

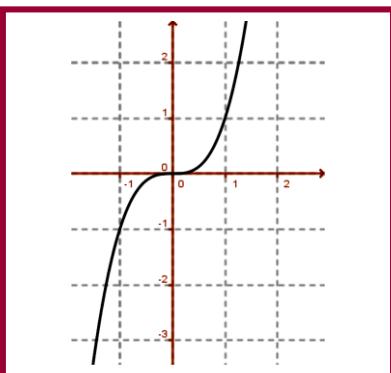
في جميع الفقرات من هذا الدرس f دالة عدديّة للمتغير الحقيقي x و (C_f) منحناها في (م. م. م) معلم متعمد منظم (j, i, O) .

I. الدالة المشتقّة الثانية وتطبيقاتها:

(A) الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس L في نقطة x_0

1. خاصية :

x	$-\infty$	-5	-1	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	-	0
تقر (C_f)	↑	↑	↑	↑	↑



- f قابلة للاشتراق مرتين على مجال مفتوح I و x_0 من I .
- إذا كان $0 \leq f''(x_0) \geq 0$ فإن المنحنى (C_f) يوجد فوق المماس L (C_f) في النقطة التي أقصولها x_0 .
- إذا كان $0 \leq f''(x_0) \leq 0$ فإن المنحنى (C_f) يوجد تحت المماس L (C_f) في النقطة التي أقصولها x_0 .

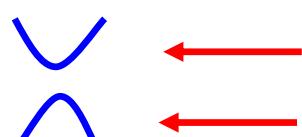
2. مثال: لنعتبر الدالة: $f(x) = x^3$

(1) أحسب: $f''(x)$ ثم أعط إشارتها.

(2) أنشئ بعض المماسات على المجال $[0, +\infty)$ ثم على $[-\infty, 0]$.

(B) تقر منحنى (C_f) - نقطة انعطاف :

1. تعريف:



أدالة قابلة للاشتراق على مجال I . (C_f) منحنى f في معلم.

منحنى f محدب (convexe) على I إذا كان (C_f) يوجد فوق جميع مماساته على I . ونرمز له بـ

منحنى f مقعر (concave) على I إذا كان (C_f) يوجد تحت جميع مماساته على I . ونرمز له بـ

(C_f) نقطة من (C_f) المماس L (T) في M_0 (x_0, y_0). النقطة M_0 (أو النقطة x_0) هي نقطة انعطاف L (C_f) في M_0 (x_0, y_0)

يعني أن المماس (T) يخترق (أو يقطع) (C_f) في M_0 (x_0, y_0)

2. خاصية :

f دالة قابلة للاشتراق مرتين على مجال I.

إذا كان : $\forall x \in I / f''(x) \geq 0$ فإن (C_f) محدب (convexe) على I (أو أيضا (C_f) له تقر موجه نحو الأراتيب الموجبة).

إذا كان : $\forall x \in I / f''(x) \leq 0$ فإن (C_f) مقعر (concave) على I (أو أيضا (C_f) له تقر موجه نحو الأراتيب السالبة).

الدالة المشتقّة الثانية " f'' تندم في x_0 من I و تغير إشارتها بجوار x_0 النقطة التي أقصولها x_0 هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) (أو للدالة f).

3. مثال: (أنظر ورقة الأنشطة المثال 2)

لنعتبر الدالة f حيث إشارة دالتها المشتقّة الثانية " f''

هي بواسطة الجدول التالي:

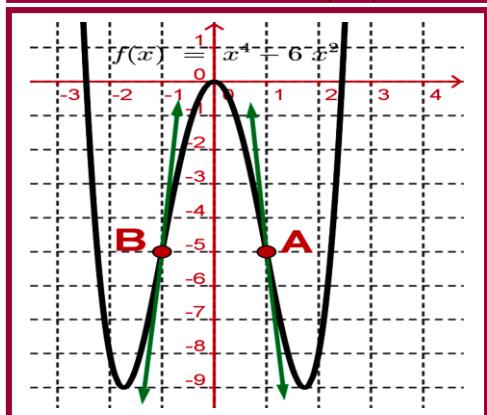
أعط تقر (C_f) منحنى الدالة f



(C) نقط انعطاف: POINTS D'INFLEXIONS

1. تعريف:

