.01 .... (3 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقط $A(1,-1,-1)$ و $B(0,-2,1)$ و $C(1,-2,0)$.

.01 ..

أ- نبين أن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ . ... (0.75 ن)

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-1\\-2+1\\1+1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1-1\\-2+1\\0+1\end{pmatrix}$.

و منه : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\2 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 0\\2 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\-1 & -1\end{vmatrix}\vec{k}=(-1+2)\vec{i}-(-1+0)\vec{j}+(1+0)\vec{k}$

خلاصة : $\boxed{\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}$

ب- نستنتج أن : $x+y+z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) . ... (0.5 ن)

طريقة 1 :

- ✓ لدينا : المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ أي المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,1,1)$ منظمية على المستوى (ABC)
- ✓ ومنه : $M(x,y,z)\in(ABC)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z+1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow 1\times(x-1)+1\times(y+1)+1\times(z+1)=0$$

$$\Leftrightarrow x-1+y+1+z+1=0$$

$$\Leftrightarrow x+y+z+1=0$$

خلاصة : $x+y+z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

طريقة 2 :

- المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,1,1)$ متجهة منظمية على (ABC) إذن معادلة ديكارتية له هي على شكل $x+y+z+d=0$.
- النقطة $A(1,-1,-1)$ تنتمي إلى المستوى (ABC) فإن : $1\times1+1\times(-1)+1\times(-1)+d=0$ و منه : $d=1$.

خلاصة: $x+y+z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

.02

لتكن (S) الفلكة التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$. نتحقق من أن مركز الفلكة (S) هو $\Omega(2,-1,1)$ و شعاعها هو $R=\sqrt{5}$ . ... (0.75 ن)

لدينا : $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0\Leftrightarrow\underbrace{x^2-4x+4}_{(x-2)^2}-4+\underbrace{y^2+2y+1}_{(y+1)^2}-1+\underbrace{z^2-2z+1}_{(z-1)^2}-1+1=0$

$$\Leftrightarrow(x-2)^2-4+(y+1)^2-1+(z-1)^2-1+1=0$$

$$\Leftrightarrow(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=5=\sqrt{5}^2$$

و هي تمثل معادلة ديكارتية لفلكة مركزها $\Omega(2,-1,1)$ و شعاعها $R=\sqrt{5}$.

خلاصة : مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(2,-1,1)$ و أن شعاعها $R=\sqrt{5}$.

.03 ..

أ- نحسب : $d(\Omega,(ABC))$ .... (0.5 ن)

لدينا : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|2-1+1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

خلاصة : $d(\Omega,(ABC))=\sqrt{3}$.

ب- نستنتج أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة وفق دائرة (Γ) . ... (0.5 ن)

بما أن : $\sqrt{5}$ هو شعاع الدائرة و لدينا : $d(\Omega,(ABC))=\sqrt{3}<\sqrt{5}$

خلاصة : المستوى (ABC) يقطع الفلكة وفق دائرة (Γ) .

.02 .... (3 نقط)

.01 نحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$ . ... (0.75 ن)

✓ نحسب المميز Δ : لدينا : $\Delta=(-2)^2-4\times1\times4=4-16=-12<0$

إذن المعادلة لها حلين عقديين مترافقين هما : $z_1=\dfrac{2+i\sqrt{-\Delta}}{2\times1}=\dfrac{2+i\sqrt{12}}{2}=\dfrac{2+i2\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$ و $z_2=\overline{z_1}=1-i\sqrt{3}$.

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي : $S=\{1+i\sqrt{3}\ ;\ 1-i\sqrt{3}\}$

.02 في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C و D التي ألحاقها على التوالي هي : $a=1-i\sqrt{3}$, $b=2+2i$, $c=\sqrt{3}+i$ و $d=-2+2\sqrt{3}$.

أ- نتحقق أن : $a-d=-\sqrt{3}(c-d)$ . ... (0.5 ن)

لدينا : $c-d=\sqrt{3}+i-(-2+2\sqrt{3})=-\sqrt{3}+2+i$

و $a-d=1-i\sqrt{3}-(-2+2\sqrt{3})=3-2\sqrt{3}-i\sqrt{3}=-\sqrt{3}\Big(\underbrace{-\sqrt{3}+2+i}_{c-d}\Big)=-\sqrt{3}(c-d)$.

