

الأستاذ:
نجيب
عثماني

تمارين محلولة: دراسة الدوال
المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة
والأرض والعلوم الزراعية

أكاديمية
الجهة
الشرقية

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} = +\infty$ إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} = 0$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$

التأويل المبياني: المستقيم ذا المعادلة $y = x$ مقارب

مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

تمرين 1: نعتبر الدالة f المعرفة

كالتالي : $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2. أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3. حدد معادلة المقارب المائل لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$

أجوبة: 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 4x - 5 \geq 0\}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 16 + 20 = 36 = 6^2 > 0$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$x_2 = \frac{4-6}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1$ و $x_1 = \frac{4+6}{2 \times 1} = \frac{10}{2} = 5$

ومنه جدول الاشارة :

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$	
$x^2 - 4x - 5$	$+$	0	$-$	0	$+$

ومنه : $D_f =]-\infty; -1] \cup [5; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 4x - 5} = 2$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 4x - 5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x - 5}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{4x}{x^2} - \frac{5}{x^2}} = 1$ (3)

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{4x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}}{x}$

لدينا : $x \rightarrow +\infty$ ومنه : $|x| = x$ ومنه

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 - \frac{4x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{4x}{x^2} - \frac{5}{x^2}} = 1\sqrt{1} = 1 = a$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 4x - 5} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4x - 5} + x)(\sqrt{x^2 - 4x - 5} - x)}{(\sqrt{x^2 - 4x - 5} + x)}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x - 5 - x^2}{x \sqrt{x^2 - 4x - 5} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x - 5}{x \sqrt{x^2 - 4x - 5} + x}$

تمرين 1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2. أحسب : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ واعط تأويلا مبيانيا للنتيجة

الجواب: 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 > 0\}$

$x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0$

ومنه : $D_f =]1; +\infty[$

2) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ ومنه : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0^+$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2x = 2$

التأويل المبياني: المستقيم ذا المعادلة $x = 1$ مقارب للمنحنى (C) يوازي محور الأرتايب

تمرين 2: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2. أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ واعط تأويلا مبيانيا للنتيجة

أجوبة: 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \neq 0\}$

$(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$

$x = -1$ أو $x = 1 \Leftrightarrow$

ومنه $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$

التأويل المبياني: المستقيم ذا المعادلة $y = a$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ يوازي محور الأفاصيل.

تمرين 1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2. حدد معادلة المقارب المائل لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$

أجوبة: 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x > 0\}$

$x = -1$ أو $x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x = 0$

نستعمل جدول الاشارة :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$x^2 + x$	$+$	0	$-$	0	$+$

ومنه : $D_f =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$

2) $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} \Leftrightarrow f(x) - x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}}$

اذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}}$

تمرين 1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = \sqrt{2-x}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2. أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

3. أدرس الفرع الشلجي لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$

أجوبة: (1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2-x \geq 0\}$

$$x \leq 2 \Leftrightarrow 2-x \geq 0$$

$$D_f =]-\infty; 2]$$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2-x = +\infty$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{2-x})^2}{x\sqrt{2-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{x\sqrt{2-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{x} \times \frac{1}{\sqrt{2-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} \times \frac{1}{\sqrt{2-x}} = -1 \times 0 = 0$$

التأويل المبياني: منحنى (C) يقبل فرعا شلجيا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $-\infty$

تمرين 1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = x\sqrt{x-1}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2. أدرس الفرع الشلجي لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$

أجوبة: (1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \geq 0\}$

$$x \geq 1 \Leftrightarrow x-1 \geq 0$$

$$D_f = [1; +\infty[$$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x-1 = +\infty$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$$

التأويل المبياني: منحنى (C) يقبل فرعا شلجيا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

تمرين 1: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \sqrt{2x-1} - x$$

(1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f .

(2) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(3) أدرس الفروع النهائية لمنحنى الدالة f .

