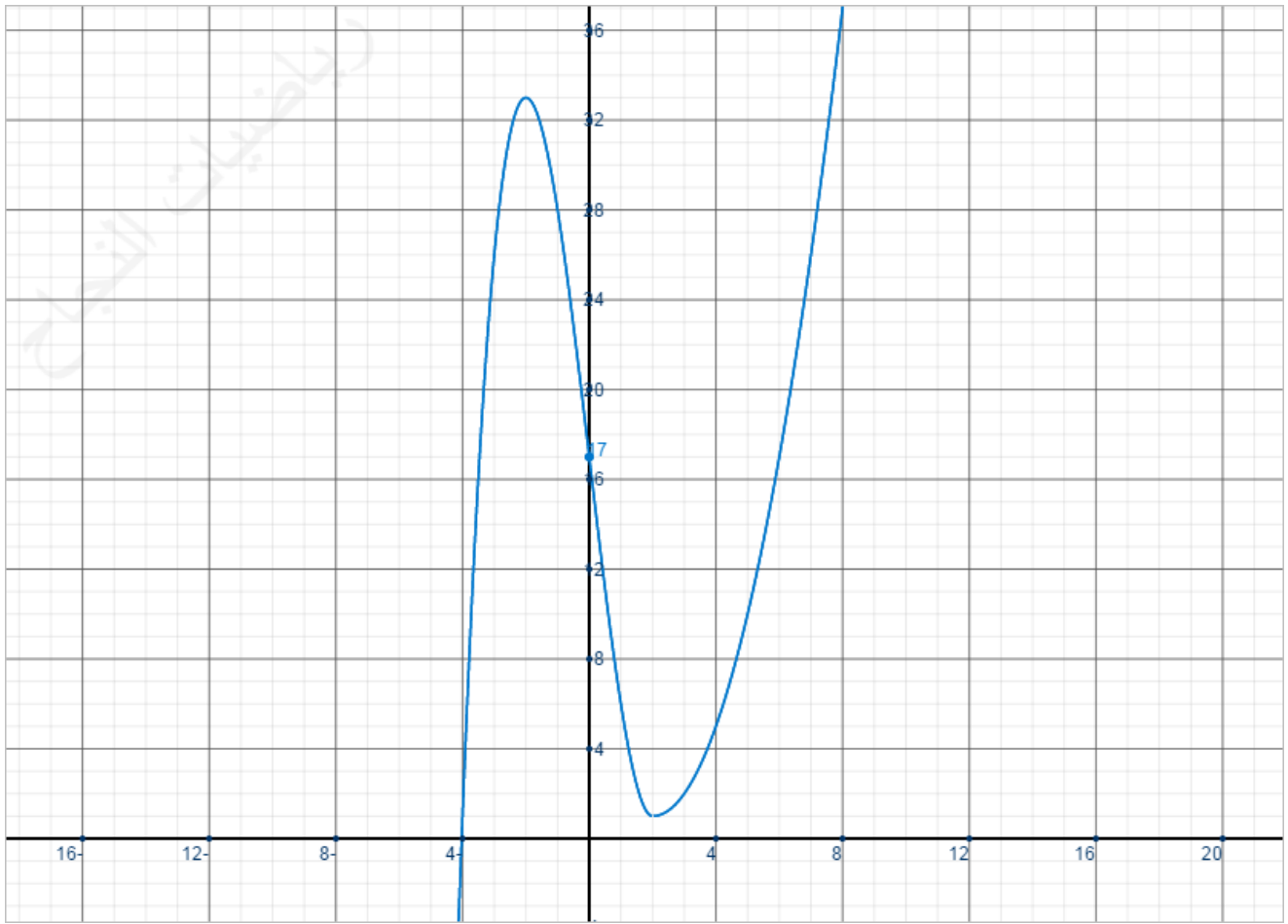


السلسلة 2	دراسة الدوال حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية																
تمرين 1: $\begin{cases} f(x) = x^2 - 4x + 5; & x \geq 2 \\ f(x) = x^3 - 12x + 17; & x < 2 \end{cases}$																		
<p>لدينا: $f(2) = 1$ و $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} x^2 - 4x + 5 = 4 - 8 + 5 = 1$</p> <p>و $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} x^3 - 12x + 17 = 8 - 24 + 17 = 1$</p> <p>إذن: $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = f(2) = 1$ ، بالتالي: f متصلة في 2</p>																		
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 12x + 17 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 4x + 5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$																		
<p>عند حساب النهاية جوار $+\infty$ يجب استعمال التعبير $x^2 - 4x + 5$ لكونه تم تعريفه في المجال $[2, +\infty[$ وفي $-\infty$ يجب استعمال التعبير $x^3 - 12x + 17$ لكونه تم تعريفه في المجال $]-\infty, 2[$</p>																		
<p>نعلم أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ولدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 5}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$</p> <p>وأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ولدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 12x + 17}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$</p> <p>إذن Cf يقبل فرعا شلجيميا باتجاه محور الأرتايب جوار $+\infty$ و $-\infty$</p>																		
<p>لدينا: $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x^2 - 4x + 5 - 1}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{(x - 2)^2}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} x - 2 = 0$</p> <p>و: $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x^3 - 12x + 17 - 1}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x^3 - 12x + 16}{x - 2}$</p> <p>و: $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x - 8)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} x^2 + 2x - 8 = 0$</p> <p>بما أن: $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 0 = f'(2) = 0$ فإن f تقبل الاشتقاق في 2 ولدينا: $f'(2) = 0$</p>																		
<p>يجب دائما استعمال التعريف لدراسة قابلية اشتقاق دالة في نقطة تمثل طرف مجال</p> <p>في الاشتقاق على اليسار قمنا بتعميل $x^3 - 12x + 16$ وذلك بعد قسمتها على $x - 2$ مستعملين القسمة الاقليدية</p>																		
<p>لدينا: $\forall x \in]2; +\infty[\quad f'(x) = (x^2 - 4x + 5)' = 2x - 4 = 2(x - 2)$</p> <p>و: $\forall x \in]-\infty; 2[\quad f'(x) = (x^3 - 12x + 17)' = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2)$</p>																		
<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 25%;">$x - 2$</td> <td style="width: 25%; background-color: #cccccc;">-</td> <td style="width: 25%; background-color: #cccccc;">-</td> <td style="width: 25%;">+</td> </tr> <tr> <td>$(x - 2)(x + 2)$</td> <td>+</td> <td>-</td> <td style="background-color: #cccccc;">+</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td>+</td> <td>-</td> <td>+</td> </tr> </table> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 25%;">$f(x)$</td> <td style="width: 25%;"> $-\infty \nearrow$ \searrow </td> <td style="width: 25%;"> \nearrow \searrow </td> <td style="width: 25%;"> \nearrow $+\infty$ </td> </tr> </table>			$x - 2$	-	-	+	$(x - 2)(x + 2)$	+	-	+	$f'(x)$	+	-	+	$f(x)$	$-\infty \nearrow$ \searrow	\nearrow \searrow	\nearrow $+\infty$