خلاصة : $a-d=-\sqrt{3}(c-d)$

ب- نستنتج أن النقط A, C و D مستقيمية . ... (0.25 ن)

لدينا : $a-d=-\sqrt{3}(c-d)\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{DA}}=-\sqrt{3}z_{\overrightarrow{DC}}$ (مع $z_{\overrightarrow{DA}}$ و $z_{\overrightarrow{DC}}$ لحقي كل من المتجهتين $\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{DC}$ على التوالي)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DA}=-\sqrt{3}\overrightarrow{DC}$

و بالتالي المتجهتين $\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{DC}$ مستقيميتين .

خلاصة : النقط A, C و D مستقيمية .

.03 ليكن z لحق نقطة M و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\dfrac{-\pi}{3}$.

نتحقق أن : $z' = \frac{1}{2}az$ . ... (0.5 ن)

الكتابة العقدية للدوران R هي : $z' - \omega = (z-\omega)e^{i\theta}$ مع ω هو لحق مركز الدوران و θ هو زاوية الدوران .

ومنه : $z' - 0 = (z-0)e^{i\frac{-\pi}{3}}$ ؛ (لأن $\omega = 0$ هو لحق O مركز الدوران R و $\theta = \frac{-\pi}{3}$ زاوية الدوران)

$$\begin{aligned} z' &= z \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right) \\ &= z \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= z\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= z\frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right) \\ &= \frac{1}{2}az \qquad ; \left(1 - i\sqrt{3} = a\right) \end{aligned}$$

و بالتالي الكتابة العقدية للدوران R هي $z' = \frac{1}{2}az$.

خلاصة : $z' = \frac{1}{2}az$

04. لتكن H صورة النقطة B بالدوران R ؛ و h لحقها ؛ و P النقطة التي لحقها p حيث $p = a - c$.

أ- تحقق أن : $h = ip$ . ... (0.5 ن)

لدينا :

$$\begin{aligned} R(B) = H &\Leftrightarrow h = \frac{1}{2}ab \\ &\Leftrightarrow h = \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)(2 + 2i) \\ &\Leftrightarrow h = \left(1 - i\sqrt{3}\right)(1 + i) \\ &\Leftrightarrow h = \left(1 - i\sqrt{3}\right) + i\left(1 - i\sqrt{3}\right) \\ &\Leftrightarrow h = i\underbrace{\left(-i - \sqrt{3}\right)}_{-c} + i\underbrace{\left(1 - i\sqrt{3}\right)}_{a} \\ &\Leftrightarrow h = i(a - c) \\ &\Leftrightarrow h = ip \end{aligned}$$

خلاصة : $h = ip$

ب- نبين أن : المثلث OHP قائم الزاوية و متساوي الساقين في O . ... (0.5 ن)

لدينا :

$$\frac{h-0}{p-0}=\frac{ip}{p}=i \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{|h-0|}{|p-0|}=|i| \\ \left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OH}\right)\equiv \arg\left(\dfrac{h-0}{p-0}\right)\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{OH}{OP}=1 \\ \left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OH}\right)\equiv \arg(i)\ [2\pi]\ ;\ \left(\dfrac{h}{p}=i\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} OH=OP \\ \left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OH}\right)\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$

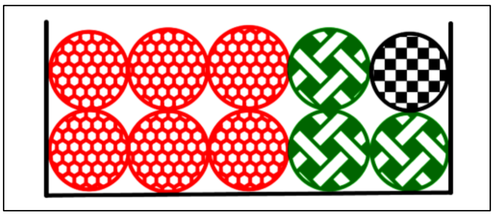
و منه :

- $OH=OP$ المثلث OHP متساوي الساقين في O .
- $\left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OH}\right)\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ المثلث OHP قائم الزاوية في O

خلاصة : المثلث OHP قائم الزاوية و متساوي الساقين في O .