منحنى دالة عدديّة f في معلم x_0 نقطة من (C_f) المماس L في $M_0(x_0, y_0)$ نقطة من (T) يعني أن المماس (T) يخترق (أو يقطع) النقطة M_0 (أو النقطة x_0) هي نقطة انعطاف ل (C_f) أو يقطع (C_f)

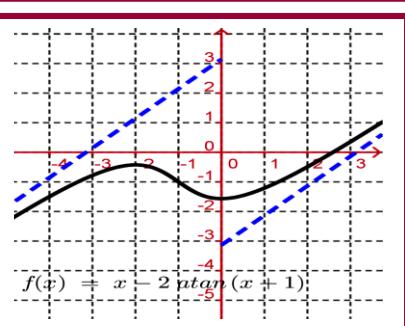


2. مثال: لنعتبر الدالة $f(x) = x^4 - 6x^2$

(C_f) نقطتي انعطاف L $B\left(\frac{-1}{-5}\right)$ و $A\left(\frac{1}{-5}\right)$

3. خاصية:

دالة قابلة للاشتاقاق مرتين على مجال I . x_0 من I . الدالة المشتقة الثانية f'' ت عدم في x_0 من I وتغير إشارتها بجوار x_0 النقطة التي أقصولها x_0 هي نقطة انعطاف لمنحنى (C_f) (أو للدالة f).



4. مثال 1:

هل الدالة f تقبل نقط انعطاف حدها؟

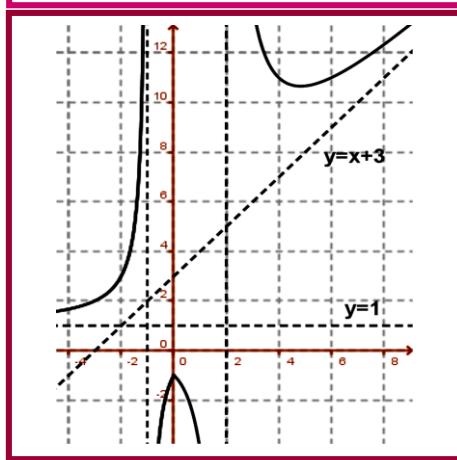
أنشئ نقط انعطاف (C_f) . إذا كان ممكناً.

الفروع الالهائية لمنحنى دالة f :

(A) فرع الالهائي:

1. تعريف:

منحنى دالة عدديّة f في معلم. إذا آلت إحدى إحداثيّي نقطة M من (C_f) إلى ما لا نهاية فإن (C_f) يقبل فرع الالهائي.



2. نشاط:

1) حدد الفروع الالهائية ل (C_f) .

2) أعط تعريف لكل نوع من هذه الفروع الالهائية.

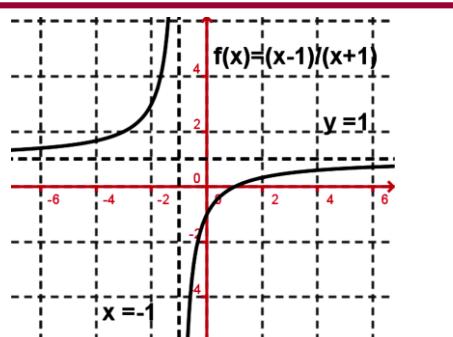


(B) مقارب أفقي - ASYMPTOTE HORIZONTALE

تعريف:

دالة عدديه معرفة على $[a, +\infty)$ (أو $(-\infty, a]$).