أجوبة: (1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x-1 \geq 0\}$

$$x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x-1 \geq 0$$

$$D_f = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x-1} - x$ ش غ م

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x-1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} |x| \sqrt{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} - 1 \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x-1} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x-1}}{x} - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}}{x} - 1 \quad (3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{4x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{4}{x}}{\sqrt{1 + \frac{4x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}} = \frac{-4}{2} = -2 = b$$

(4) ومنه: $y = ax + b$ أي $y = x - 2$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$

تمرين 1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x - 2}$

1. حدد D_f و حد $f'(x)$

2. أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

3. بين: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$ وأحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 2x$

4. أستنتج معادلة المقارب المائل لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$

أجوبة: (1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4x^2 + 2x - 2 \geq 0\}$

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 = (3)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$$x_1 = \frac{-1+3}{2 \times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{-1-3}{4} = -1 \quad \text{ومنه جدول الاشارة:}$$

x	$-\infty$	-1	$1/2$	$+\infty$	
$4x^2+2x-2$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\text{ومنه: } D_f =]-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

$$\forall x \in]-\infty; -1[\cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

$$f'(x) = \left(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} \right)' = \frac{(4x^2 + 2x - 2)'}{2\sqrt{4x^2 + 2x - 2}} = \frac{8x + 2}{2\sqrt{4x^2 + 2x - 2}} = \frac{4x + 1}{\sqrt{4x^2 + 2x - 2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 2x - 2} \quad (2)$$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^2 + 2x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^2 = +\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{2x}{x^2} - \frac{2}{x^2} \right)}}{x} \quad (3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x}$$

لدينا: $x \rightarrow -\infty$ ومنه: $|x| = -x$ ومنه

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} = -\sqrt{4} = -2 = a$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 2x - 2} + 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} + 2x)(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} - 2x)}{(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} - 2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 2x - 2 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 2x - 2} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2}{\sqrt{4x^2 + 2x - 2} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2}{-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(2 - \frac{2}{x} \right)}{-x \left(\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} + 2 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{2}{x}}{-\left(\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} + 2 \right)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} = b$$

(4) ومنه: $y = ax + b$ أي $y = 2x - \frac{1}{2}$ مقارب مائل لمنحنى

الدالة f بجوار $-\infty$

ومنه $x = \frac{1}{2}$ محور تماثل منحنى الدالة f .

تمرين 1: تعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 1}$$

1. بين أن $\forall \in D_f, f(x) = x - 2 + \frac{2}{x + 1}$

2. بين أن النقطة $\Omega(-1; -3)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .

$$x - 2 + \frac{2}{x + 1} = \frac{(x - 2)(x + 1) + 2}{x + 1} = \frac{x^2 - x}{x + 1} = f(x) \quad \text{الجواب : (1)}$$

$$\Omega(a; b) \quad \Omega(-1; -3) \quad (2)$$

(أ) نبين أنه : إذا كانت $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ فإن $-2 - x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ ؟؟؟

$$\Leftrightarrow -2 - x \neq -2 + 1 \Leftrightarrow -x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$-2 - x \in \mathbb{R} - \{-1\} \Leftrightarrow -2 - x \neq -1 \Leftrightarrow$$

(ب) نبين أن : $f(-2 - x) + f(x) = -6 = 2b$ ؟؟؟؟

$$f(-4 - x) + f(x) = -4 - x - 1 + \frac{1}{-4 - x + 2} + x - 1 + \frac{1}{x + 2}$$

$$= -4 - 2 + \frac{1}{-x - 2} + \frac{1}{x + 2} = -6 + \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x + 2} = -6$$

ومنه $\Omega(-2; -3)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .

تمرين 1: تعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2. أدرس زوجية الدالة f

3. أحسب نهايات الدالة f عند محددات D_f

4. أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f

5. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها

6. حدد جدول تغيرات الدالة f

7. حدد معادلة لمماس المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في

النقطة A التي أفصولها $x_0 = -1$

8. حدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) الممثل للدالة مع محوري المعلم.