.03 .... (3 نقط)

يحتوي صندوق: على 10 كرات : ثلاث كرات خضراء و ست كرات حمراء و كرة واحدة سوداء لا يمكن التميز بينها باللمس .



نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا و تآنيا ثلاث كرات من الصندوق .

نعتبر الأحداث التالية :

✓ الحدث A : " الحصول على ثلاث كرات خضراء "

✓ الحدث B : " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "

✓ الحدث C : " الحصول على كرتين على الأقل من نفس اللون "

.01 نبين أن : $p(A)=\frac{1}{120}$ و $p(B)=\frac{7}{40}$ .... (2 ن)

✓ عدد السحبات الممكنة (أي $card\Omega$) :

سحب ثلاث كرات في آن واحد من بين 10 كرات يمثل تأليفة ل 3 من بين 10 . ومنه عدد السحبات هو عدد التأليفات ل 3 من بين 10 إذن : $card\Omega=C_{10}^{3}=\frac{10\times 9\times 8}{1\times 2\times 3}=120$

إذن : $card\Omega=C_{10}^{3}=120$.

- نبين أن : $p(A)=\frac{1}{120}$.

✓ عدد السحبات التي تحقق الحدث A (أي $cardA$) :

✓ الحدث A " الحصول على ثلاث كرات خضراء "

❖ الكرات الثلاث المسحوبة في آن واحد من اللون الأخضر من بين 3 إذن $C_{3}^{3}=\frac{3\times 2\times 1}{1\times 2\times 3}=1$ (ملحوظة $C_{n}^{n}=1$)

و منه : $cardA=C_{3}^{3}=1$ و بالتالي : $p(A)=\frac{cardA}{card\Omega}=\frac{C_{3}^{3}}{C_{10}^{3}}=\frac{1}{120}$.

خلاصة : $p(A)=\frac{1}{120}$

❖ نبين أن : $p(B)=\frac{7}{40}$.

✓ عدد السحبات التي تحقق الحدث B (أي cardB) :

✓ الحدث B " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "

الحدث B نعبر عنه أيضا بما يلي : B " الكرات الثلاث المسحوبة من اللون أخضر أو الكرات الثلاث المسحوبة من اللون أحمر "

- الكرات الثلاث المسحوبة و في آن واحد و من اللون أخضرمن بين 3 كرات من اللون أخضر إذن $C_3^3=1$.
- الكرات الثلاث المسحوبة و في آن واحد و من اللون أحمر من بين 6 كرات من اللون أحمر إذن : $C_6^3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$.
- ومنه $cardB=C_3^3+C_6^3=1+20=21$

ومنه : $p(B)=\frac{cardB}{card\Omega}=\frac{C_3^3+C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{21}{120}=\frac{7\times\cancel{3}}{\cancel{3}\times40}=\frac{7}{40}$.

خلاصة : $p(B)=\frac{7}{40}$

.02 نحسب : $p(C)$ . ... (1 ن)

✓ الحدث C : " الحصول على كرتين على الأقل من نفس اللون "

✓ عدد السحبات التي تحقق الحدث C (أي cardC) :

الطريقة 1 :

الحدث المضاد للحدث C هو $\overline{C}$ " الحصول على كرة واحدة من كل لون "

الحدث $\overline{C}$ نعبر عنه أيضا بما يلي : $\overline{C}$ " الكرات الثلاث المسحوبة من ألوان مختلفة "

و منه : $card\overline{C}=C_3^1\times C_6^1\times C_1^1=3\times6\times1=18$

ومنه : $cardC=card\Omega-card\overline{C}=120-18=102$

ومنه : $p(C)=\frac{cardC}{card\Omega}=\frac{card\Omega-card\overline{C}}{C_{10}^3}=\frac{120-18}{120}=\frac{102}{120}=\frac{\cancel{6}\times17}{\cancel{6}\times20}=\frac{17}{20}$

خلاصة : $p(C)=\frac{17}{20}$

الطريقة 2 :

الحدث C نعبر عنه أيضا بما يلي : C " (الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون) أو (الحصول على كرتين بالضبط من نفس اللون) "

