



01.

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقطة $A(0, -2, -2)$ و $B(1, -2, -4)$ و $C(-3, -1, 2)$.

01. نبين أن: $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. استنتج أن $2x + 2y + z + 6 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) (1 ن)

• نبين أن: $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3-0 \\ -1+2 \\ 2+2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ و } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1-0 \\ -2+2 \\ -4+2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ لدينا :}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \text{ و منه :}$$

خلاصة: $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

• نستنتج أن: $2x + 2y + z + 6 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

طريقة 1:

✓ لدينا: المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ أي المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(2, 2, 1)$ منظمية على المستوى (ABC)

✓ ومنه: $M(x, y, z) \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-0 \\ y+2 \\ z+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-0) + 2(y+2) + 1(z+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y + 4 + z + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y + z + 6 = 0$$

خلاصة: $2x + 2y + z + 6 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

طريقة 2:

• المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(2, 2, 1)$ متجهة منظمية على (ABC) إذن معادلة ديكارتية له هي على شكل $2x + 2y + 1z + d = 0$.

• النقطة $A(0, -2, -2)$ تنتمي إلى المستوى (ABC) فإن: $2 \times 0 + 2 \times (-2) + 1 \times (-2) + d = 0$ و منه: $d = 6$.

خلاصة: $2x + 2y + z + 6 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

02.

لتكن (S) الفلكة التي معادلتها: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 23 = 0$. نتحقق من أن مركز الفلكة (S) هو $\Omega(1, 0, 1)$ و شعاعها هو $R = 5$ (0.5 ن)

$$\text{لدينا : } x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 23 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 + (y - 0)^2 + z^2 - 2z + 1 - 1 - 23 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-0)^2 + (z-1)^2 - 1 - 23 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = 25 = 5^2$$

و هي تمثل معادلة ديكارتية لفلكة مركزها $\Omega(1, 0, 1)$ و شعاعها $R = 5$.



خلاصة: مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(1,0,1)$ و أن شعاعها $R = 5$.

03. (0.25 ن) لسؤال أ

أ- نتحقق من أن: $(t \in \mathbb{R})$; $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ هو تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) المار من Ω و العمودي على المستوى (ABC)

✓ بما أن: (Δ) عمودي على المستوى (ABC) إذن $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} (2,2,1)$ متجهة منظمية على (ABC) فهي موجهة للمستقيم (Δ) و (Δ) يمر من Ω (أي $\Omega(1,0,1) \in (\Delta)$)

✓ إذن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) هو: $(t \in \mathbb{R})$; $\begin{cases} x = 1 + 2t = 1 + 2t \\ y = 0 + 2t = 2t \\ z = 1 + t = 1 + t \end{cases}$ (Δ)

خلاصة: تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) هو: $(t \in \mathbb{R})$; $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ (Δ) .

ب- نحدد إحداثيات النقطة H تقاطع المستوى (ABC) و المستقيم (Δ) (0.5 ن)

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in (ABC) \cap (\Delta) &\Leftrightarrow \begin{cases} M \in (ABC) \\ M \in (\Delta) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z + 6 = 0 \\ x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2(1+2t) + 2 \times 2t + (1+t) + 6 = 0 \\ x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 9t + 9 = 0 \\ x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = 1 + 2 \times (-1) = -1 \\ y = 2 \times (-1) = -2 \\ z = 1 - 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ومنه: تقاطع المستوى (ABC) و المستقيم (Δ) هي النقطة $H(-1,-2,0)$.

04. نتحقق من أن $d(\Omega, (ABC)) = 3$ ثم نبين أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة شعاعها 4 يتم تحديد مركزها.



- نتحقق من أن : $d(\Omega, (ABC)) = 3$ (أي المسافة بين النقطة $\Omega(1,0,1)$ مركز الفلكة و المستوى (ABC)) .. (0.75 ن)

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|2 \times 1 + 2 \times 0 + 1 \times 1 + 6|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3$$

خلاصة : $d(\Omega, (ABC)) = 3$.

- نبين أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة شعاعها 4 يتم تحديد مركزها .

نعلم أن شعاع الفلكة (S) هو $R = 5$ ومنه $d(\Omega, (ABC)) < R$.

خلاصة 1 : المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة .

$$R_c = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

✓ نحدد شعاعها : نضع R_c شعاع الدائرة ومنه $R_c = 4$.

✓ نحدد مركزها : مركزها هو المسقط العمودي ل Ω مركز الفلكة (S) على المستوى (ABC) أي تقاطع المستقيم (Δ) و

المستوى (ABC) و حسب ما سبق التقاطع هو النقطة $H(-1, -2, 0)$.

خلاصة 2 : المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة شعاعها 4 و مركزها النقطة $H(-1, -2, 0)$.

