

الأستاذ:
نجيب
عثماني

مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا
شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك
اللغة العربية
شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم
الإنسانية

أكاديمية
الجهة
الشرقية

تمارين بحلول في درس الدوال اللوغارتمية

المادة: الرياضيات

$$\ln\left(\frac{2}{5}\right) = \ln(2) - \ln(5) \approx 0,7 - 1,6 \approx -0,9$$

$$\ln(\sqrt{5}) = \frac{1}{2} \ln(5) \approx \frac{1}{2} \times 1,6 \approx 0,8 = 0,7 + \frac{1}{2}(1,6)$$

$$\ln(2\sqrt{5}) = \ln(2) + \ln(\sqrt{5}) = \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(5) = 0,7 + 0,8 = 1,5$$

$$2 \ln 4 + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(8) = 0 \text{ ??? (2)}$$

$$2 \ln 4 + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(8) = 2 \ln 2^2 - \ln(2) - \ln(2^3)$$

$$= 2 \times 2 \ln 2 - \ln(2) - 3 \ln(2) = 4 \ln 2 - \ln(2) - 3 \ln(2) = 0$$

تمرين 3: بسط

$$A = \ln(3) - \ln(5) + \ln(15) \quad 1.$$

$$B = \ln(0,01) - \ln(1000) + \ln(10^6) \quad 2.$$

$$A = \ln(3) - \ln(5) + \ln(15) = \ln(3) - \ln(5) + \ln(3 \times 5) \quad \text{الأجوبة: (1)}$$

$$A = \ln(3) - \ln(5) + \ln 3 + \ln 5 = 2 \ln(3) = \ln(3^2) = \ln(9)$$

$$B = \ln(10^{-2}) - \ln(10^3) + \ln(10^6) = -2 \ln(10) - 3 \ln(10) + 6 \ln(10)$$

$$B = \ln(10) = \ln(2 \times 5) = \ln 2 + \ln 5$$

$$\ln(11) \approx 2,4 \text{ و } \ln(2) \approx 0,7 \text{ علما أن } \ln(2) \approx 0,7 \text{ و } \ln(11) \approx 2,4$$

تمرين 4: فاحسب ما يلي:

$$\ln\left(\frac{11}{2}\right) \quad \ln(44) \quad \ln(32) \quad \ln(121) \quad \ln(22)$$

الأجوبة:

$$\ln(22) = \ln(2 \times 11) = \ln(2) + \ln(11) \approx 0,7 + 2,4 \approx 3,1$$

$$\ln(121) = \ln(11 \times 11) = \ln(11^2) = 2 \ln(11) \approx 2 \times 2,4 \approx 4,8$$

$$\ln(32) = \ln(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) = \ln(2^5) = 5 \ln(2) \approx 5 \times 0,7 \approx 3,5$$

$$= \ln(3^2) + \ln(2^3)$$

$$\ln(44) = \ln(4 \times 11) = \ln(4) + \ln(11) = 2 \ln(2) + \ln(11)$$

$$\ln(44) \approx 2 \times 0,7 + 2,4 \approx 1,4 + 2,4 \approx 3,8$$

$$\ln\left(\frac{11}{2}\right) = \ln(11) - \ln(2) \approx 2,4 - 0,7 \approx 1,7$$

تمرين 5: أحسب النهايات التالية : (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln(x) + 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x) + 1}{\ln x} \quad (2)$$

تمرين 1: إذا علمت أن $\ln(2) \approx 0,7$ و $\ln(3) \approx 1,1$ فاحسب

$$\ln(72) \quad \ln(8) \quad \ln(4) \quad \ln(6) \text{ ما يلي:}$$

$$\ln(3\sqrt{2}) \quad \ln(\sqrt{6}) \quad \ln(\sqrt{2}) \quad \ln\left(\frac{3}{2}\right) \quad \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