- (الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون) إذن الحدث B إذن $cardB=C_3^3+C_6^3=1+20=21$
- (الحصول على كرتين بالضبط من نفس اللون) إذن: " (كرتين من اللون أخضر وكرة من اللونين المتبقيين) او (كرتين من اللون أحمر و كرة من اللونين المتبقيين) "
- (كرتين من اللون أخضر وكرة من اللونين المتبقيين وعددها 7) و هو يتم ب $C_3^2\times C_7^1$ كيفية مختلفة .
- (كرتين من اللون أحمر و كرة من اللونين المتبقيين و عددها 4) و هو يتم ب $C_6^2\times C_4^1$ كيفية مختلفة .
- . إذن (الحصول على كرتين بالضبط من نفس اللون) و هو يتم ب $C_3^2\times C_7^1+C_6^2\times C_4^1=3\times7+15\times4=81$ كيفية مختلفة .
- ومنه : $cardC=C_3^3+C_6^3+C_3^2\times C_7^1+C_6^2\times C_4^1=1+20+3\times7+15\times4=102$

و بالتالي : $p(C)=\frac{cardC}{card\Omega}=\frac{C_3^3+C_6^3+C_3^2\times C_7^1+C_6^2\times C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{1+20+3\times7+15\times4}{120}=\frac{102}{120}=\frac{\cancel{6}\times17}{\cancel{6}\times20}=\frac{17}{20}$.

خلاصة : $p(C)=\frac{17}{20}$

.04 .... (11 نقطة)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

و (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة 1 cm) .

I. الجزء الأول :

.01 أحسب $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)$ ثم أول النتيجة هندسيا . ... (0.5 ن)

❖ نحسب : $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)$

لدينا :

- $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

- $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln x=-\infty \Rightarrow \begin{cases}\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} -\ln x=+\infty\\ \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} (\ln x)^2=+\infty\end{cases}$

- و منه : $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2=+\infty$.

خلاصة : $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$.

❖ نؤول النتيجة هندسيا :

بما أن : $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$ إذن المنحنى (C) يقبل مقاربا عموديا هو المستقيم الذي معادلته $x=0$ (أي محور الأراتيب)

..02

أ- نتحقق أن : لكل x من المجال $]0,+\infty[$: $f(x)=x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$ . ... (0.25 ن)

لدينا :

$$x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x=x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln x\times\ln x-\ln x$$
$$=x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\ln x)^2-\ln x$$
$$=f(x)$$

خلاصة : لكل x من المجال $]0,+\infty[$: $f(x)=x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$.

ب- نستنتج أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ . ... (0.5 ن)

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} x+\frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$ إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x=+\infty$

و منه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x\right)=+\infty$

خلاصة : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

ج- نبين أن لكل x من المجال $]0,+\infty[$: $\frac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ ثم نستنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ . ... (0.5 ن)

- نبين أن : $\frac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$.

لدينا :

$$\frac{(\ln x)^2}{x}=\frac{\left(\ln\left(\sqrt{x}^2\right)\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$$

$$=\frac{\left(2\ln\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}\quad ;\quad \left(\ln x^r=r\ln x\ ;\ r\in\mathbb{Q}\right)$$

$$=\frac{4\left(\ln\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$$

$$=4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$$

خلاصة : $\frac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$.

- نستنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$.

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$$

$$=\lim_{t\to+\infty}4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2\quad ;\quad \left(t=\sqrt{x}\ ;\ x\to+\infty\ ;\ t\to+\infty\right)$$

$$=0\quad ;\quad \left(\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0\right)$$

خلاصة : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$.

د- نبين أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ اتجاهه المقارب المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ . ...(0.75 ن)

لدينا :

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}1+\frac{1}{2x}-\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}\frac{(\ln x)^2}{x}=1$$

لأن : $\lim_{x\to+\infty}1+\frac{1}{2x}=1$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ (حسب ما سبق)

إذن : $a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

- $$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\cancel{x}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x-\cancel{x}=+\infty$$ (لأن $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$)

إذن : $b=\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=+\infty$

وبالتالي : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ و $b=\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=+\infty$

خلاصة : المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ بجوار $+\infty$.

03..