9. حدد مطاريب الدالة f اذا وجدت

10. أرسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم

أجوبة: $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

(أ) اذا كانت $x \in \mathbb{R}$ فان $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \frac{1}{3}(-x)^3 - 4(-x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x = -\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right) = -f(x) \quad \text{(ب)}$$

ومنه f دالة فردية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad (3)$$

لأن نهاية دالة حدودية عند مالانهاية هي نهاية حدها الأكبر درجة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x^2 = +\infty \quad (4)$$

(C_f) يقبل فرعا شلجيميا اتجاهه محور الأرتايب بجوار $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3}x^2 = +\infty$$

(C_f) يقبل فرعا شلجيميا اتجاهه محور الأرتايب بجوار $-\infty$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)' = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 4 = x^2 - 4 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-1x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x - 1} = +\infty$$

التأويل المبياني: منحنى (C) يقبل فرعا شلجيميا اتجاهه المستقيم ذو

المعادلة $y = -x$ بجوار $+\infty$

تمرين 1: تعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R}

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3}$$

1. أحسب $f''(x)$ لكل x من \mathbb{R}

2. أدرس تقعر المنحنى (C_f) الممثل للدالة f مع تحديد نقطتي انعطافه

الجواب : (1)

$$f'(x) = \left(\frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3}\right)' = \frac{1}{12} \times 4x^3 - 4x + 1 = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x + 1\right)' = x^2 - 4$$

$$(x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow f''(x) = 0 \quad (2)$$

$$x = -2 \text{ أو } x = 2 \Leftrightarrow$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x^2 - 4$	$+$	\emptyset	$-$	\emptyset

• تقعر (C_f) موجه نحو محور الأرتايب الموجهة على المجال:

$$]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$$

• تقعر (C_f) موجه نحو محور الأرتايب الموجهة على المجال: $[-2; 2]$

يمكن تلخيص النتائج في جدول التقعر

المشتقة الثانية تنعدم وتتغير إشارتها في : $x_0 = -2$; $x_0 = 2$

اذن هناك نقطتي انعطاف هما : $A(-2; f(-2))$ و $A(2; f(2))$

تمرين 1: تعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة

$$f(x) = \sqrt{x - x^2}$$

1. حدد حيز تعريف الدالة f

2. بين أن المستقيم $x = \frac{1}{2}$ محور تماثل للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f

الجواب:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - x^2 \geq 0\} \quad f(x) = \sqrt{x - x^2} \quad (1)$$

$$x = 1 \text{ أو } x = 0 \Leftrightarrow x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x - x^2 = 0$$

ومنه جدول الإشارة :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x - x^2$	$-$	\emptyset	$+$	\emptyset

ومنه : $D_f = [0; 1]$

$$x = \frac{1}{2} \text{ يعني } x = a \quad (2)$$

(أ) نبين أنه : اذا كانت $x \in [0; 1]$ فان $1 - x \in [0; 1]$ ؟؟؟

$$\Leftrightarrow 1 - 1 \leq 1 - x \leq 1 + 0 \Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [0; 1]$$

$$1 - x \in [0; 1] \Leftrightarrow 0 \leq 1 - x \leq 1 \Leftrightarrow$$

(ب) نبين أن : $f(1 - x) = f(x)$ ؟؟؟؟

$$f(1 - x) = \sqrt{(1 - x) - (1 - x)^2} = \sqrt{1 - x - (1 - 2x + x^2)}$$

$$= \sqrt{1 - x - 1 + 2x - x^2} = \sqrt{x - x^2} = f(x)$$

9. أعط معادلة المماس في النقطة ذات الأضلاع 0.

10. أنشئ المنحنى C_f .