الأجوبة:

$$\ln(6) = \ln(2 \times 3) = \ln(2) + \ln(3) \approx 0,7 + 1,1 \approx 1,8$$

$$\ln(4) = \ln(2 \times 2) = \ln(2^2) = 2 \ln(2) \approx 2 \times 0,7 \approx 1,4$$

$$\ln(8) = \ln(2 \times 2 \times 2) = \ln(2^3) = 3 \ln(2) \approx 3 \times 0,7 \approx 2,1$$

$$\ln(72) = \ln(9 \times 8) = \ln(9) + \ln(8) = \ln(3^2) + \ln(2^3)$$

$$\ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \ln(2) \approx \frac{1}{2} \times 0,7 \approx 0,35$$

$$\ln(72) = \ln(3^2 \times 2^3) = \ln(3^2) + \ln(2^3) = 2 \ln(3) + 3 \ln(2)$$

$$\ln(72) \approx 2 \times 1,1 + 3 \times 0,7 \approx 2,2 + 2,1 \approx 4,3$$

$$\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln(3) - \ln(2) \approx 1,1 - 0,7 \approx 0,4$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \approx -0,7$$

$$\ln(\sqrt{6}) = \frac{1}{2} \ln(6) \approx \frac{1}{2} \times 1,8 \approx 0,9$$

$$\ln(3\sqrt{2}) = \ln(3) + \ln(\sqrt{2}) \approx 1,1 + \frac{1}{2} \ln(2) \approx 1,1 + \frac{0,7}{2} \approx 1,1 + 0,35 \approx 1,45$$

تمرين 2:

(1) إذا علمت أن $\ln(2) \approx 0,7$ و $\ln(5) \approx 1,6$ فاحسب ما يلي:

$$\ln(10) \text{ و } \ln(25) \text{ و } \ln(16) \text{ و } \ln(125)$$

$$\ln\left(\frac{2}{5}\right) \text{ و } \ln\left(\frac{1}{5}\right) \text{ و } \ln(\sqrt{5}) \text{ و } \ln(2\sqrt{5})$$

$$2 \ln 4 + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(8) = 0 \text{ : تحقق أن}$$

$$\ln(10) = \ln(2 \times 5) = \ln(2) + \ln(5) \approx 0,7 + 1,6 \approx 2,3$$

$$\ln(25) = \ln(5 \times 5) = \ln(5^2) = 2 \ln(5) \approx 2 \times 1,6 \approx 3,2$$

$$\ln(16) = \ln(2 \times 2 \times 2 \times 2) = \ln(2^4) = 4 \ln(2) \approx 4 \times 0,7 \approx 2,8$$

$$\ln(125) = \ln(5 \times 5 \times 5) = \ln(5^3) = 3 \ln(5) \approx 3 \times 1,6 \approx 4,8$$

$$\ln\left(\frac{1}{5}\right) = -\ln(5) \approx -1,6$$

(5) مجموعة تعريف المعادلة هي $]0, +\infty[$
 $\ln(x) = 0$ أو $\ln(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x)(\ln(x) - 1) = 0$
 يعني $\ln(x) = 0$ أو $\ln(x) = 1$
 يعني $\ln(x) = \ln(1)$ أو $\ln(x) = \ln(e)$
 يعني $x = 1$ أو $x = e$ ومنه فإن $S = \{1, e\}$

(6) مجموعة تعريف المعادلة هي $]0, +\infty[$
 $\ln x + 1 = 0$ أو $\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow (\ln x + 1)(\ln x - 1) = 0$
 يعني $\ln x = -1$ أو $\ln(x) = 1$

يعني $\ln(x) = -\ln(e)$ أو $\ln(x) = \ln(e)$
 يعني $x = e$ أو $\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{e}\right)$ يعني $x = \frac{1}{e}$ أو $x = e$
 ومنه فإن $S = \left\{\frac{1}{e}, e\right\}$

تمرين 8: نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = \ln x + 1$

- حدد مجموعة تعريف الدالة f
- أحسب $f(1)$ و $f(e)$ و $f(e^2)$ و $f\left(\frac{1}{e}\right)$
- أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$ و ادرس إشارة المشتقة
- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- أعط جدول تغيرات الدالة f .