أ- نبين أن لكل x من $]0,1]$: $(x-1)+\ln x\le 0$ و أن لكل x من $[1,+\infty[$: $(x-1)+\ln x\ge 0$ . ... (0.5 ن)

- نبين أن لكل x من $]0,1]$: $(x-1)+\ln x\le 0$.

لدينا :

$$0<x\le 1\Rightarrow\begin{cases}-1<x-1\le 0\\ \ln x\le 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow(x-1)+\ln x\le 0$$ (مجموع عددين سالبين هو عدد سالب) .

و منه : لكل x من $]0,1]$: $(x-1)+\ln x\le 0$.

- نبين أن لكل x من $[1,+\infty[$:

لدينا :

$$x\ge 1\Rightarrow\begin{cases}x-1\ge 0\\ \ln x\ge 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow(x-1)+\ln x\le 0$$ (مجموع عددين موجبين هو عدد موجب)

و منه : لكل x من $[1,+\infty[$: $(x-1)+\ln x\ge 0$.

خلاصة : لكل x من $]0,1]$: $(x-1)+\ln x\le 0$ و أن لكل x من $[1,+\infty[$: $(x-1)+\ln x\ge 0$.

ملحوظة : يمكن استعمال جدول الإشارة لكل من $x-1$ و $\ln x$ على المجال $]0,+\infty[$.

ب- نبين أن لكل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$ . ... (1 ن)

لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2\right)' \\ &= 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\times 2(\ln x)'\ln x \\ &= 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\times\ln x \\ &= \frac{x-1+\ln x}{x} \end{aligned}$$

خلاصة : لكل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{x-1+\ln x}{x}$.

ج- نضع جدول تغيرات الدالة f . ... (0.5 ن)

x	0 1 $+\infty$
$f'(x)$	‖ $-$ 0 $+$
$f(x)$	‖ $+\infty$ ↘ $\frac{3}{2}$ ↗ $+\infty$

04.

أ- نبين أن لكل x من $]0,+\infty[$: $f''(x)=\dfrac{2-\ln x}{x^2}$ . ... (0.5 ن)

لدينا :

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' \\ &= \left(\frac{x-1+\ln x}{x}\right)' \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\times x-(x-1+\ln x)\times 1}{x^2} \\ &= \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+1-\ln x}{x^2} \\ &= \frac{2-\ln x}{x^2} \end{aligned}$$

خلاصة : لكل x من $]0,+\infty[$: $f''(x)=\dfrac{2-\ln x}{x^2}$.

ب- نستنتج أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد إحداثيتيها.. (0.5 ن)

- لتحديد نقطة انعطاف الدالة f ندرس إشارة f'' الدالة المشتقة الثانية ل f .
- إشارة f'' هي إشارة $2-\ln x$ لأن $x^2>0$

لدينا : $2-\ln x\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\leq 2$

$\Leftrightarrow x \le e^2$

ومنه إشارة f'' بواسطة الجدول التالي :

x	0 $\qquad$ e^2 $\qquad$ $+\infty$
$f''(x)$	‖ $\quad +$ $\quad 0$ $\quad -$

❖ من خلال الجدول :

الدالة المشتقة الثانية f'' تنعدم في e^2 و تتغير إشارتها بجوار e^2 إذن النقطة التي زوج إحداثيتيها $\left(e^2, f\left(e^2\right)\right) = \left(e^2, \dfrac{2e^2+1}{2}\right)$

هي نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f .

..05

أ- نبين أن لكل x من $]0,+\infty[$: $f(x)-x=\dfrac{1}{2}(\ln x-1)^2$ ثم نستنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ) ... (0.5 ن)

- نبين أن لكل x من $]0,+\infty[$: $f(x)-x=\dfrac{1}{2}(\ln x-1)^2$

لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\ln x-1)^2 &= \frac{1}{2}\left((\ln x)^2-2\ln x+1\right)\\ &= \frac{1}{2}(\ln x)^2-\ln x+\frac{1}{2}\\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(\ln x)^2-\ln x+\frac{1}{2}+x}_{f(x)}-x\\ &= f(x)-x\end{aligned}$$

خلاصة : لكل x من $]0,+\infty[$: $f(x)-x=\dfrac{1}{2}(\ln x-1)^2$.

- نستنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ) .

لهذا ندرس إشارة : $f(x)-x$ أي إشارة $\dfrac{1}{2}(\ln x-1)^2$ و هي بدورها موجبة على $]0,+\infty[$ ولكن تنعدم في 0 $\ln x-1=0$ أي $x=e$.

خلاصة :

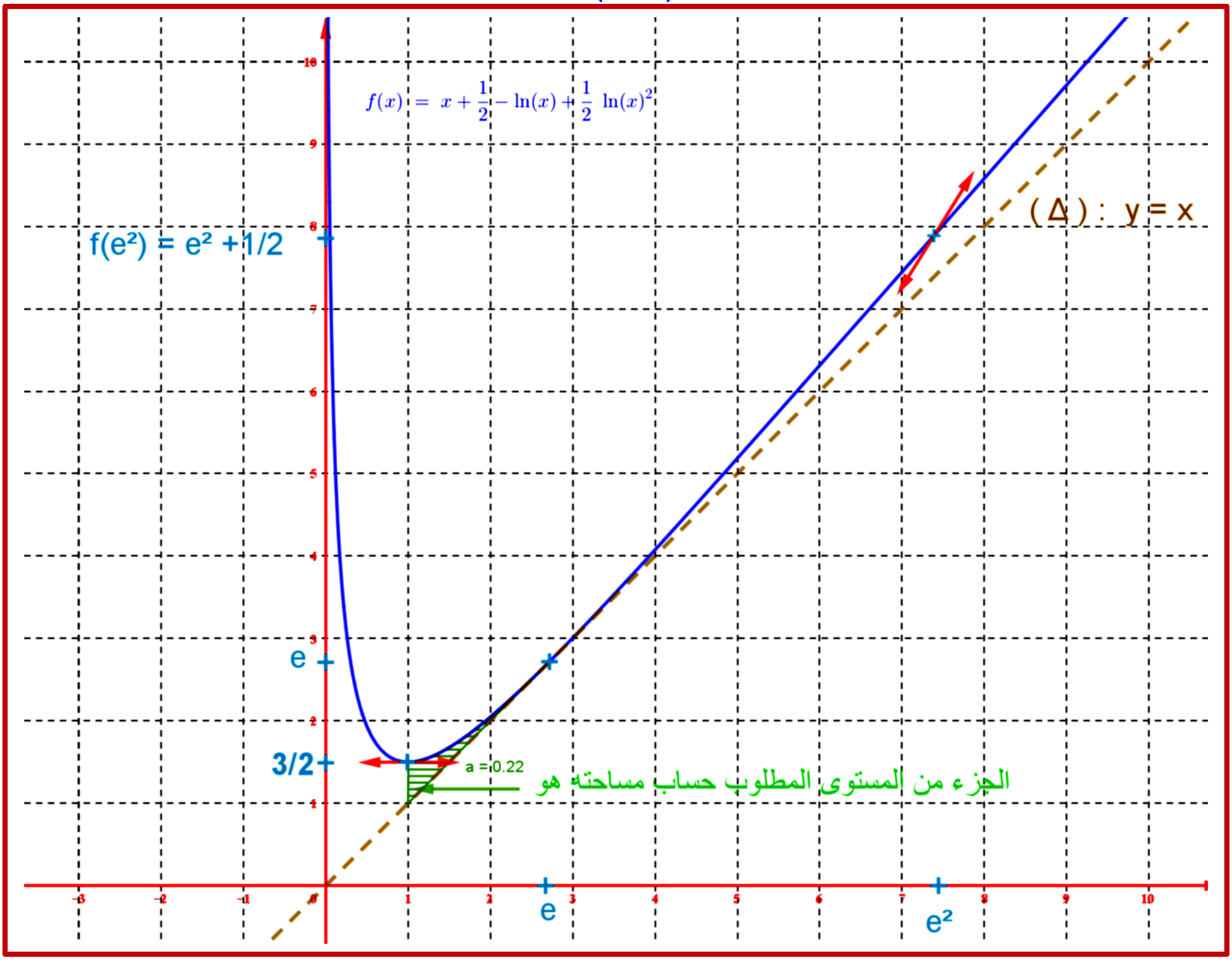
➢ المنحنى (C) يوجد قطعا فوق المستقيم (Δ) على كل من المجالين $]0,e[$ و $]e,+\infty[$.