$x - 2$	-	-	+															
$(x - 2)(x + 2)$	+	-	+															
$f'(x)$	+	-	+															
$f(x)$	$-\infty \nearrow$ \searrow	\nearrow \searrow	\nearrow $+\infty$															



7

$$\begin{cases} f(x) = -1 + \sqrt{x+1} ; x \geq 0 \\ f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1} ; x < 0 \end{cases} \quad \text{تمرين 2 :}$$

1 لدينا : $Df = \{x \geq 0 / x+1 \geq 0\} = [0, +\infty[$ (لأن $x \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 1 \geq 0$)
على المجال : $] -\infty, 0[$ ، لدينا : $] -\infty, -1[\cup] -1, 0[$
بالتالي : $Df = [0, +\infty[\cup] -\infty, -1[\cup] -1, 0[=] -\infty, -1[\cup] -1, +\infty[$

2 لدينا : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x - 1 + \frac{1}{x+1} = -1 + 1 = 0$ و $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -1 + \sqrt{x+1} = -1 + 1 = 0$
إذن : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = f(0) = 0$ ، بالتالي : f متصلة في 0

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + \frac{1}{x+1} = -\infty \quad (-\infty + 0 \rightarrow -\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \sqrt{x+1} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} x - 1 + \frac{1}{x+1} = +\infty \quad (-2 + (+\infty) \rightarrow +\infty)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} x - 1 + \frac{1}{x+1} = -\infty \quad (-2 + (-\infty) \rightarrow -\infty)$$

👉 لاحظ أننا استعملنا التعبير $x - 1 + \frac{1}{x+1}$ في كلا النهايتين و ذلك لكون $] -\infty, 0[\cup] -1, +\infty[$

4 لدينا :
 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x - 1 + \frac{1}{x+1}}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x^2 - 1 + 1}{x(x+1)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x^2}{x(x+1)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x}{x+1} = 0$$

و بما أن $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ فإن f لا تقبل الاشتقاق في الصفر

لدينا : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}$ إذن Cf يقبل نصف مماس يمين الصفر معادلته :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ x \geq 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} y = f'_d(0)(x - 0) + f(0) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

لدينا : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ إذن Cf يقبل نصف مماس أفقي يسار الصفر (معادلته $\begin{cases} y = 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$)

لدينا : $\forall x > 0 \quad f'(x) = (-1 + \sqrt{x+1})' = \frac{(x+1)'}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$

و $\forall x < 0 \quad f'(x) = \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)' = 1 - \frac{(x+1)'}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

منه:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$				+
$x(x+2)$	+	-		+
$f'(x)$	+	-		+
$f(x)$	$-\infty$		0	$+\infty$