الأجوبة:

- مجموعة تعريف الدالة f هي $]0, +\infty[$
- $f(1) = \ln(1) + 1 = 1$
 $f(e) = \ln(e) + 1 = 1 + 1 = 2$
 $f(e^2) = \ln e^2 + 1 = 2 \ln e + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$
 $f\left(\frac{1}{e}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}\right) + 1 = -\ln e + 1 = -1 + 1 = 0$
- حساب $f'(x)$:
 $f'(x) = (\ln(x) + 1)' = (\ln(x))' + (1)' = \frac{1}{x} > 0$
 لأن x موجب قطعاً.
- حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$:
 لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$
 حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 ومنه جدول تغيرات f هو كما يلي:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

الأجوبة: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln(x) + 1 = 2 \times (+\infty) + 1 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ شكل غير محدد لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x) + 1}{\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty}$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x + 1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \left(2 + \frac{1}{\ln x}\right)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{\ln x} = 2 + 0 = 2$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$

تمرين 6:

(1) أحسب وبسط:

$$A = \ln(e^2) + \ln(e^4) - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$B = 2 \ln(\sqrt{e}) + \ln(e \sqrt{e}) - \frac{1}{3} \ln(e^9)$$

(2) حل المعادلة $\ln(x) = 7$ يعني $x = e^7$

الأجوبة: (1) $A = \ln(e^2) + \ln(e^4) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = 2 \ln(e) + 4 \ln(e) - -\ln(e)$

$$A = 2 \times 1 + 4 \times 1 - -1 = 7$$

$$B = 2 \ln(\sqrt{e}) + \ln(e \sqrt{e}) - \frac{1}{3} \ln(e^9) = 2 \times \frac{1}{2} \ln(e) + \ln e + \ln(\sqrt{e}) - \frac{1}{3} 9 \ln(e)$$

$$B = 1 \ln(e) + \ln e + \frac{1}{2} \ln(e) - 3 \ln(e) = 1 + 1 + \frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

(2) $\ln(x) = 7$ المعادلة لها معنى اذا كان: $x > 0$

$\ln(x) = 7$ يعني $x = e^7$

ومنه: $S = \{e^7\}$

تمرين 7: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$\ln(x) = 7 \quad (3) \quad \ln(x) = 1 \quad (2) \quad \ln(x) = 0 \quad (1)$$

$$\ln(x + 1) = \ln(3) \quad (4)$$

$$(\ln x + 1)(\ln x - 1) = 0 \quad (6) \quad \ln(x)(\ln(x) - 1) = 0 \quad (5)$$

الأجوبة: الكتابة $\ln(x)$ لها معنى إذا كان $x > 0$.

(1) يجب أن يكون $x > 0$ في المعادلة $\ln(x) = 0$

ومنه مجموعة تعريف هذه المعادلة هي $]0, +\infty[$

المعادلة $\ln(x) = 0$ تكافئ $\ln(x) = \ln(1)$ ومنه $x = 1$

و بما أن $1 \in]0, +\infty[$ فإن مجموعة حلول المعادلة هي: $S = \{1\}$

(2) مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x) = 1$ هي $]0, +\infty[$

وهي تكافئ $\ln(x) = \ln(e)$ أي $x = e$

و بما أن $e \in]0, +\infty[$ فإن $S = \{e\}$

(3) مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x) = 7$ هي $]0, +\infty[$

وهي تكافئ $\ln(x) = \ln(e^7)$ أي $x = e^7$ و بما أن $e^7 \in]0, +\infty[$

فإن $S = \{e^7\}$

(4) يجب أن يكون $x + 1 > 0$ أي $x > -1$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x + 1) = \ln(3)$ هي $]-1, +\infty[$

المعادلة تكافئ $x + 1 = 3$ أي $x = 2$ و بما أن $2 \in]-1, +\infty[$

فإن $S = \{2\}$

تمرين 9: نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = 2 \ln x - x$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f
2. أحسب $f(1)$ و $f(e)$ و $f(e^2)$
3. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$
4. ادرس إشارة مشتقة الدالة
5. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

الأجوبة:

1. مجموعة تعريف الدالة f هي $]0, +\infty[$
2. $f(1) = 2 \ln(1) - 1 = 0 - 1 = -1$, $f(e) = 2 \ln(e) - e = 2 - e$, $f(e^2) = 2 \ln(e^2) - e^2 = 4 \ln e - e^2 = 4 \times 1 - e^2 = 4 - e^2$
3. حساب $f'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}$: $f'(x)$
4. إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(2-x)$ لأن x موجب قطعاً.
5. لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ إذن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