02

- 01. نحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $2z^2 + 2z + 5 = 0$ (0.75 ن)

✓ نحسب المميز Δ : لدينا : $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times 5 = 4 - 40 = -36 < 0$

$$\text{إذن المعادلة لها حلين عقديين مترافقين هما : } z_1 = \frac{-2 + i\sqrt{-\Delta}}{2 \times 2} = \frac{-2 + 6i}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \text{ و } z_2 = \bar{z}_1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$$

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي : $S = \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i ; -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \right\}$

- 02. في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$

أ- نكتب على الشكل المثلي العدد العقدي $d = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (0.25 ن)

طريقة 1 :

نعلم أن : إذا كان $z = [r, \alpha]$ فإن $\bar{z} = [r, \pi - \alpha] = r(\cos(\pi - \alpha) + i \sin(\pi - \alpha))$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \left[1, \frac{\pi}{3} \right]$$

من جهة أخرى :

$$d = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right)$$

خلاصة : الشكل المثلي ل d هو : $d = \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right)$

طريقة 2 :



$$\alpha \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi] \quad \text{إذن} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{\operatorname{Re}(d)}{|d|} = -\frac{1}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\operatorname{Im}(d)}{|d|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right. : \text{نضع } \arg(d) \equiv \alpha [2\pi] \text{ ولدينا : } |d| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \text{ ومنه :}$$

خلاصة : الشكل المثلثي ل d هو : $d = |d|(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]$

طريقة 3 :

نلاحظ أن :

• $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \left[1, \frac{\pi}{3}\right]$ ومنه $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \left[1, -\frac{\pi}{3}\right]$ ولدينا $-1 = \cos \pi + i \sin \pi = [1, \pi]$

• إذن : $d = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = -1 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = [1, \pi] \times \left[1, -\frac{\pi}{3}\right] = \left[1, \pi - \frac{\pi}{3}\right] = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]$

خلاصة : الشكل المثلثي ل d هو : $d = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]$

بـ لتكن النقطة A التي لحقتها $a = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ و B صورة النقطة A بالدوران R. ليكن b لحق النقطة B، بين أن $b = d.a$ (0.5 ن)

الكتابة العقدية للدوران R هي : $z' - \omega = (z - \omega)e^{i\theta}$ مع ω هو لحق مركز الدوران و θ هو زاوية الدوران .

ومنه : $z' - 0 = (z - 0)e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (لأن $\omega = 0$ هو لحق O مركز الدوران R و $\theta = \frac{2\pi}{3}$ زاوية الدوران)

(لأن $d = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right] = e^{i\frac{2\pi}{3}}$) ؛ $z' = z \times d$

و بالتالي الكتابة العقدية للدوران R هي $z' = z \times d$

من جهة أخرى : $R(A) = B \Leftrightarrow b = ad$ (لأن $z' = z \times d$) .

خلاصة : $b = d.a$

03 لتكن t الإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$ والنقطة C صورة B بالإزاحة t و c لحق النقطة C .

أـ نتحقق من أن $c = b + a$ ثم استنتج أن $c = a\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ (يمكنك استعمال السؤال 2 ب -) (0.75 ن)

• نتحقق من أن : $c = b + a$

طريقة 1 :

لدينا : $t(B) = C \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$

($Z_{\overrightarrow{BC}}$ لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$ و $Z_{\overrightarrow{OA}}$ لحق المتجهة $\overrightarrow{OA}$)

$\Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{BC}} = Z_{\overrightarrow{OA}}$

$\Leftrightarrow c - b = a - 0$

$\Leftrightarrow c = b + a$

خلاصة : $c = b + a$

طريقة 2 :

الكتابة العقدية للإزاحة t هي : $z' = z + a$ مع a هو لحق $\overrightarrow{OA}$ متجهة الإزاحة t



و منه : $c = b + a \Leftrightarrow t(B) = C$ (لأن $z' = z + a$) .

خلاصة : $c = b + a$

• نستنتج أن $c = a \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$

لدينا : $c = b + a$

$= da + a$; ($b = da$)

$= a(d + 1)$

$= a \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i + 1 \right) = a \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$

خلاصة : $c = a \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$

بـ نحدد : $\arg\left(\frac{c}{a}\right)$ ثم نستنتج أن المثلث OAC متساوي الأضلاع (0.75 ن)

• نحدد : $\arg\left(\frac{c}{a}\right)$

لدينا : $\frac{c}{a} = \frac{\cancel{a} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)}{\cancel{a}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ (لأن $c = a \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$)

ومنه : $\arg\left(\frac{c}{a}\right) \equiv \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) [2\pi]$

$\arg\left(\frac{c}{a}\right) \equiv \arg\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

خلاصة : $\arg\left(\frac{c}{a}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

• نستنتج أن المثلث OAC متساوي الأضلاع .

طريقة 1 : (التي كان يهدف إليها صاحب التمرين)

لدينا :

❖ حسب ما سبق : B صورة النقطة A بالدوران R إذن $OA = OB$ (حسب تعريف الدوران)

❖ حسب ما سبق : C صورة النقطة B بالإزاحة t ذات المتجهة $\overrightarrow{OA}$ إذن $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ و منه الرباعي OACB متوازي الأضلاع

و له ضلعين متتاليين متقايسين (لأن $OA = OB$) إذن OACB هو معين إذن $OA = OC$.

