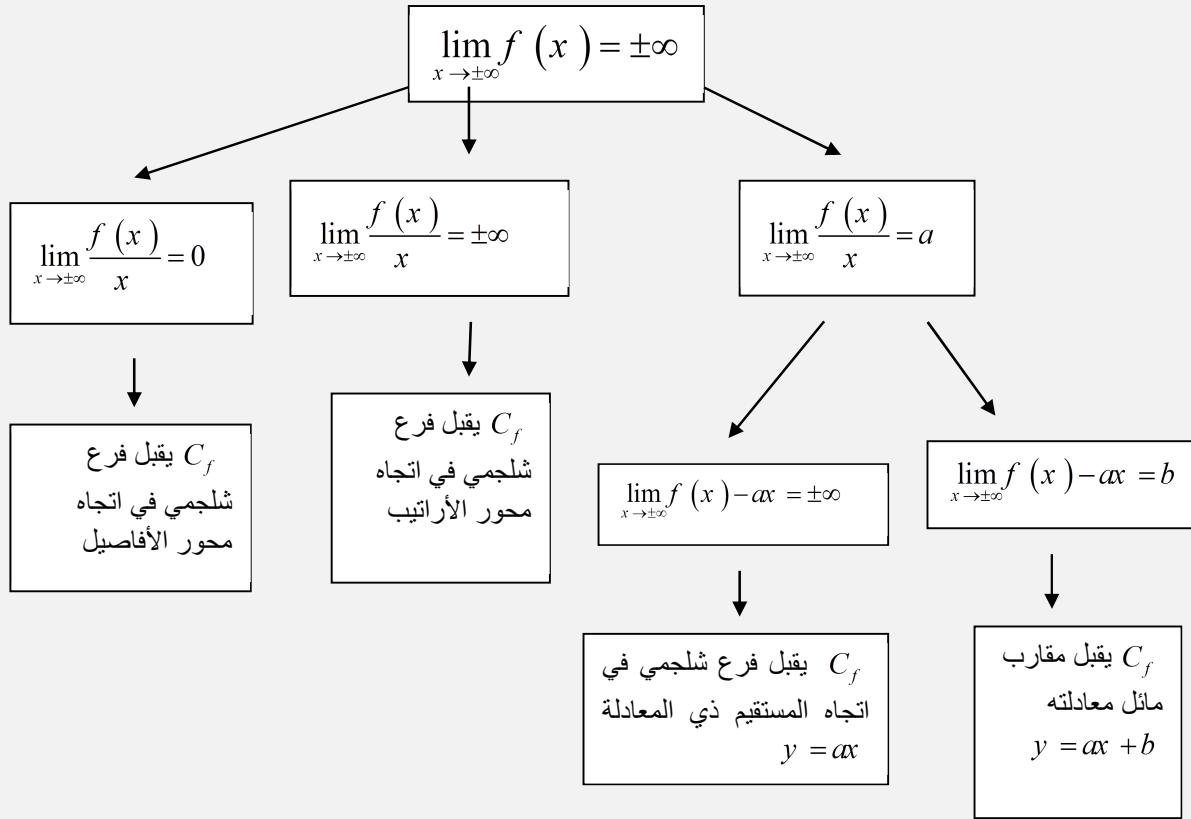


أهم ما نحتاجه في دراسة الدوال

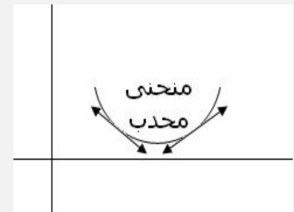
أ. النهايات و الفروع اللانهائية

$$\begin{aligned} x=a \text{ يقبل مقارب عمودي معادلته } &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \\ y=b \text{ يقبل مقارب أفقي معادلته } &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b \\ y=ax+b \text{ يقبل مقارب مائل معادلته } &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0 \end{aligned}$$