5

نعلم أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} + \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} + \sqrt{\frac{x+1}{x^2}} = 0 + \sqrt{0} = 0$

إذن Cf يقبل فرعاً شلجياً باتجاه محور الأفاصيل جوار $+\infty$

ونعلم أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1 + \frac{1}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+1} = 1$

منه : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = -1 + \frac{1}{x+1} = -1$

إذن Cf يقبل مقارباً مائلاً جوار $-\infty$ معادلته : $(\Delta): y = x - 1$

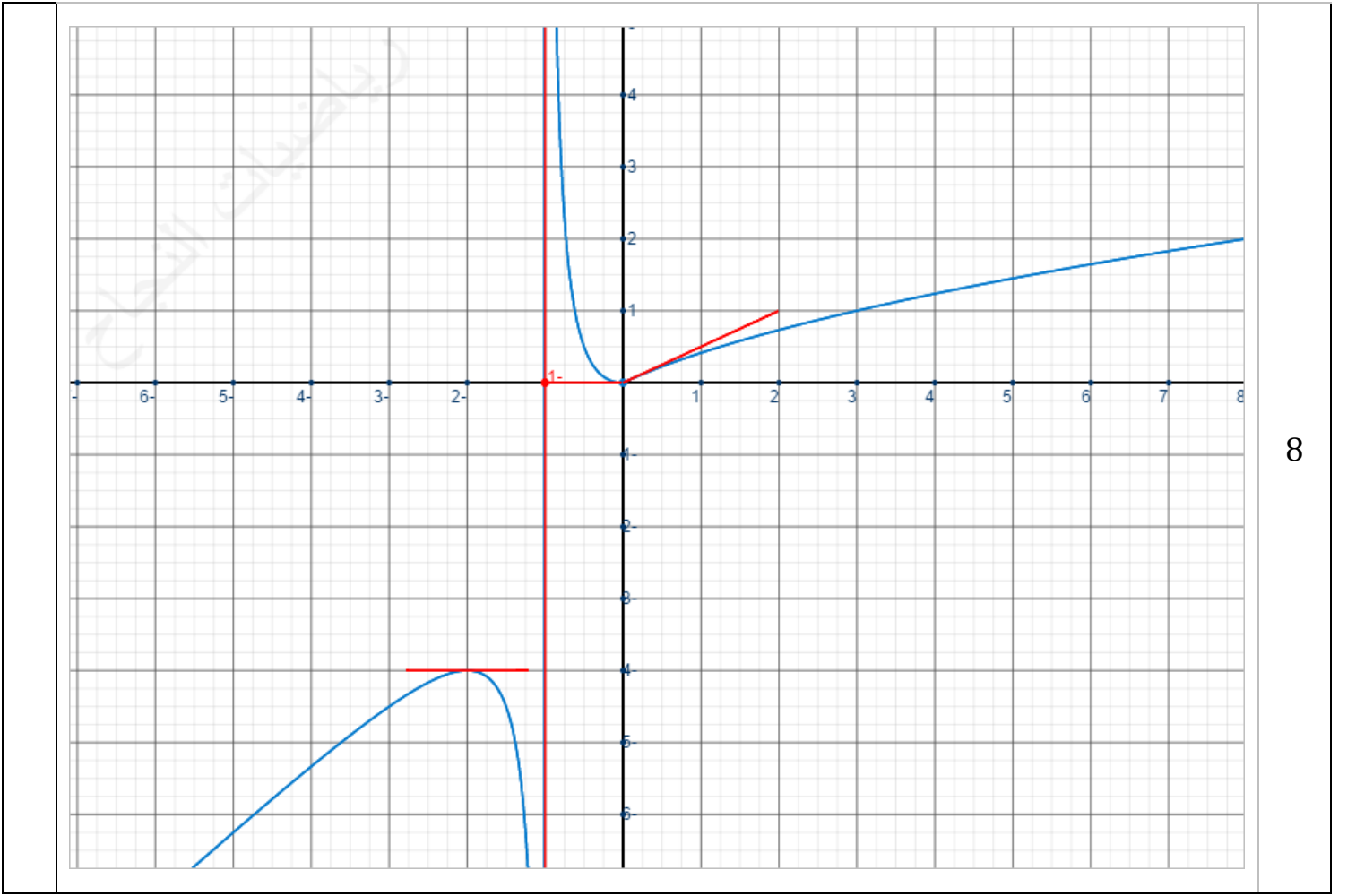
6

لدراسة الوضع النسبي لـ Cf و مقاربه المائل جوار $-\infty$ ندرس إشارة الفرق $f(x) - (x - 1)$ على المجال $]-\infty, -1[\cup]-1, 0[$

على هذا المجال لدينا : $f(x) - (x - 1) = \frac{1}{x+1}$ إذن :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$		-	+	
		Cf تحت المقارب	Cf فوق المقارب	

7



رياضيات النجّاح أذ سمير لخريسي