استنتاج 1 : $OA = OC$.

❖ لدينا : $\arg\left(\frac{c-0}{a-0}\right) \equiv \arg\left(\frac{c}{a}\right) [2\pi]$



$$\equiv \arg\left(\frac{c}{a}\right) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \quad \text{استنتاج 2:}$$

من خلال الإستنتاج 1 و 2 نحصل على: المثلث OAC له زاوية AOC قياسها $\frac{\pi}{3}$ و ضلعيها متقايسين (OA = OC) إذن

المثلث OAC متساوي الأضلاع

خلاصة: المثلث OAC متساوي الأضلاع.

طريق 2:

$$\text{حسب ما سبق: } \frac{c}{a} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ و منه:}$$

$$(1) \quad OA = AC \quad \text{إذن} \quad \left|\frac{c-0}{a-0}\right| = \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| \Leftrightarrow \left|\frac{c-0}{a-0}\right| = \frac{OC}{OA} = 1 \quad \diamond$$

$$\arg\left(\frac{c}{a}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-0}{a-0}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \quad \diamond$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \quad (2)$$

من خلال (1) و (2) المثلث OAC متساوي الأضلاع.

$$\text{طريقة 3: لدينا: } \frac{c-0}{a-0} = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{إذن} \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{c-0}{a-0} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ومنه المثلث OAC متساوي الأضلاع.}$$

03.

يحتوي صندوق: على 9 كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس خمس كرات حمراء تحمل الأعداد 2 ؛ 2 ؛ 2 ؛ 1 ؛ 1 و أربع كرات بيضاء تحمل الأعداد 2 ؛ 2 ؛ 1 ؛ 1 .

نعتبر التجربة التالية: نسحب عشوائيا و تأنيا ثلاث كرات من الصندوق .
لتكن الأحداث :

✓ الحدث A : " الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون "

✓ الحدث B : " الكرات الثلاث المسحوبة تحمل نفس العدد "

✓ الحدث C : " الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون و تحمل نفس العدد "

01. نبين أن : $p(A) = \frac{1}{6}$ و $p(B) = \frac{1}{4}$ و $p(C) = \frac{1}{42}$ (1.5 ن)

✓ عدد السحبات الممكنة (أي $\text{card}\Omega$) :

سحب ثلاث كرات في آن واحد من بين 9 كرات يمثل تأليفة ل 3 من بين 9 . ومنه عدد السحبات هو عدد التأليفات ل 3 من

$$\text{card}\Omega = C_9^3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = 84 \quad \text{بين 9 إذن:}$$

$$\text{card}\Omega = C_9^3 = 84 \quad \text{إذن:}$$



• نبين أن : $p(A) = \frac{1}{6}$

- ✓ عدد السحبات التي نريد أن تحقق الحدث A (أي cardA) :
- الحدث A نعتبر عنه أيضا بما يلي : A " الكرات الثلاث المسحوبة من اللون الأحمر أو الكرات الثلاث المسحوبة من اللون الأبيض "
- ❖ الكرات الثلاث المسحوبة في آن واحد من اللون الأحمر من بين 5 إذن $C_5^3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 10$ (ملحوظة $C_5^3 = C_5^2 = 10$)
- ❖ أو الكرات الثلاث المسحوبة في آن واحد من اللون الأبيض من بين 4 إذن $C_4^3 = \frac{4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3} = 4$ (ملحوظة $C_4^3 = C_4^1 = 4$)

و منه : $\text{card}A = C_5^3 + C_4^3 = 10 + 4 = 14$

$$p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{C_5^3 + C_4^3}{C_9^3} = \frac{14}{84} = \frac{14}{14 \times 6} = \frac{1}{6}$$

خلاصة : $p(A) = \frac{1}{6}$

❖ نبين أن : $p(B) = \frac{1}{4}$

- ✓ عدد السحبات التي نريد أن تحقق الحدث B (أي cardB) :
- الحدث B نعتبر عنه أيضا بما يلي : A " (الكرات الثلاث المسحوبة من بين الكرات التي تحمل العدد ② و عددها 6) أو (الكرات الثلاث المسحوبة من بين الكرات التي تحمل العدد ① و عددها 3) "
- الكرات الثلاث المسحوبة من بين الكرات التي تحمل العدد ② .
- أي سحب ثلاث كرات في آن واحد من بين 6 كرات (التي تحمل العدد ②) يمثل تآليفة ل 3 من بين 6 وهي تتم ب

$$C_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} = 20$$

- الكرات الثلاث المسحوبة من بين الكرات التي تحمل العدد ① .
- أي سحب ثلاث كرات في آن واحد من بين 3 كرات (التي تحمل العدد ①) يمثل تآليفة ل 3 من بين 3 وهي تتم ب
- $C_3^3 = 1$ كفيات مختلفة .

$$\text{card}B = C_6^3 + C_3^3 = 20 + 1 = 21$$

$$p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{C_6^3 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{21}{84} = \frac{21}{21 \times 4} = \frac{1}{4}$$