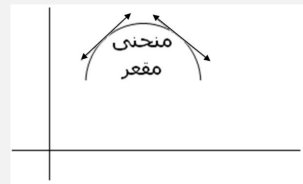


ب. تقعر منحنى و نقط الانعطاف

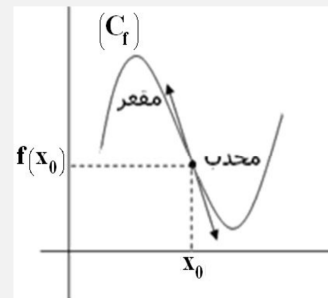
■ إذا كان $\forall x \in I \quad f''(x) \geq 0$ فإن (C_f) محدب



■ إذا كان $\forall x \in I \quad f''(x) \leq 0$ فإن (C_f) مقعر



- إذا كانت f'' تنعدم و تغير إشارتها عند a فإن النقطة $I(a, f(a))$ هي نقطة انعطاف
- إذا كانت f' تنعدم و لا تغير إشارتها عند a فإن النقطة $I(a, f(a))$ هي نقطة انعطاف



ج. مركز و محور تماثل (C_f)

■ المستقيم ذي المعادلة $x = a$ محور تماثل ل (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f : 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f : f(2a - x) = f(x) \end{cases}$

■ النقطة $\Omega(a, b)$ مركز تماثل ل (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f : 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f : f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$

د. اتصال دالة عددية

■ f متصلة في $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

■ f متصلة في a على اليمين $\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a)$

■ f متصلة في a على اليسار $\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a)$

■ f متصلة في $a \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a)$

د. مبرهنة القيم الوسيطة

■ مبرهنة القيم الوسيطة (وجودية الحل على $[a, b]$)

إذا كانت f متصلة على $[a, b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $]a, b[$

■ مبرهنة القيم الوسيطة بالوحدانية (وجودية ووحداية الحل على $[a, b]$)

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعاً على $[a, b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال

$]a, b[$

■ مبرهنة (وجودية ووحداية الحل على مجال I)

إذا كانت f متصلة ورتبية قطعاً على I و $0 \in f(I)$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال I

و. اتصال مركب دالتين

خاصية :

إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و g متصلة على مجال J بحيث $f(I) \subset J$ فإن $g \circ f$ متصلة على I .

ز. الدالة العكسية

خاصية : إذا كانت f دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال I فإن المعادلة $f(x) = y$ حيث $y \in f(I)$ تقبل حلاً وحيداً في المجال I

الدالة التي تربط كل عدد y بالحل تسمى الدالة العكسية للدالة f ونرمز لها بـ f^{-1}

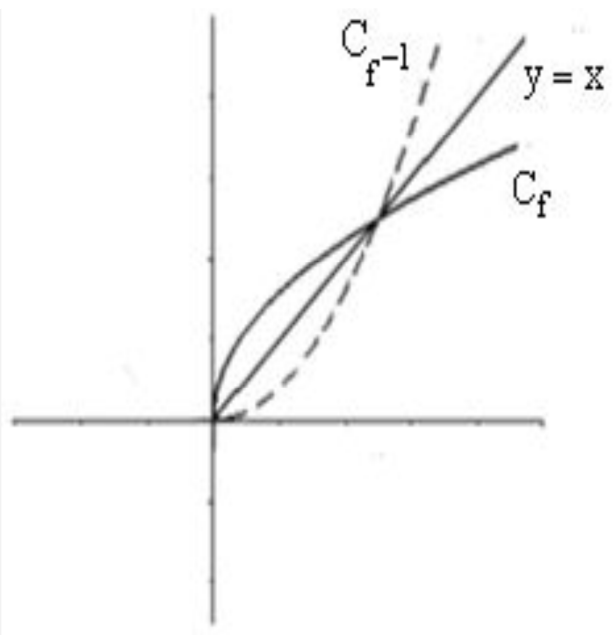
$$(1) \quad \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \quad \text{نتائج:}$$

$$(2) \quad \begin{cases} f^{-1} \circ f(x) = x & ; x \in I \\ f \circ f^{-1}(x) = x & ; x \in J \end{cases}$$