إذا كان $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ (أو $c = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$) فإن المستقيم ذي المعادلة $y = b$ (أو $y = c$) مقارب أفقي ل (C_f) بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$).



2. مثال: $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

لدينا $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ إذن المستقيم ذي المعادلة $y = 1$

مقارب أفقي ل (C_f) بجوار $+\infty$.

(C) مقارب عمودي - ASYMPTOTE VERTICALE

تعريف:

دالة عدديه معرفة على $\{x_0\} \setminus D$ (أي f غير معرفة في x_0)

إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ (أو $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$) فإن المستقيم ذي المعادلة $x = x_0$ مقارب عمودي ل (C_f) عند x_0 على اليمين (أو على اليسار).

2. مثال: $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ لدينا $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ إذن المستقيم ذي المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي ل (C_f) .

(D) مقارب مائل - ASYMPTOTE OBLIQUE

تعريف:

دالة عدديه معرفة على $[a, +\infty)$ (أو $(-\infty, a]$). (C_f) منحنى دالة عدديه f في معلم.

المستقيم ذي المعادلة $y = ax + b$ (أو $y = a'x + b'$) هو مقارب مائل ل (C_f) بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$) يعني:

$$\left(\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (ax + b) = 0 \end{array} \right) \text{ أو } \left(\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (ax + b) = 0 \end{array} \right)$$

مثال: لنعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x-1}$

بين أن: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 2) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0$ نحسب 0 يقبل مقارب مائل بجوار $+\infty$.

خلاصة:

المستقيم ذي المعادلة $y = x - 2$ يسمى مقارب مائل بجوار ∞ ل (C_f) .



• ملاحظات:

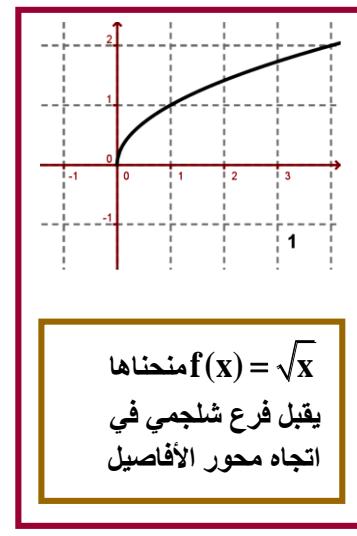
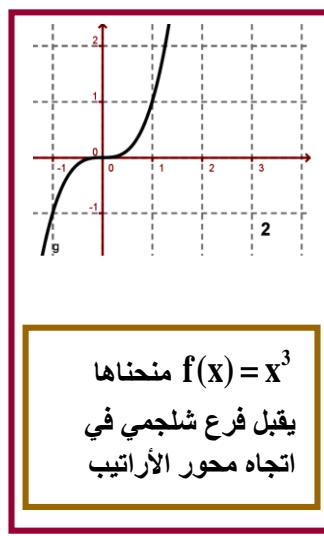
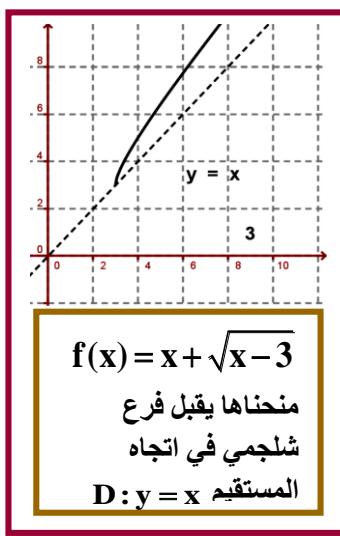
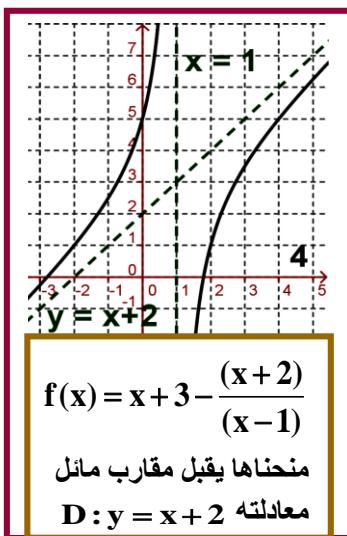
- إذا كان $0 < f(x) - (ax + b) \leq 0$ يكون فوق المقارب المائل الذي معدلته $y = ax + b$.
- إذا كان $0 < f(x) - (ax + b) \geq 0$ يكون تحت المقارب المائل الذي معدلته $y = ax + b$.
- إذا كان $f(x) - (ax + b) = 0$ يقطع المقارب المائل الذي معدلته $y = ax + b$.