خلاصة : $p(B) = \frac{1}{4}$

❖ نبين أن : $p(C) = \frac{1}{42}$

- ✓ عدد السحبات التي نريد أن تحقق الحدث C (أي cardC) :
- الحدث C نعتبر عنه أيضا بما يلي : C " (الكرات الثلاث المسحوبة من بين الكرات ذات اللون الأحمر و التي تحمل العدد ②) أو (الكرات الثلاث المسحوبة من بين الكرات ذات اللون الأبيض و التي تحمل العدد ②) "
- ❖ الكرات الثلاث المسحوبة في آن واحد من بين الكرات ذات اللون الأحمر و التي تحمل العدد ② و عددها 3 كرات إذن $C_3^3 = 1$.
- ❖ أو الكرات الثلاث المسحوبة في آن واحد من بين الكرات ذات اللون الأبيض و التي تحمل العدد ② و عددها 3 كرات إذن $C_3^3 = 1$.

$$\text{card}C = C_3^3 + C_3^3 = 2$$

$$p(C) = \frac{\text{card}C}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^3 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{2}{84} = \frac{2}{42 \times 2} = \frac{1}{42}$$

و بالتالي :



خلاصة: $p(C) = \frac{1}{42}$

02. نعيد التجربة السابقة 3 مرات مع إعادة الكرات الثلاث المسحوبة إلى الصندوق بعد كل سحبة ؛ و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A .

أ- نحدد وسيطي المتغير العشوائي الحداني X (0.5 ن) الوسيطي هما :

- $n = 3$ (الذي يمثل عدد المرات التي أعيدت فيها التجربة و في نفس الظروف)
- $p = p(A) = \frac{1}{6}$ (احتمال الحدث A الذي نهتم بعدد المرات الذي يتحقق فيها بعد إعادة التجربة 3 مرات و في نفس الظروف).

إضافات :

- ✓ القيم هي 0 و 1 و 2 و 3.
 - ✓ لدينا : $p(X=k) = C_3^k \times p^k (1-p)^{3-k}$ مع $k \in \{0,1,2,3\}$
 - ✓ الأما الرياضي هو $E(X) = np$ و المغايرة هي $V(X) = n \times p \times (1-p)$
 - ✓ الانحراف الطرازي هو $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n \times p \times (1-p)}$
- و كل ذلك بالنسبة لمتغير عشوائي حداني .

ب- نبين أن : $p(X=1) = \frac{25}{72}$. و نحسب $p(X=2)$ (1 ن)

لدينا : X متغير عشوائي حداني إذن : $p(X=k) = C_3^k \times p^k (1-p)^{3-k}$ مع $k \in \{0,1,2,3\}$ ؛ و منه :

$$\begin{aligned} \bullet \quad p(X=1) &= C_3^1 \times p^1 \times (1-p)^2 = 3 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{25}{36} = \frac{25}{72} \\ \bullet \quad p(X=2) &= C_3^2 \times p^2 \times (1-p)^1 = 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1 = 3 \times \frac{1}{36} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{72} \end{aligned}$$

خلاصة : $p(X=2) = \frac{5}{72}$ و $p(X=1) = \frac{25}{72}$

04.

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

01. نتحقق أن : $g(0) = 0$ (0.25 ن)

لدينا : $g(0) = e^0 - 0^2 + 3 \times 0 - 1 = 1 - 0 + 0 - 1 = 0$

خلاصة : $g(0) = 0$

02. حدد إشارة $g(x)$ على كل من المجالين $]-\infty, 0]$ و $[0, +\infty[$ (0.5 ن)

✓ الإشارة على $]-\infty, 0]$:

من خلال جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن الدالة g تزايدية على $\mathbb{R}$ إذن تزايدية على $]-\infty, 0]$:

$$\begin{aligned} x \leq 0 &\Rightarrow g(x) \leq g(0) \\ &\Rightarrow g(x) \leq 0 \quad ; \quad (g(0) = 0) \end{aligned}$$



ومنه : $g(x) \leq 0$ لكل x من $]-\infty, 0]$. (أي الدالة g سالبة على $]-\infty, 0]$) .

✓ الإشارة على $[0, +\infty[$:

من خلال جدول تغيرات الدالة g لدينا : الدالة تزايدية على $\mathbb{R}$ إذن تزايدية على $[0, +\infty[$ و منه :

$$x \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq g(0)$$

$$\Rightarrow g(x) \geq 0 \quad ; \quad (g(0) = 0)$$

ومنه : $g(x) \geq 0$ لكل x من $[0, +\infty[$. (أي الدالة g موجبة على $[0, +\infty[$) .

خلاصة : الدالة g موجبة على $[0, +\infty[$ وسالبة على $]-\infty, 0]$.

II. لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$.

و (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (الوحدة 1 cm) .

01.

أ- تحقق من أن : $f(x) = \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (0.5 ن)

• نتحقق من أن : $f(x) = \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x$ لكل x من $\mathbb{R}$

لدينا :

$$f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$$

$$= x^2 e^{-x} - x e^{-x} + x$$

$$= \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x \quad ; \quad \left(e^{-x} = \frac{1}{e^x} \right)$$

خلاصة : $f(x) = \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x$ لكل x من $\mathbb{R}$.

