

فرض محروس رقم 3

التمرين الأول :

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي: $U_0 = \frac{1}{5}$ و $U_{n+1} = \frac{2U_n}{2U_n + 1}$

(1) تحقق أن $(\forall n \in \mathbb{N}) U_{n+1} = 1 - \frac{1}{2U_n + 1}$

ثم بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 < U_n < \frac{1}{2}$

(2) تحقق أن $(\forall n \in \mathbb{N}) U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(1 - 2U_n)}{2U_n + 1}$

وبين أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

(3) نضع $V_n = \frac{3^n U_n}{2U_n - 1}$ لكل عدد طبيعي n

أ- بين أن المتتالية $(V_n)_n$ هندسية أساسها $q = 6$ وأحسب V_n بدلالة n

ب- استنتج أن $U_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

التمرين الثاني :

نعتبر في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر (O, \vec{u}, \vec{v})

النقط A, B, C و C لبتي ألحاقها على التوالي هي :

$$a = -1 - i, \quad b = 5 + i, \quad c = 3 + 7i$$

(1) أحسب العدد $\frac{b-a}{b-c}$ و استنتج طبيعة المثلث ABC

(2) حدد d لحق النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

(3) تحقق أن $\frac{c-a}{d-b} = -i$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

ثم استنتج أن $ABCD$ مربع

التمرين الثالث :

(1) حدد الشكل المثلثي لكل من العددين: $Z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $Z_2 = 2 - 2i$

(2) استنتج أن $Z_1 Z_2 = \left[2\sqrt{6}, \frac{7\pi}{12} \right]$

(3) حدد الشكل الجبري للعدد $Z_1 Z_2$ ثم استنتج أن $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

$$\text{و } \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

التمرين الرابع :

الجزء (1)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x) = x + 1 - \ln(x + 3)$

(1) حدد مجموعة تعريف الدالة f وأحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

(3) أ- بين أن المشتقة $f'(x) = \frac{x+2}{x+3}$

ب- أدرس تغيرات الدالة f ثم ضع جدول التغيرات

(4) أرسم المنحنى (C_f)

الجزء (2)

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي: $U_0 = 2$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

(1) أحسب U_1 ثم قارن U_0 و U_1 (نأخذ $e < 5$)

(2) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) -2 \leq U_n \leq 2$ (دون استعمال الحاسبة)

(3) أدرس رقابة المتتالية $(U_n)_n$

(4) استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها