1}{2x}.\frac{27}{\sqrt{27+x^2}-x}$$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{2x}=\frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{27}{\sqrt{27+x^2}-x}=0$

فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{2x}\frac{27}{\sqrt{27+x^2}-x}=0$

إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-\left(-\frac{x+1}{2}\right)=0$

وبالتالي فإن المستقيم (Δ_2) ذا المعادلة $y=-\frac{x+1}{2}$ هو بالفعل مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$

3- a- حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR^* ولدينا لكل x من IR^*

$$f'(x)=\frac{\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix}}{4x^2}\sqrt{27+x^2}+\frac{x+1}{2x}.\frac{2x}{2\sqrt{27+x^2}}$$

$$=\frac{-\sqrt{27+x^2}}{2x^2}+\frac{x+1}{2\sqrt{27+x^2}}=\frac{x^2(x+1)-(27+x^2)}{2x^2\sqrt{x^2+27}}$$

$$=\frac{x^3+x^2-27-x^2}{2x^2-\sqrt{x^2+27}}=\frac{x^3-27}{2x^2\sqrt{x^2+27}}$$

b- تغيرات f

إشارة $f'(x)$ هي إشارة x^3-27

ولدينا لكل x من IR^* : $f'(x)=0\Leftrightarrow x^3-27=0$

$$\Leftrightarrow x^3=27$$

$$\Leftrightarrow x=3$$

و $f'(x)\succ 0\Leftrightarrow x^3-27\succ 0$

$$x^3\succ 27$$

$$x\succ 3$$

و $f'(x)\prec 0\Leftrightarrow x\prec 3$

إذن الدالة f تزايدية على المجال $[3,+\infty[$ وتناقصية على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,3]$

c- جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$		||	$+\infty$ ↘	4	↗ $+\infty$	

4-a- تقاطع (C) مع محور الأفاصيل

ليكن x عددا حقيقيا

بما أن : $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)\sqrt{27+x^2}}{2x}=0$

$\Leftrightarrow x+1=0$

$\Leftrightarrow x=-1$

فإن محور الأفاصيل يقطع (C) في النقطة $B(-1,0)$

b- رسم (C)