• نبين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

نعلم أن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{ومنه :} \quad n \in \mathbb{N}^* \quad \text{مع} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \spadesuit$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \spadesuit$$

$$\text{و منه :} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x = +\infty$$

خلاصة : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب- نحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ ثم استنتج أن المنحنى (C) يقبل مقارباً (D) بجوار $+\infty$ معادلته $y = x$ (0.75 ن)

• نحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + \cancel{x} \right) - \cancel{x} \quad \text{لدينا :}$$

$$\left(n \in \mathbb{N}^* \right), \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

خلاصة : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$

- نستنتج أن المنحنى (C) يقبل مقاربا (D) بجوار $+\infty$ معادلته $y = x$.
لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \diamond$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x)) = 0 \quad \diamond$$

إذن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ هو مقارب مائل للمنحنى (C) للدالة f بجوار $+\infty$.

خلاصة : المنحنى (C) يقبل مقاربا مائلا هو المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ بجوار $+\infty$.

جـ نتحقق من أن : $f(x) = \frac{x^2 - x + xe^x}{e^x}$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم نحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (0.5 ن)

- نتحقق من أن : $f(x) = \frac{x^2 - x + xe^x}{e^x}$ لكل x من $\mathbb{R}$

$$\frac{x^2 - x + xe^x}{e^x} = \frac{x^2 - x}{e^x} + \frac{xe^x}{e^x} \quad \text{لدينا :}$$

$$= (x^2 - x)e^{-x} + x \quad ; \quad \left(e^{-x} = \frac{1}{e^x} \right)$$

$$= f(x)$$

خلاصة : $f(x) = \frac{x^2 - x + xe^x}{e^x}$ لكل x من $\mathbb{R}$.

- نحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\text{نلاحظ أن : } f(x) = \frac{x^2 - x + xe^x}{e^x} = (x^2 - x + xe^x) \times \frac{1}{e^x} \quad \text{ولدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x + xe^x) = +\infty \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \quad (\text{خاصية}) \quad \diamond$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty \quad \text{إذن} \quad \left(\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \right) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \quad \diamond$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + xe^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x + xe^x) \times \frac{1}{e^x} = +\infty ; \quad (+\infty \times +\infty) \quad \text{ومنه :}$$

خلاصة : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

د- نبين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ ثم نؤول هندسيا النتيجة. (0.5 ن)

• نبين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + xe^x}{e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x-1+e^x)}{xe^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1+e^x}{e^x} \end{aligned}$$

لدينا :

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1+e^x) \times \frac{1}{e^x} = -\infty ; \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1+e^x) = -\infty \end{cases} \right)$$

خلاصة : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

• نؤول هندسيا النتيجة .

- بما أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ فإن المنحنى (C) يقبل فرعاً شلجيميا في اتجاه محور الأرتيب بجوار $-\infty$

خلاصة : المنحنى (C) يقبل فرعاً شلجيميا في اتجاه محور الأرتيب بجوار $-\infty$.

.. 02

أ- نتحقق من أن : $f(x) - x$ و $x^2 - x$ لهما نفس الإشارة لكل x من $\mathbb{R}$ (0.25 ن)

$$f(x) - x = ((x^2 - x)e^{-x} + x) - x = (x^2 - x)e^{-x}$$

نعلم أن : $e^{-x} > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$ و منه إشارة $f(x) - x$ هي إشارة $x^2 - x$.

خلاصة : $f(x) - x$ و $x^2 - x$ لهما نفس الإشارة لكل x من $\mathbb{R}$.

ب- نستنتج أن : (C) يوجد فوق (D) على كل من المجالين $]-\infty, 0]$ و $[1, +\infty[$ و تحت (D) على المجال $[0, 1]$ (0.5 ن)

لدينا : $x^2 - x = x(x-1)$ و منه : الإشارة و الوضع النسبي ل (C) و (D) على $\mathbb{R}$ بواسطة الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f(x)-x$ و x^2-x لهما نفس الإشارة	+	0	-	0	+
الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (D)	(C) فوق (D)		(C) تحت (D)		(C) فوق (D)
	(D) و (C) يتقاطعان في $x_0 = 0$		(D) و (C) يتقاطعان في $x_1 = 1$		

خلاصة : الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (D) على $\mathbb{R}$ هي كالتالي :

- المنحنى (C) و المستقيم (D) يتقاطعان في نقطتين حيث زوج إحداثياتهما هي (0,0) و (1,1) .
- المنحنى (C) يوجد فوق المستقيم (D) على كل من المجالين $]-\infty, 0]$ و $[1, +\infty[$.
- المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (D) على المجال $[0, 1]$.

03

أ- نبين أن : لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x) = g(x)e^{-x}$ (0.75 ن)

لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((x^2 - x)e^{-x} + x)' = (x^2 - x)' \times e^{-x} + (x^2 - x)(e^{-x})' + (x)' \\ &= (2x - 1) \times e^{-x} + (x^2 - x)(-e^{-x}) + 1 \\ &= (2x - 1 - x^2 + x) \times e^{-x} + e^x \times e^{-x} \quad ; \quad (1 = e^0 = e^{x-x} = e^x \times e^{-x}) \\ &= (-x^2 + 3x - 1) \times e^{-x} + e^x \times e^{-x} \\ &= (-x^2 + 3x - 1 + e^x) \times e^{-x} = g(x)e^{-x} \quad ; \quad (g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1) \end{aligned}$$

خلاصة : لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x) = g(x)e^{-x}$.

ب- نستنتج أن الدالة f تناقصية على $]-\infty, 0]$ و تزايدية على $[0, +\infty[$ (0.5 ن)

لدينا :

❖ لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x) = g(x)e^{-x}$ ومنه إشارة f' هي إشارة $g(x)$ لأن $e^{-x} > 0$.

❖ حسب ما سبق :

- لكل x من $[0, +\infty[$ لدينا $g(x) \geq 0$ ومنه الدالة المشتقة f' موجبة على $[0, +\infty[$ إذن الدالة f تزايدية على $[0, +\infty[$
- لكل x من $]-\infty, 0]$ لدينا : $g(x) \leq 0$ ومنه الدالة المشتقة f' سالبة على $]-\infty, 0]$ إذن الدالة f تناقصية على $]-\infty, 0]$

خلاصة : الدالة f تناقصية على $]-\infty, 0]$ و تزايدية على $[0, +\infty[$.

ج- نضع جدول تغيرات الدالة f (0.25 ن)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(0) = 0$	$+\infty$

04

أ- نتحقق من أن : $f''(x) = (x^2 - 5x + 4)e^{-x}$ لكل x من $\mathbb{R}$ (0.25 ن)

لدينا :

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = (g(x)e^{-x})' \\ &= g'(x) \times e^{-x} + g(x) \times (-e^{-x}) \\ &= (g'(x) - g(x)) \times e^{-x} \\ &= ((e^x - x^2 + 3x - 1)' - (e^x - x^2 + 3x - 1)) \times e^{-x} \end{aligned}$$

$$= (e^x - 2x + 3 - e^x + x^2 - 3x + 1) \times e^{-x} = (x^2 - 5x + 4)e^{-x}$$

خلاصة: $f''(x) = (x^2 - 5x + 4)e^{-x}$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب- نستنتج أن المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف أفصولهما على التوالي هما 1 و 4. (0.5 ن)

❖ لتحديد نقطتي انعطاف الدالة f ندرس إشارة f'' الدالة المشتقة الثانية ل f .

❖ إشارة f'' هي إشارة $x^2 - 5x + 4$ لأن $e^{-x} > 0$

$$\text{لدينا : } x^2 - 5x + 4 = x^2 - x - 4x + 4 = x(x-1) - 4(x-1) = (x-1)(x-4)$$

$$(x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow (x=1 \text{ ou } x=4) \quad \text{❖}$$

ومنه إشارة f'' بواسطة الجدول التالي :

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+

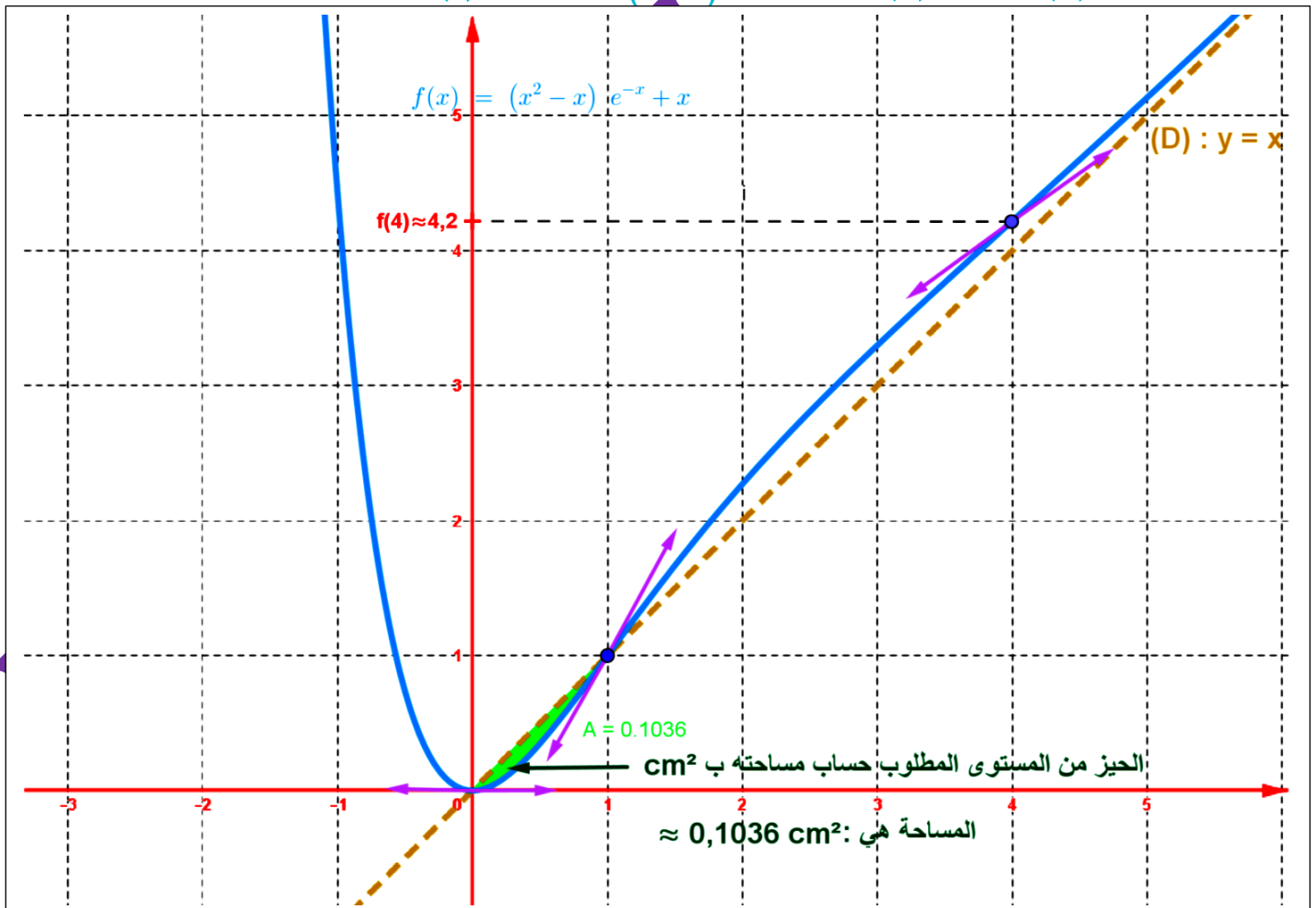
❖ من خلال الجدول :

➤ الدالة المشتقة الثانية f'' تنعدم في 1 و تتغير إشارتها بجوار 1 إذن النقطة التي أفصولها 1 هي نقطة انعطاف .

➤ الدالة المشتقة الثانية f'' تنعدم في 4 و تتغير إشارتها بجوار 4 إذن النقطة التي أفصولها 4 هي نقطة انعطاف .

خلاصة: أن المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف أفصولهما على التوالي هما 1 و 4.

05. ننشئ المستقيم (D) و المنحنى (C) في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (نأخذ $f(4) \approx 4,2$ (1 ن))



أ- نبين أن : الدالة $H : x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ هي دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto -x^2e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

ثم استنتج أن : $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \frac{2e-5}{e}$ (0.5 ن)

• نبين أن : الدالة $H : x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ هي دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto -x^2e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

لهذا نبين أن : $H'(x) = h(x)$.

لدينا :

$$\begin{aligned} H'(x) &= ((x^2 + 2x + 2)e^{-x})' \\ &= (x^2 + 2x + 2)' e^{-x} + (x^2 + 2x + 2)(e^{-x})' \\ &= (2x + 2)e^{-x} + (x^2 + 2x + 2)(-e^{-x}) \\ &= (2x + 2 - x^2 - 2x - 2)e^{-x} \\ &= -x^2 e^{-x} = h(x) \end{aligned}$$

و منه : $H'(x) = h(x)$

خلاصة : الدالة $H : x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ هي دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto -x^2e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

• نستنتج أن : $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \frac{2e-5}{e}$

لدينا :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^{-x} dx &= \int_0^1 -h(x) dx = [-H(x)]_0^1 = -H(1) + H(0) \\ &= -(1^2 + 2 \times 1 + 2)e^{-1} + (0^2 + 2 \times 0 + 2)e^0 = -5e^{-1} + 2 \times 1 = \frac{2e-5}{e} \end{aligned}$$

خلاصة : $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \frac{2e-5}{e}$

ب- باستعمال المكاملة بالأجزاء نبين أن : $\int_0^1 x e^{-x} dx = \frac{e-2}{e}$ (0.75 ن)

نضع :

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ (1) \downarrow & (2) \searrow - \downarrow (3) \\ v'(x) = e^{-x} & v(x) = -e^{-x} \end{array}$$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = [x \times (-e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} dx$$

$$= -(1 \times e^{-1} - 0 \times e^0) - [e^{-x}]_0^1$$

$$= -e^{-1} - (e^{-1} - e^0) = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = \frac{e-2}{e}$$

ومنه :

خلاصة : $\int_0^1 x e^{-x} dx = \frac{e-2}{e}$

جـ. نحسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و (D) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$.