تمرين 10: نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \ln x + x$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f
2. أحسب $f(1)$ و $f(e)$ و $f(e^2)$
3. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$
4. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

أجوبة (1): مجموعة تعريف الدالة f هي $]0, +\infty[$

2. $f(1) = \ln(1) + 1 = 0 + 1 = 1$ و $f(e) = \ln(e) + e = 1 + e$ و $f(e^2) = \ln(e^2) + e^2 = 2 \ln e + e^2 = 2 \times 1 + e^2 = 2 + e^2$
3. حساب $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x}$: $f'(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x + x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x + x = +\infty$$

تمرين 12: علماً أن $\log(2) \approx 0,3$ أحسب $\log(20)$ و $\log(2000)$

أجوبة : $\log(20) = \log(2 \times 10) = \log(2) + \log(10)$

$$\approx 0,3 + 1 \approx 1,3$$

$$\log(2000) = \log(2 \times 1000) = \log(2) + \log(1000)$$

$$= \log(2) + \log(10^3)$$

$$= \log(2) + 3 \log(10)$$

$$\approx 0,3 + 3 \times 1 \approx 3,3$$

تمرين 13: بسط وأحسب :

$$D = 1 + 2 \log 2 - \log(40) \quad C = \log(4) + \log(25) \quad B = \log(10) + 2 \log(100) + \log(10^4) \quad \text{و} \quad A = \log(0,01) - \log(1000) + \log(10^6)$$

$$E = \log(900) + 2 \log\left(\frac{1}{3}\right) - 2$$

أجوبة : $A = \log(10^{-2}) - \log(10^3) + \log(10^6)$

$$A = -2 \log(10) - 3 \log(10) + 6 \log(10)$$

$$A = -2 - 3 + 6 = 1$$

$$B = \log(10) + 2 \log(100) + \log(10^4)$$

$$B = 9 \text{ ومنه } B = 1 + 2\log(10^2) + \log(10^4) = 1 + 2 \times 2 + 4\log(10) = 1 + 4 + 4$$

$$C = \log(4) + \log(25) = \log(4 \times 25) = \log(100)$$

$$C = \log(10^2) = 2\log(10) = 2 \times 1 = 2 \quad \log(300) = \log(3 \times 100) = \log(3) + \log(100) \approx 0,47 + 2 \approx 2,47$$

$$D = 1 + 2\log 2 - \log(40) = 1 + \log 2^2 - (\log(4 \times 10))$$

$$D = 1 + \log 2^2 - (\log 4 + \log 10) = 1 + \log 4 - \log 4 - \log 10$$

$$D = 1 + \log 4 - \log 4 - 1 = 0$$

$$E = \log(900) + 2\log\left(\frac{1}{3}\right) - 2 = \log(9 \times 100) - 2\log(3) - 2$$

$$E = \log 9 + \log 100 - 2\log(3) - 2$$

$$E = \log 3^2 + \log 10^2 - 2\log(3) - 2$$

$$E = 2\log 3 + 2\log 10 - 2\log(3) - 2$$

$$E = 2\log 10 - 2 = 2 \times 1 - 2 = 0 \text{ ومنه}$$

تمرين 11: علما أن $\log(5) \approx 0,7$ و $\log(3) \approx 0,47$

$$\text{أحسب } \log(50) \text{ و } \log\left(\frac{1}{3}\right) \text{ و } \log(\sqrt{5}) \text{ و } \log(15)$$

$$\text{و } \log(300)$$

$$\log(15) = \log(5 \times 3) = \log(5) + \log(3) \approx 0,7 + 0,47 \approx 1,17 \text{ **أجوبة:**}$$

$$\log(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}\log(5) \approx \frac{1}{2} \times 0,7 \approx 0,35$$

$$\log\left(\frac{1}{3}\right) = -\log(3) \approx -0,47$$

$$\log(50) = \log(5 \times 10) = \log(5) + \log(10) \approx 0,7 + 1 \approx 1,7$$