أجوبة :

ومنه $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0\}$ (1)

$D_f = \mathbb{R} - \{-2\} =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$

(2) نقوم بالقسمة الاقليدية ل x^2+x-1 على $x+2$ فنجد :

$$x^2+x-1=(x+2)(x-1)+1$$

اذن :

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-1)+1}{x+2} = \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} + \frac{1}{x+2} = x-1 + \frac{1}{x+2}$$

ومنه : $a=1$ و $b=-1$ و $c=1$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+x-1}{x+2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+x-1}{x+2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

(4) $x = -2$ مقارب للمنحنى (C_f)

$$f(x) - (x-1) = \frac{1}{x+2} \text{ يعني } f(x) = x-1 + \frac{1}{x+2}$$

يعني $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{+\infty} = 0$ ومنه المستقيم

ذا المعادلة $y = x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{-\infty} = 0$ ومنه المستقيم

ذا المعادلة $y = x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

$$\Omega(a;b) \quad \Omega(-2;-3) \quad (5)$$

أبين أنه : اذا كانت $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ فان : $-4-x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ ؟؟؟

$$\Leftrightarrow -4-x \neq -2 \Leftrightarrow -x \neq 2 \Leftrightarrow x \neq -2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$-4-x \in \mathbb{R} - \{-2\} \Leftrightarrow -4-x \neq -2 \Leftrightarrow$$

(ب) نبين أن : $f(-4-x) + f(x) = -6 = 2b$ ؟؟؟؟

$$f(-4-x) + f(x) = -4-x-1 + \frac{1}{-4-x+2} + x-1 + \frac{1}{x+2}$$

$$= -4-2 + \frac{1}{-x-2} + \frac{1}{x+2} = -6 + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} = -6$$

ومنه $\Omega(-2;-3)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .

$$\text{يعني } f'(x) = \left(x-1 + \frac{1}{x+2}\right)' = 1 - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)^2 - 1}{(x+2)^2} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{(x+2)^2 - 1^2}{(x+2)^2} = \frac{(x+2-1)(x+2+1)}{(x+2)^2} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$$

اشارة $f'(x)$ هي اشارة : $(x+1)(x+3)$

$$(x+1)(x+3) = 0 \text{ يعني } x+1=0 \text{ أو } x+3=0 \text{ يعني } x=-1 \text{ أو } x=-3$$

جدول الإشارة :

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

(7) جدول تغيرات الدالة :

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-5	$+\infty$	-1	$+\infty$

$$(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x^2-2^2=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow f'(x)=0$$

$$x = -2 \text{ أو } x = 2 \Leftrightarrow$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

(6)

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$16/3$	$-16/3$	$+\infty$	

(7) معادلة لمماس ل (C_f) في النقطة A التي أفصولها $x_0 = -1$

$$f'(-1) = -3 \text{ و } f(-1) = \frac{11}{3} \text{ و } y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$$y = -3x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = \frac{11}{3} - 3(x+1) \Leftrightarrow y = f(-1) + f'(-1)(x+1)$$

(8) أنقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفصيل

$$\text{نحل فقط المعادلة : } f(x) = 0 \text{ يعني } \frac{1}{3}x^3 - 4x = 0$$

$$\text{يعني } x\left(\frac{1}{3}x^2 - 4\right) = 0 \text{ يعني } x = 0 \text{ أو } \frac{1}{3}x^2 - 4 = 0$$

$$\text{يعني } x = 0 \text{ أو } x = \sqrt{12} \text{ أو } x = -\sqrt{12}$$

$$\text{يعني } x = 0 \text{ أو } x = 2\sqrt{3} \text{ أو } x = -2\sqrt{3}$$

ومنه نقط التقاطع هم : $A(2\sqrt{3};0)$ و $B(-2\sqrt{3};0)$ و $O(0;0)$

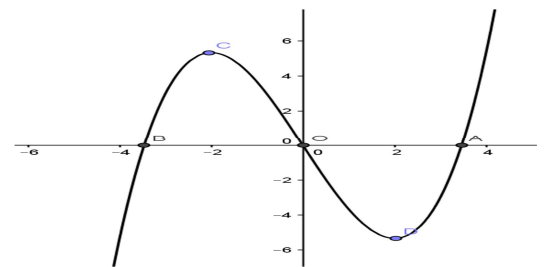
(ب) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتيب

نحسب فقط : $f(0)$ لدينا $f(0) = 0$ ومنه نقطة التقاطع هي : $O(0;0)$

$$(9) f(2) = -\frac{16}{3} \text{ هي قيمة دنيا للدالة } f$$

$$f(-2) = \frac{16}{3} \text{ هي قيمة قصوى للدالة } f$$

(10) التمثيل المبياني للدالة f



تمرين 1: لتكن f دالة عددية معرفة بما يلي : $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

2. حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث

$$\forall x \in D_f \quad f(x) = a + b + \frac{c}{x+2}$$

3. أحسب النهايات عند محداث D_f

4. أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f

(تحديد معادلة المقاربات و المقاربات المائلة ل C_f).

5. بين أن النقطة $\Omega(-2;-3)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .

6. حدد الدالة المشتقة و ادرس إشارتها.

7. أعط جدول تغيرات f على D_f .

8. حدد احداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_f) الممثل للدالة مع محوري المعلم.

وأنتهى (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ منحنى الدالة f^{-1} في نفس المعلم

أجوبة: $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1-x \geq 0\}$

$x \leq 1 \Leftrightarrow 1-x \geq 0$

ومنه: $D_f =]-\infty; 1]$

ب) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow \infty} 1-x = +\infty$

ج) دراسة قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0 = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\sqrt{1-x})^2}{(x-1)\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{(x-1)\sqrt{1-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{(x-1)\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{\sqrt{1-x}} = -\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0 = 1$:

ومبانيا نقول ان منحنى الدالة f يقبل نصف مماس يوازي محور

الأرتيب على يسار النقطة: $A(1; f(1))$ أي $A(1; -1)$

وموجه نحو الأعلى

$\forall x \in]-\infty; 1] f'(x) = (-1 + \sqrt{1-x})' = 0 + \frac{(1-x)'}{2\sqrt{1-x}} = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} < 0$ (2)

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	1
$f'(x)$		$-$
$f(x)$	$+\infty$	-1

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 + \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x} + \frac{\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x} + \frac{(\sqrt{1-x})^2}{x\sqrt{1-x}}$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x} + \frac{1-x}{x\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x} + \frac{1-x}{x} \times \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x} + \frac{-x}{x} \times \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 0 - 1 \times 0 = 0$

التأويل المبياني: منحنى (C) يقبل فرعا شلجيميا اتجاهه محور

الأفصائل بجوار $-\infty$

4) أ) f دالة متصلة على المجال $I =]-\infty; 1]$ و f تناقصية قطع

ومنه f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة

على مجال: $J = f(I) = f(]-\infty; 1]) = [-1; +\infty[$

ب) $\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases}$

$-1 + \sqrt{1-y} = x$ يعني $\begin{cases} f(y) = x \\ y \in]-\infty; 1] \end{cases}$

يعني $\sqrt{1-y} = x + 1$ $2y - 1 = x^2$

يعني $(\sqrt{1-y})^2 = (x+1)^2$ يعني $1-y = (x+1)^2$ يعني $y = 1 - (x+1)^2$

يعني $y = -x^2 - 2x$

ومنه: $\forall x \in [-1; +\infty[f^{-1}(x) = -x^2 - 2x$

(4)

x	-8	-3	0	1
$f(x)$	2	1	0	-1

(ج)

8) أ) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفصائل

نحل فقط المعادلة: $f(x) = 0$ يعني $\frac{x^2 + x - 1}{x + 2} = 0$

يعني $x^2 + x - 1 = 0$

نحل المعادلة باستعمال المميز $a = 1$ و $b = 1$ و $c = -1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ و $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

ومنه نقط التقاطع هما: $A\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; 0\right)$ أو $B\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; 0\right)$