المساحة المطلوبة هي :

$$\begin{aligned} (D) \text{ تحت } (C) \text{ على } [0,1] \text{ (لأن } f(x) \leq x \text{ على } [0,1]) \cdot \left(\int_1^2 |f(x) - x| dx \right) \times \|i\| \times \|j\| &= \left(\int_1^2 (x - f(x)) dx \right) \times \|i\| \times \|j\| \text{ cm}^2 \\ &= \left(\int_0^1 (x - ((x^2 - x)e^{-x} + x)) dx \right) \times 1 \times 1 \text{ cm}^2 \\ &= \int_0^1 -(x^2 - x)e^{-x} dx \text{ cm}^2 \\ &= \int_0^1 (-x^2 e^{-x} + x e^{-x}) dx \text{ cm}^2 \\ &= -\int_0^1 x^2 e^{-x} dx + \int_0^1 x e^{-x} dx \text{ cm}^2 \\ &= -\frac{2e-5}{e} + \frac{e-2}{e} \text{ cm}^2 \\ &= \frac{3-e}{e} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

(لأن : $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \frac{2e-5}{e}$ et $\int_0^1 x e^{-x} dx = \frac{e-2}{e}$)

خلاصة : مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و (D) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=2$ هي $\frac{3-e}{e} cm^2$.

III. لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

01. نبين بالترجع أن : $0 \leq u_n \leq 1$ لكل n من $\mathbb{N}$ (0.75 ن)

• نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n=0$

لدينا : $0 \leq u_0 = \frac{1}{2} \leq 1$ و منه العلاقة صحيحة من أجل $n=0$.

• نفترض أن العلاقة صحيحة للترتبة n : أي $0 \leq u_n \leq 1$ (معطيات الترجع).

• نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$: أي نبين أن : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

حسب معطيات الترجع لدينا : $0 \leq u_n \leq 1$.

و منه : $0 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$ (لأن f تزايدية على $[0,1]$ و $0 \leq u_n \leq 1$)

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1 \quad \text{لأن } f(0) = 0 \text{ و } f(1) = (1^2 - 1)e^{-1} + 1 = 1$$

أو أيضا $f(0) = 0$ و $f(1) = 1$ لأن (C) و (D) يتقطعان في نقطتين

حيث : زوج إحداثياتهما هي : $(0,0)$ و $(1,1)$.

و منه : العلاقة صحيحة ل $n+1$.

خلاصة : $0 \leq u_n \leq 1$ لكل n من $\mathbb{N}$.

02. نبين أن المتتالية (u_n) تناقصية (يمكن استعمال نتيجة السؤال II (3 ب-)) (0.5 ن)

لهذا نبين أن : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ لكل n من $\mathbb{N}$.

لكل n من $\mathbb{N}$ نضع $x = u_n$ ولدينا : $0 \leq u_n \leq 1$ أي $u_n \in [0,1]$

حسب نتيجة السؤال II (3 ب-) : (C) تحت (D) على $[0,1]$ إذن : لكل x من $[0,1]$ فإن $f(x) \leq x$.

أي $x \in [0,1] \Rightarrow f(x) \leq x$:

$$\Rightarrow f(u_n) \leq u_n ; (u_n = x \text{ et } 0 \leq u_n \leq 1)$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq u_n ; (u_{n+1} = f(u_n))$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0$$

وبالتالي : لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا $u_{n+1} \leq u_n$ (أو أيضا $u_{n+1} - u_n \leq 0$)

خلاصة : المتتالية (u_n) تناقصية.

03. نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ونحدد نهايتها. (0.75 ن)

❖ نستنتج أن : المتتالية (u_n) متقاربة

لدينا :

✓ المتتالية (u_n) تناقصية.

✓ المتتالية (u_n) مصغرة (لأن $0 \leq u_n \leq 1$)

إذن حسب خاصية : المتتالية (u_n) متقاربة مع نهايتها ℓ حيث $\ell \in \mathbb{R}$

خلاصة : المتتالية (u_n) متقاربة

❖ نحدد نهاية المتتالية (u_n) :

• المتتالية تكتب على شكل $u_{n+1} = f(u_n)$

• الدالة f متصلة على $I = [0,1]$

• $f(I) \subset I = [0,1]$ لأن : $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ (لأن f تزايدية على $[0,1]$)

(لأن $f(0) = 0$ و $f(1) = 1$) $\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$

$$\Rightarrow f(x) \in [0,1]$$

$$\Rightarrow f(I) \subset I = [0,1]$$

• بما أن (u_n) متقاربة إذن نهايتها ℓ هي حل للمعادلة $f(x) = x$; $x \in I = [0,1]$ (حسب خاصية).

$$\text{أي حل للمعادلة } f(x) - x = 0 ; x \in I = [0,1]$$

✓ أي ندرس تقاطع المنحنى (C) و المستقيم (D) على $[0,1]$ و حسب ما سبق المنحنى (C) و المستقيم (D) يتقاطعان في

نقطتين حيث زوج إحداثياتهما هي $(0,0)$ و $(1,1)$. إذن هناك حلين هما 0 و 1

✓ المتتالية (u_n) تناقصية إذن $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \dots \geq u_n$ و منه $u_0 = \frac{1}{2} \geq u_n$ أي $\frac{1}{2} < 1$ و منه الحل المقبول هو $\ell = 0$

خلاصة : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$