خصائص: لتكن f دالة و f^{-1} دالتها العكسية على

المجال J لدينا :

- f^{-1} متصلة على المجال J
- f و f^{-1} لهما نفس الرتبة
- منحنى f^{-1} هو مماثل لمنحنى f بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y = x$ (المنصف الأول للمعلم)



ح. الاشتقاق

(C_f) يقبل مماساً في النقطة $A(a, f(a))$ معامل الموجه $l = f'(a)$ و معادلته :

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

(C_f) يقبل مماساً في النقطة $A(a, f(a))$ معامل الموجه $l = f'_d(a)$ و معادلته :

$$y = f'_d(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R} \\ l = f'(a)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R} \\ l = f'_d(a)$$

f قابلة للاشتقاق في a

f قابلة للاشتقاق في a على اليمين

(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a, f(a))$ معامل الموجه $l = f'_g(a)$ و معادلته : $y = f'_g(a) \cdot (x - a) + f(a)$	$\Leftrightarrow$	$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}$ $l = f'_g(a)$	$\Leftrightarrow$	f قابلة للاشتقاق في a على اليسار
(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a, f(a))$ معامل الموجه $l = f'(a)$ و معادلته : $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$		f قابلة للاشتقاق في a على اليمين ✓ f قابلة للاشتقاق في a على اليسار ✓ $f'_d(a) = f'_g(a) = f'(a)$ ✓		f قابلة للاشتقاق في a

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق في a على اليمين و f قابلة للاشتقاق في a على اليسار و $f'_d(a) \neq f'_g(a)$ فإن f غير قابلة للاشتقاق في a . في هذه الحالة (C_f) يقبل نصفي مماس مختلفان في النقطة $A(a, f(a))$ معاملاهما الموجهان $f'_d(a)$ و $f'_g(a)$ و النقطة $A(a, f(a))$ تسمى نقطة مزواة
- إذا كانت $f'(a) = 0$ فإن (C_f) يقبل مماس أفقي في $A(a, f(a))$

f غير قابلة للاشتقاق في a على اليمين $\Leftarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a, f(a))$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليسار $\Leftarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a, f(a))$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليمين $\Leftarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a, f(a))$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليسار $\Leftarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a, f(a))$
--

المجال I	الدالة المشتقة f'	الدالة f
$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$x \mapsto k$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$

$I =]-\infty, 0[$ أو $I =]0, +\infty[$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}$
$I =]0, +\infty[$	$x \mapsto rx^{r-1}$	$x \mapsto x^r \quad r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$
$I =]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \mapsto \sqrt{x}$
$I =]-\infty, 0[$ أو $I =]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{-1}{x^2}$	$x \mapsto \frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$	$x \mapsto \cos x$
$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$	$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x$

الدالة المشتقة	الدالة
$\alpha f'$	αf
$f' + g'$	$f + g$
$f' \times g + f \times g'$	$f \times g$
$-\frac{g'}{g^2}$	$\frac{1}{g}$
$\frac{f'g - fg'}{g^2}$	$\frac{f}{g}$
$f' \times g' \circ f$	$g \circ f$
$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$\sqrt{f}$
$nf' f^{n-1}$	f^n

■ ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

$$(\forall x > 0) \quad (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x}^{n-1}}$$

■ إذا كانت f دالة موجبة قطعاً وقابلة للاشتقاق على مجال I فإن $\sqrt[n]{f}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا :

$$(\forall x \in I) \quad (\sqrt[n]{f(x)})' = \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f(x)}^{n-1}}$$