ب) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتيب

نحسب فقط: $f(0)$ لدينا $f(0) = \frac{1}{2}$ ومنه نقطة التقاطع هي: $C\left(0; \frac{1}{2}\right)$

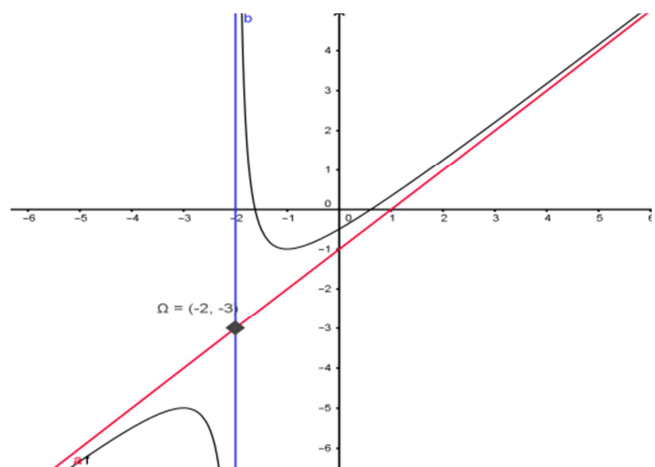
9) معادلة المماس في النقطة ذات الأفصول 2.

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (2)

$f(0) = -\frac{1}{2}$ و $f'(0) = \frac{(0+1)(0+3)}{(0+2)^2} = \frac{3}{4}$

$y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x \Leftrightarrow y = f(0) + f'(0)(x - 0)$

10) التمثيل المبياني للدالة:



تمرين 1: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x

المعرفة كالتالي: $f(x) = -1 + \sqrt{1-x}$

ليكن (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (o, \vec{i}, \vec{j})

1) أ) حدد D_f حيز تعريف الدالة f ب) حدد $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

ج) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0 = 1$ وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

2) أدرس تغيرات الدالة f و حدد جدول تغيرات الدالة f

3) أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f

4) أ) بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J يجب تحديده

ب) حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J

ج) املا الجدول التالي

x	-8	-3	0	1
$f(x)$				

5) نبين أن: $\forall x \in]-1; +\infty[f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x+1}$ ؟؟؟

$$f'(x) = ((x+1)\sqrt{x+1}-1)' = (x+1)' \sqrt{x+1} + (x+1) \sqrt{x+1}' - 1'$$

$$f'(x) = 1\sqrt{x+1} + (x+1) \frac{(x+1)'}{2\sqrt{x+1}} - 0 = \frac{2x+2+x+1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+3}{2\sqrt{x+1}}$$

$$\forall x \in]-1; +\infty[f'(x) = \frac{3(x+1)\sqrt{x+1}}{2(\sqrt{x+1})^2} = \frac{3\sqrt{x+1}}{2}$$

$$f'(x) = \frac{3\sqrt{x+1}}{2} > 0 \forall x \in]-1; +\infty[\quad (6)$$

x	-1	1
$f'(x)$		+
$f(x)$	-1	$+\infty$

(7) f دالة متصلة على المجال $I =]-1; +\infty[$ و f تزايدية قطعاً

ومنه f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة

على مجال: $J = f(I) = f(]-1; +\infty[) =]-1; +\infty[$

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in]-1; +\infty[\end{cases} \text{ يعني } (y+1)\sqrt{y+1}-1 = x$$