• تحديد a و b :

تحديد a و b مع الحالات الخاصة:

$$\text{لتحديد } a \text{ نحسب: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

- إذا كان $a = 0$ نقول أن (C_f) يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأفاسيل. (أنظر الرسم 1).
- إذا كان $a = \infty$ نقول أن (C_f) يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب. (أنظر الرسم 2)
- $a \in \mathbb{R}^*$ (أي $a \neq 0$ و $a \neq \infty$) في هذه الحالة نبحث عن b .
لتحديد b نحسب: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = b$ (أي $0 < a \neq \infty$ و $a \neq \infty$).
- $b = \infty$ هذه الحالة نقول أن (C_f) يقبل فرع شلجمي في اتجاه المستقيم ذي المعادلة $y = ax$ بجوار ∞ . أو أيضاً: يقبل اتجاه مقارب في اتجاه المستقيم ذي المعادلة $y = ax$ بجوار ∞ . (أنظر الرسم 3)
- $b \in \mathbb{R}$ (حتى $b = 0$) في هذه الحالة نقول أن (C_f) يقبل مقارب مائل معادلته $y = ax + b$. (أنظر الرسم 4)



• ملحوظة:

إذا كان $c = 0$ يقبل مقارب مائل الذي معادلته $y = ax + b + c$ بجوار ∞ .

$$\text{مثال: } f(x) = x + 3 - \frac{(x+2)}{(x-1)}$$

$$\text{لدينا: } -1 = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - (x+3) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} -\frac{(x+2)}{(x-1)}$$



III. محور تماثل – مركز تماثل منحنى .

(A) مركز تماثل منحنى :

• خاصية:

f دالة عدديّة معرفة f . (C_f) منحنها على D_f في معلم $I(a, b)$ نقطة من المستوى (P) .

النقطة $I(a, b)$ هي مركز تماثل $L(C_f)$ يكافي : $\begin{cases} \forall x \in D_f ; 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f ; f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$

• مثل: $f(x) = \frac{2x - 3}{x + 1}$. بين أن النقطة $(-1, 2)$ مركز تماثل $L(C_f)$ منحنى الدالة f .

(B) محور تماثل $L(C_f)$:

• خاصية:

f دالة عدديّة معرفة f . (C_f) منحنها على D_f في معلم M . $D: x = a$ مستقيم من المستوى (P) .

المستقيم الذي معادلته $D: x = a$ هو محور تماثل $L(C_f)$ يكافي : $\begin{cases} \forall x \in D_f ; 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f ; f(2a - x) = f(x) \end{cases}$

• مثل: $f(x) = (x - 1)^2 + 1$ حدد محور تماثل (C_f) بين أن المستقيم الذي معادلته $x = 1$: محور تماثل $L(D)$.

IV. مجموعة دراسة دالة عدديّة :

1. تعاريف:

f دالة عدديّة معرفة على I' حيث I و I' متماثلين بالنسبة ل 0 مع I يحتوي على الأعداد الموجبة و I' يحتوي على الأعداد السالبة.

• إذا كانت f زوجية أو فردية يكفي دراسة على المجموعة $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+$ أو $D_E = I$.

