

المادة: الرياضيات

ملخص لدروس اللوغاريتم النبيري

مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
- شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

(1) تعريف:

▪ دالة اللوغاريتم النبيري يرمز لها ب $\ln$ و هي الدالة الأصلية للدالة $x \rightarrow \frac{1}{x}$

على المجال $]0, +\infty[$ التي تنعدم في 1.

و لدينا: $(\forall x \in]0, +\infty[): \ln'(x) = \frac{1}{x}$

▪ دالة اللوغاريتم النبيري تنعدم في 1 أي $\ln(1) = 0$.

(2) **النهايات:** تقبل النهايات التالية:

الخاصية 1: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

الخاصية 2: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

(3) **خاصية جبرية:**

1. $(\forall a > 0)(\forall b > 0)$

2. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

3. $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$

4. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

5. $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$

6. $(\forall n \in \mathbb{Z}) \ln(a^n) = n \ln(a)$

تطبيق خاصيات اللوغاريتم النبيري:

مثال: إذا علمت أن $\ln(2) \approx 0,7$ و $\ln(3) \approx 1,1$ فاحسب ما يلي:

$$\ln(3\sqrt{2}) \quad \ln\left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right) \quad \ln(\sqrt{6}) \quad \ln(72) \quad \ln\left(\frac{8}{12}\right)$$

الحل:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{8}{12}\right) &= \ln\left(\frac{2 \times 4}{3 \times 4}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \\ &= \ln(2) - \ln(3) \\ &= 0,7 - 1,1 = -0,4 \end{aligned}$$

$$\ln(72) = \ln(9 \times 8) = \ln(9) + \ln(8)$$

تطبيق الخاصية 1:

لدينا $\ln(2) \approx 0,7$

و $\ln(3) \approx 1,1$

اذن:

$$\ln(6) = \ln(2 \times 3)$$

$$= \ln(2) + \ln(3)$$

$$\approx 0,7 + 1,1 \approx 1,8$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$72 = 9 \times 8$$

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln(a^n) = n \ln(a)$$

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \times 3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$$

$$(\forall a > 0)(\forall b > 0)$$

$$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$$

$$(\forall a > 0)(\forall b > 0)$$

$$\ln(a) > \ln(b) \Leftrightarrow a > b$$

$$\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$$

لأن الدالة $\ln$ تزايدية قطعاً.

$$\ln(e^3) = 3$$

$$\ln(e^4) = -4$$

$$\ln(x) = 7 \text{ حل المعادلة}$$

$$x = e^7 \text{ هو العدد}$$

$$= \ln(3^2) + \ln(2^3)$$

$$= 2\ln(3) + 3\ln(2)$$

$$= 2 \times (1,1) + 3 \times (0,7)$$

$$= 2,2 + 2,1 = 4,3$$

$$\ln(\sqrt{6}) = \frac{1}{2} \ln(6) = \frac{1}{2} \ln(2 \times 3)$$

$$= \frac{1}{2} (\ln(2) + \ln(3)) = \frac{1}{2} (0,7 + 1,1)$$

$$= \frac{1}{2} (1,8) = 0,9$$

$$\ln\left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} (\ln(3) - \ln(2))$$

$$= \frac{1}{2} (1,1 - 0,7) = \frac{1}{2} \times 0,4 = 0,2$$

$$\ln(3\sqrt{2}) = \ln(3) + \ln(\sqrt{2})$$

$$= \ln(3) + \frac{1}{2} \ln(2)$$

$$= 1,1 + \frac{1}{2} (0,7)$$

$$= 1,1 + 0,35 = 1,45$$

(4) جدول تغيرات الدالة $x \rightarrow \ln(x)$

$$\text{لدينا: } (\forall x \in]0, +\infty[) : \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{بما أن } x > 0 \text{ فإن } \ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$$