➢ المنحنى (C) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة التي إحداثيتيها $(e,f(e))=(e,e)$

➢ نلخص ذلك بواسطة الجدول التالي :

x	0		e		$+\infty$
$f(x)-x$ و $(\ln x-1)^2$ لهما نفس الإشارة	‖	$+$	0	$+$	
الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ)	‖	(C) فوق (Δ)	(C) و (Δ) يتقاطعان في $x=e$	(C) فوق (Δ)	

ب- ننشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C) في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ . ... (1 ن)



..06

أ- نبين أن : الدالة $H : x \mapsto x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \ln x$ على $]0,+\infty[$ .... (0.5 ن)

لهذا نبين أن : $H'(x) = h(x)$.

لدينا : $H'(x) = (x\ln x - x)'$

$$= (x)'\ln x + (x)(\ln x)' - (x)'$$

$$= 1\times\ln x + \cancel{x}\times\frac{1}{\cancel{x}} - 1$$

$$= \ln x + \cancel{1} - \cancel{1}$$

$$= \ln x = h(x)$$

و منه : $H'(x) = h(x)$

خلاصة : الدالة $H : x \mapsto x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \ln x$ على $]0,+\infty[$.

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء نبين أن : $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e-2$ . ... (0.75 ن)

نكتب : $\int_1^e (\ln x)^2 dx = \int_1^e (\ln x)\times(\ln x) dx$

نضع :

$$\begin{array}{ccc} u(x)=\ln x & & u'(x)=\dfrac{1}{x} \\ (1)\downarrow & (2)\searrow & - \downarrow(3) \\ v'(x)=\ln x & & v(x)=x\ln x - x \end{array}$$

ومنه:

$$\overbrace{\int_1^e (\ln x)^2 dx}^{(1)} = \overbrace{\left[\ln x \times (x\ln x - x)\right]_1^e}^{(2)} - \overbrace{\int_1^e \frac{1}{x}\times(x\ln x - x)dx}^{(3)}$$
$$= \left(\ln e(e\ln e - e)\right) - \left(\ln 1 \times (1\ln 1 - 1)\right) - \int_1^e (\ln x - 1)dx$$
$$= \left(1(e\times 1 - e) - 0\right) - \int_1^e \ln x dx + \int_1^e 1 dx$$
$$= 0 - [x\ln x - x]_1^e + [x]_1^e \quad ; \quad \left(H'(x) = h(x)\right)$$
$$= -\left((e\times 1 - e) - (1\times 0 - 1)\right) + (e-1)$$
$$= 0 - 1 + e - 1$$
$$= e-2$$

خلاصة : $\boxed{\int_1^e (\ln x)^2 dx = e-2}$

ج- نحسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$.
.... (0.5 ن)

المساحة المطلوبة هي :

(وحدة المساحة) $\left(\int_1^e (f(x)-x)dx\right)\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|\ cm^2 = \left(\int_1^e |f(x)-x|dx\right)\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$. (لأن (C) فوق (Δ) على $[1,e]$)

$$= \left(\int_1^e \left(\cancel{x} + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \cancel{x}\right)dx\right)\times 1\times 1\ cm^2$$
$$= \int_1^e \frac{1}{2}dx - \int_1^e \ln x dx + \frac{1}{2}\underbrace{\int_1^e (\ln x)^2 dx}_{e-2}\quad cm^2$$
$$= \frac{1}{2}[x]_1^e - [x\ln x - x]_1^e + \frac{1}{2}(e-2)\quad cm^2$$
$$= \frac{1}{2}(e-1) - \underbrace{\left((e\times 1 - e) - (1\times 0 - 1)\right)}_{-1} + \frac{1}{2}(e-2)\ cm^2$$
$$= \frac{e}{2} - \frac{1}{2} - 1 + \frac{e}{2} - 1 = e - \frac{5}{2}\ cm^2$$

خلاصة : مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ هي $\frac{2e-5}{2}\ cm^2$.