أ- تغيرات f على I' هي نفس تغيرات f على I إذا كانت f فردية.

ب- تغيرات f على I' هي عكس تغيرات f على I إذا كانت f زوجية.

• إذا كانت f دورية ودورها T يكفي دراسة على $D_E = D_f \cap J$ مع J مجال طوله T .

2. مثل:

$f(x) = \sin(x)$ هي معرفة على \mathbb{R} ودورها 2π أي دراستها على مجال طوله $T = 2\pi$:

• $D_E = \mathbb{R} \cap [-\pi, \pi] = [-\pi, \pi]$ أو $D_E = \mathbb{R} \cap [0, 2\pi] = [0, 2\pi]$ أو $D_E = \mathbb{R} \cap [0, 2\pi] = [0, 2\pi]$ ملحوظة:

إذا كانت f دورية ودورها $T = P$ و زوجية (أو فردية) على D_f يكفي دراستها على مجال طوله $\frac{T}{2}$ أي $D_E = D_f \cap \left[0, \frac{T}{2}\right]$

$D_E = \mathbb{R} \cap \left[-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}\right]$

3. مثل:

• مثال 1 : $f(x) = \sin(x)$ هي معرفة ودورية و فردية على \mathbb{R} ودورها $T = 2\pi$. ندرس الدالة f على مجال طوله π .



الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء+ ع. ح. أ.

• **مثال 2 :** $f(x) = \cos(x)$ هي معرفة على \mathbb{R} . ودورها 2π و الزوجية. ندرسها على مجال طوله π .

• خلاصة: مجموعة دراسة الدالة هي $D_E = \mathbb{R} \cap [0, \pi] = [0, \pi]$ أي $D_E = [0, \pi]$

٥. تصميم دراسة دالة عدديّة :

1	مجموعة تعريف الدالة f : D_f	دراسة إشارة ' f ' على D_E أو D_f	8
2	دراسة زوجية f أو دورية f (إذا كان ذلك ممكناً)	اعطاء جدول تغيرات f على D_E أو D_f	9
3	استنتاج مجموعة دراسة f : D_f	إذا كان ذلك ممكناً دراسة تقرير أو نقط انعطاف f	10
4	نهايات f عند محدودات D_E أو D_f	إنشاء (1) المعلم - (2) المقاربات - (3) بعض المماسات (حيث $0 = f'(x)$ أو نقط انعطاف f إذا كان ممكناً) - (4) إنشاء (C_f)	11
5	استنتاج الفروع اللاحائية ل f	هناك بعض الأسئلة الإضافية مثل حل مباني المعادلة $x \in D_f / f(x) = m$ أو $x \in D_f / f(x) = g(x)$ أو المترادفة $.. x \in D_f / f'(x) \leq 0$	12
6	دراسة الوضع النسبي للمنحنى f و المقارب المائل (إذا كان ذلك ممكناً)	ثم دراسة الدالة $g(x) = f(x)$ أو $g(x) = \sqrt{f(x)}$	13
7	حساب الدالة المشتقة ' f ' ل f على D_f أو D_E	أو أسئلة أخرى ربط هذه الدالة بالفيزياء أو	14

مثال: .VI

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ: $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$. ولتكن (C_f) منحنى f في معلم متعدد منمنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

١) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2) أحسب النهايات عند مدادات D_f .

$$\forall x \in D_f; f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1} : \mathbb{R} \text{ نم } c; b; a \text{ عدد } (3)$$

.) 4) أدرس الفروع اللاحائية للمنحنى (C_f) .

٥) أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة لمقاربه المائل.

أحسب $f'(x)$ من كل D_E (6)

7) أدرس إشارة f على D , ثم أعط جدول تغيرات f .

8) أدرس تغير المنحنى (C_f) على D_f .

٩) بين أن النقطة $(1,1)$ مركز تماثل المنحنى (C_e) .