■ لتكن f دالة معرفة على مجال I تقبل دالة عكسية f^{-1} وليكن x_0 و y_0 عدنان بحيث : $f^{-1}(x_0) = y_0$

$$\text{إذا كانت } f'(y_0) \neq 0 \text{ فإن } f^{-1} \text{ قابلة للاشتقاق في } x_0 \text{ و لدينا } (f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}$$

■ إذا كانت f' لا تنعدم على I فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $f(I)$ و لدينا :

$$(\forall x \in f(I)) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

رتابة دالة

- إذا كانت $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ فإن f تزايدية على I
- إذا كانت $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$ فإن f تناقصية على I
- إذا كانت $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$ فإن f تزايدية قطعاً على I
- إذا كانت $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I$ فإن f تناقصية قطعاً على I

خاصية

- إذا كانت $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ و كانت f' تنعدم في عدد منته من النقط على I فإن f تزايدية قطعاً على I
- إذا كانت $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$ و كانت f' تنعدم في عدد منته من النقط على I فإن f تناقصية قطعاً على I

ط. دالة اللوغاريتم النبيري

1. تعريف :

دالة اللوغاريتم النبيري هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0, +\infty[$ و التي تنعدم في 1 و يرمز لها بالرمز :

$\ln$

2. استنتاجات و خاصيات :

- $D_{\ln} =]0, +\infty[$ $\left(\ln \left(\frac{1}{x} \right) \right)$
- $\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad (\forall x \in]0, +\infty[)$ إذن الدالة $\ln$ تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$
- $\forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
- $\forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$
- $\forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x \leq \ln y \Leftrightarrow x \leq y$
- $\ln(1) = 0$
- يوجد عدد حقيقي وحيد من $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ نرسم له ب : e
- بحيث $e \simeq 2,718$ و يحقق : $\ln(e) = 1$
- $\forall x > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$
- إشارة : $\ln x$

- إذا كان : $0 < x < 1$ فإن $\ln x < 0$
- إذا كان : $x \geq 1$ فإن $\ln x \geq 0$

3. العمليات على الدالة $\ln$

ليكن x و y من $]0, +\infty[$ و $r \in \mathbb{Q}$ لدينا :

$$\ln(x.y) = \ln(x) + \ln(y) \quad \blacksquare$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad \blacksquare$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0^-$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

خاصية :

إذا كانت U دالة قابلة للاشتقاق على مجال I بحيث :

$$\forall x \in I \quad U(x) \neq 0$$

فإن الدالة $x \mapsto \ln|U(x)|$ قابلة للاشتقاق على I و

$$\forall x \in I \quad \left(\ln|U(x)| \right)' = \frac{U'(x)}{U(x)}$$

ملاحظة : إذا كانت U موجبة قطعاً :

$$\left(\ln(U(x)) \right)' = \frac{U'(x)}{U(x)}$$

نتيجة : مجموعة الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{U'(x)}{U(x)}$

هي الدوال : $(\lambda \in \mathbb{R}) \quad x \mapsto \ln|U(x)| + \lambda$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \quad \blacksquare$$

$$\ln(x^r) = r \ln(x) \quad \blacksquare$$

ي. الدالة الأسية

أ. تعريف:

الدالة العكسية للدالة $\ln$ تسمى الدالة الأسية النبرية و نرمز

لها ب : $\exp$

ملاحظة: $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) = e^x$

نتائج:

$$\begin{cases} e^x = y \\ (x \in \mathbb{R}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ (y > 0) \end{cases}$$

$$\exp: \mathbb{R} \mapsto]0, +\infty[$$

$$x \mapsto \exp(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: e^x > 0 \quad \text{و} \quad D_{\exp} = \mathbb{R}$$

ليكن x و y من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

$$e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$$

$$e^x \geq e^y \Leftrightarrow x \geq y$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ln(e^x) = x$$

$$\forall x > 0: e^{\ln x} = x$$

$$e^1 = e \quad \text{و} \quad e^0 = 1 \quad \spadesuit$$

ج. العمليات:

ليكن x و y من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$e^x \times e^y = e^{x+y} \quad (1)$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \quad (2)$$

$$\frac{1}{e^x} = e^{-x} \quad (3)$$

$$(e^x)^r = e^{rx} \quad (r \in \mathbb{Q}) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x &= 0^- \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x &= \begin{cases} 0^+ & \text{زوجي} \\ 0^- & \text{فردى} \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 \end{aligned}$$

(1) الدالة $\exp$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (e^x)' = e^x$$

(2) إذا كانت U دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن

الدالة $x \mapsto e^{U(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا :

$$(\forall x \in I) \quad (e^{U(x)})' = U'(x) e^{U(x)}$$

$$(\forall x \in I) \quad (e^{rx})' = r e^{rx} \quad (3)$$

(4)

الأصلية	الدالة
e^x	e^x
$\frac{1}{e^{rx}}$	e^{rx}
r	
$e^{U(x)}$	$U'(x) e^{U(x)}$

ك. الدوال الأصلية

المجال I	الدوال الأصلية ل f على I معرفة بما يلي: $F(x) = \dots\dots$	f دالة معرفة على المجال I بما يلي : $f(x) = \dots\dots$
$\mathbb{R}$	$kx + c$	k (k عدد حقيقي ثابت)
$\mathbb{R}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)
$] -\infty, 0[$ أو $] 0, +\infty[$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	x^n ($n \neq -1; n \in \mathbb{Z}^*$)
$] 0, +\infty[$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	x^r ($r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$)
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\mathbb{R}$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$\left] \frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[, (k \in \mathbb{Z})$	$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$	$(a \neq 0), \cos(ax+b)$
$\mathbb{R}$	$\frac{-1}{a} \cos(ax+b) + c$	$(a \neq 0), \sin(ax+b)$
$] 0, +\infty[$	$2\sqrt{x} + c$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$] -\infty, 0[$ أو $] 0, +\infty[$	$\frac{-1}{x} + c$	$\frac{1}{x^2}$
$] 0, +\infty[$	$\ln(x) + c$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$e^x + c$	e^x

شروط على u	الدوال الأصلية ل f على I	الدالة f
	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$	$u' u^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
لكل x من I , $u(x) \neq 0$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$	$u' u^n$ ($n \neq -1; n \in \mathbb{Z}^*$)
لكل x من I , $u(x) > 0$	$2\sqrt{u} + c$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$
لكل x من I , $u(x) > 0$	$\frac{1}{r+1} u^{r+1} + c$	$u' u^r$ ($r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$)
لكل x من I , $u(x) \neq 0$	$\ln(u) + c$	$\frac{u'}{u}$
لكل x من I	$e^u + c$	$u' e^u$

ل. حساب التكامل

1. تعريف :

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a, b]$ و F دالة أصلية لها على $[a, b]$.

تتكامل f من a إلى b هو العدد الحقيقي : $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

2. ملاحظات :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b \quad \text{نكتب}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots \quad \text{يمكن تغيير } x \text{ بأي متغير آخر مثلا :}$$

3. خاصيات :

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

4. خطانية التكامل :

خاصية :

لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $[a, b]$. لدينا :

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$(\alpha \in \mathbb{R}) \quad \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

1. خاصية :

لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $[a, b]$. لدينا :

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \text{إذا كانت } f \geq 0 \text{ على } [a, b] \text{ فإن}$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq 0 \quad \text{إذا كانت } f \leq 0 \text{ على } [a, b] \text{ فإن}$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad \text{إذا كانت } f \leq g \text{ على } [a, b] \text{ فإن}$$

2. القيمة المتوسطة :

تعريف و خاصية :

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a, b]$. العدد $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ يسمى القيمة المتوسطة ل

f على $[a, b]$

يوجد على الأقل عدد c من $[a, b]$ بحيث : $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