$$\text{عني } (y+1)\sqrt{y+1} = x+1$$

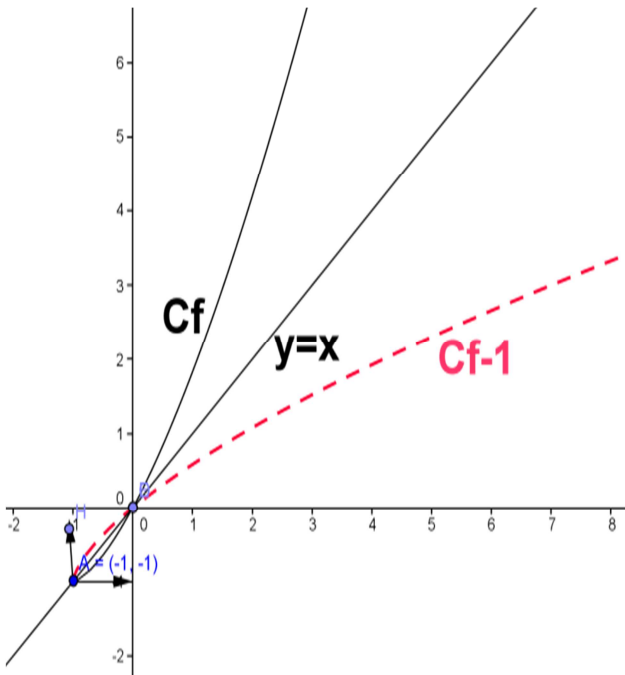
$$\text{يعني } ((y+1)\sqrt{y+1})^2 = (x+1)^2$$

$$\text{يعني } (y+1)^3 = (x+1)^3 \text{ يعني } y+1 = \sqrt[3]{(x+1)^3}$$

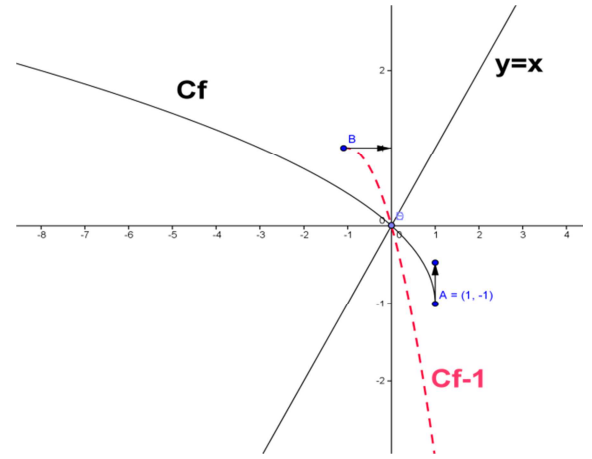
$$\text{يعني } y = \sqrt[3]{(x+1)^3} - 1$$

ومنه: $\forall x \in]-1; +\infty[f^{-1}(x) = \sqrt[3]{(x+1)^3} - 1$

x	-1	0	1	3
$f(x)$	-1	0	1,8	7



منحنى الدالة f^{-1} هو مماثل لمنحنى الدالة f بالنسبة للمستقيم $y = x$ في معلم متعامد ممنظم



تمرين 1: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي

$$f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$$

ليكن (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (o, \vec{i}, \vec{j})

(1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

(2) احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(3) أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f

(4) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند $x_0 = -1$

(5) بين أن: $\forall x \in]-1; +\infty[f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x+1}$

(6) أدرس تغيرات الدالة f و حدد جدول تغيرات الدالة f

(7) أبين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J يجب تحديده

(ب) حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J

(8) املأ الجدول التالي:

x	-1	0	1	3
$f(x)$				

وأنشئ (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ منحنى الدالة f^{-1} في نفس المعلم

$$f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1 \quad (\text{أجوبة:})$$

$$x \geq -1 \Leftrightarrow x+1 \geq 0$$

ومنه: $D_f =]-1; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)\sqrt{x+1} - 1 = +\infty \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{x} - \frac{1}{x} \quad (3) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)}{x} \sqrt{x+1} - \frac{1}{x} = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

التأويل المبياني: منحنى (C) يقبل فرعا شلجيميا اتجاهه محور

الأر اتيب بجوار $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)\sqrt{x+1} - 1 + 1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{x+1} = 0 \quad (4)$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0 = -1$

مبيانيا نقول ان منحنى الدالة f يقبل نصف مماس على اليمين في النقطة:

$$A(-1; -1)$$