II. الجزء الثاني :

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

01..

أ- نبين بالترجع أن : $1\le u_n\le e$ لكل n من $\mathbb{N}$ .... (5.0 ن)

- نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n=0$

لدينا : $1\le u_0=1\le e$ و منه العلاقة صحيحة من أجل $n=0$.

- نفترض أن العلاقة صحيحة للرتبة n : أي $1\le u_n\le e$ (معطيات الترجع) .
- نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$: أي نبين أن : $1\le u_{n+1}\le e$

حسب معطيات الترجع لدينا : $1\le u_n\le e$.

و منه : $1\le u_n\le e\Rightarrow f(1)\le f(u_n)\le f(e)$ (لأن f تزايدية على $[1,e]$ و $1\le u_n\le e$)

$\Rightarrow \frac{3}{2}\le u_{n+1}\le e$ (لأن $f(e)=e$ تقاطع مع المستقيم (Δ) و $f(1)=\frac{3}{2}$ جدول تغيرات)

$\Rightarrow 1\le \frac{3}{2}\le u_{n+1}\le e$

و منه : العلاقة صحيحة ل $n+1$.

خلاصة : $1\le u_n\le e$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب- نبين أن المتتالية (u_n) تزايدية .... (0.5 ن)

لهذا نبين أن: $u_{n+1}-u_n\ge 0$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ليكن n من $\mathbb{N}$ نضع $x=u_n$ و لدينا : $1\le u_n\le e$ أي $u_n\in[1,e]$

حسب نتيجة السؤال I (5) أ-): (C) فوق (Δ) على $[1,e]$ إذن : لكل x من $[1,e]$ فإن $f(x)-x\ge 0$ أي $f(x)\ge x$.

أي : $x\in[1,e]\Rightarrow f(x)\ge x$

$\Rightarrow f(u_n)\ge u_n\ ;\ (u_n=x$ و $1\le u_n\le e)$

$\Rightarrow u_{n+1}\ge u_n\ ;\ (u_{n+1}=f(u_n))$

$\Rightarrow u_{n+1}-u_n\ge 0$

و بالتالي : لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا $u_{n+1}\ge u_n$ (أو أيضا $u_{n+1}-u_n\ge 0$)

خلاصة : المتتالية (u_n) تزايدية .

ملحوظة : يمكن استعمال الترجع (أي نبين لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا $u_{n+1}\ge u_n$)

ج- نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة . ... (0.5 ن)

لدينا :

✓ المتتالية (u_n) تزايدية.

✓ المتتالية (u_n) مكبورة (لأن $1\le u_n\le e$)

إذن حسب خاصية : المتتالية (u_n) متقاربة (مع نهايتها ℓ حيث $\ell \in \mathbb{R}$)

خلاصة : (u_n) متقاربة

02. نحدد نهاية المتتالية (u_n) . ... (0.75 ن)

- المتتالية تكتب على شكل $u_{n+1} = f(u_n)$
- الدالة f متصلة على $I = [1,e]$
- $f(I) = [f(1), f(e)] = \left[\frac{3}{2}, e\right] \subset I = [1,e]$ (لأن f متصلة و تزايدية على $[1,e]$ و $f(e) = e$ و $f(1) = \frac{3}{2}$)
- لدينا : $u_0 = 1 \in [1,e]$
- (u_n) متقاربة إذن نهايتها ℓ من $\mathbb{R}$.

إذن : ℓ هو حل للمعادلة $f(x) = x$; $x \in I = [1,e]$ (حسب خاصية) .

أي ندرس تقاطع المنحنى (C) و المستقيم (Δ) على $[1,e]$ و حسب ما سبق المنحنى (C) و المستقيم (Δ) يتقاطعان في نقطة وحيدة حيث زوج إحداثيتيها هي (e,e) و منه حل المعادلة السابقة هي $x = e \in [1,e]$ إذن $\ell = e$

خلاصة : $\lim_{n \to +\infty} u_n = e$