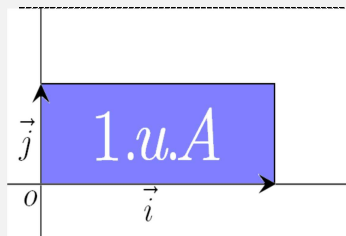
ب. باستعمال المكاملة بالأجزاء :

خاصية :

لتكن u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I حيث u' و v' متصلتان على I و a و b عنصرين من I لدينا :

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

I. حساب المساحات :



ليكن المستوى منسوباً إلى معلم متعامد $(O, \vec{i}, \vec{j})$
وحدة المساحة $u.A$ هي مساحة المستطيل المحدد بالنقطة O و
المتجهتين $\vec{i}$ و $\vec{j}$
 $1 u.A = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$

خاصية 1: لتكن f دالة متصلة على مجال $[a, b]$

مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتهما $x = a$ و $x = b$ هي :

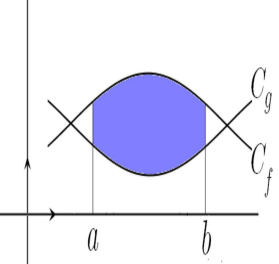
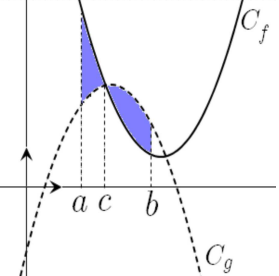
$$\left(\int_a^b |f(x)| dx \right) u.A$$

خاصية 2: لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $[a, b]$

مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و (C_g) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتهما $x = a$ و $x = b$ هي :

$$\left(\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \right) u.A$$

رسم توضيحي	ملاحظات	مساحة الحيز الملون في الرسم هي:
	f موجبة على المجال $[a, b]$	$\left(\int_a^b f(x) dx \right) u.A$
	f سالبة على المجال $[a, b]$	$\left(\int_a^b -f(x) dx \right) u.A$
	f موجبة على المجال $[a, c]$ - و f سالبة على المجال $[c, b]$	$\left(\int_a^c f(x) dx + \int_c^b -f(x) dx \right) u.A$

$\left(\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right) u.A$	(C_f) يوجد فوق (C_g) على المجال $[a, b]$	
$\left(\int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx \right) u.A$	• (C_f) يوجد فوق (C_g) على المجال $[a, c]$ و • (C_g) يوجد تحت (C_f) على المجال $[c, b]$	

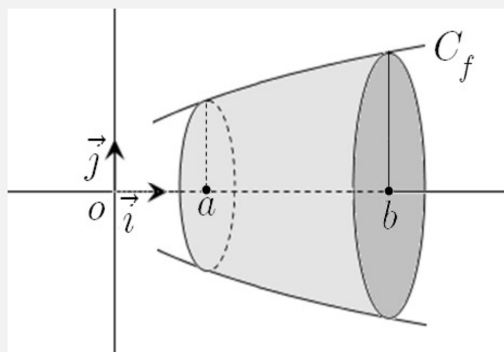
I. حساب الحجم :

خاصية 1:

ليكن (Σ) مجسما محصورا بين المستويين (P_1) و (P_2) اللذين معادلتهما على التوالي: $z = a$ و $z = b$ ($a < b$)
و لتكن $S(t)$ مساحة تقاطع المجسم (Σ) مع المستوى الذي معادلته $z = t$ حيث $a \leq t \leq b$
إذا كانت الدالة: $t \mapsto S(t)$ متصلة على المجال $[a, b]$ فإن V حجم المجسم (Σ) هو $V = \int_a^b S(t) dt$ بوحدة قياس الحجم

خاصية 2:

حجم المجسم المولد بدوران (C_f) حول محور الأفاصيل دورة كاملة في مجال $[a, b]$ هو :
حيث u, v : وحدة الحجم $V = \left[\int_a^b \pi (f(x))^2 dx \right] u.v$



تتبع