وبالتالي الدال $\ln$ تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$ ومنه الجدول:

x	0	$+\infty$
f'		+
f(x)		$+\infty$

(5) العدد e : $e \approx 2,71828 \dots$

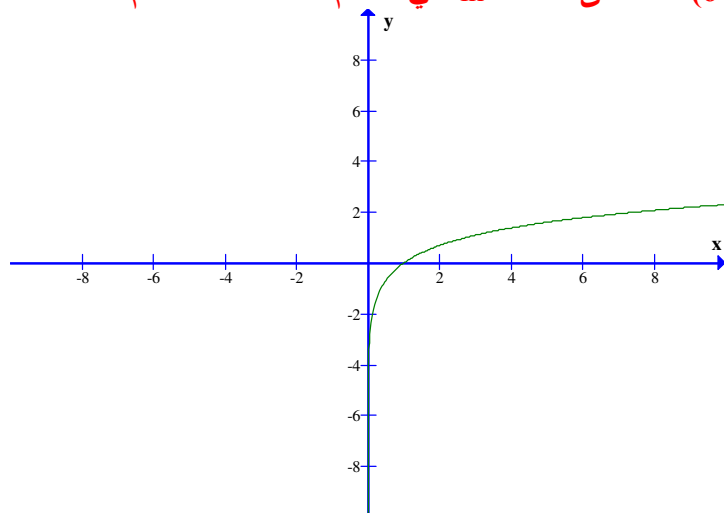
← e هو العدد الحقيقي الذي يحقق $\ln(e) = 1$.

← بتطبيق الخاصية الخامسة على العدد e

$$\text{نحصل على: } (\forall n \in \mathbb{Z}) \ln(e^n) = n \ln(e)$$

$$\text{أي: } (\forall n \in \mathbb{Z}) \ln(e^n) = n$$

(6) منحنى الدالة $\ln$ في معلم متعامد ممنظم



ملاحظات:

معادلة مماس المنحنى الدالة $\ln$ في النقطة $(1, 0)$ هي:

$$y = \ln'(1)(x - 1) + \ln(1)$$

$$y = x - 1 \quad \text{أي:}$$

معادلة مماس المنحنى الدالة $\ln$ في النقطة $(e, 0)$ هي:

$$y = \ln'(e)(x - e) + \ln(e)$$

$$y = \frac{1}{e}(x - e) + 1 \quad \text{أي:}$$

$$y = \frac{1}{e}x \quad \text{أي:}$$

منحنى الدالة $\ln$ يوجد تحت محور الأفاصيل في المجال $]0, 1[$ و هذا يعني أن $\ln(x) < 0$ ($\forall x \in]0, 1[$).

منحنى الدالة $\ln$ يوجد تحت محور الأفاصيل في المجال $]1, +\infty[$ و هذا يعني أن $\ln(x) > 0$ ($\forall x \in]1, +\infty[$).

(7) اللوغاريتم العشري:

تعريف:

يرمز لدالة اللوغاريتم العشري ب: $\log$ و هي معرفة على $]0, +\infty[$

$$\text{كما يلي: } (\forall x \in]0, +\infty[): \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

خصائص هامة لدالة اللوغاريتم العشري:

$$1. \log(10) = 1 \text{ و } \log(1) = 0$$

$$2. (\forall a > 0)(\forall b > 0): \log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$$

$$3. (\forall a > 0): \log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log(b)$$

$$4. (\forall a > 0)(\forall b > 0): \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$5. (\forall a > 0)(\forall n \in \mathbb{Z}): \log(a^n) = n \log(a)$$

$$6. (\forall n \in \mathbb{Z}): \log(10^n) = n$$

$$7. (\forall x \in]0, +\infty[): \log'(x) = \frac{1}{x \ln(10)}$$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\ln(1) = 0$$

$$\ln'(e) = \frac{1}{e}$$

$$\ln(e) = 1$$

$$\text{لاحظ أن } \ln(10) \neq 1$$

$$\text{في حين } \log(10) = 1$$

تطبيق الخاصية 2:

نريد حساب $\log(20)$

علما أن $\log(2) \approx 0,30103$

$$\log(20) = \log(2 \times 10)$$

$$= \log(2) + \log(10)$$

$$\approx 0,30103 + 1$$

$$\approx 1,30103$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x) = -\infty \quad 8.$$

$$c \leq \log(x) < c+1 \text{ فإن } 10^c \leq x < 10^{c+1} \quad 9.$$

$$(\forall a > 0)(\forall b > 0) : \log(a) = \log(b) \Leftrightarrow a = b \quad 10.$$

$$(\forall a > 0)(\forall b > 0) : \log(a) > \log(b) \Leftrightarrow a > b \quad 11.$$

جدول تغيرات دالة اللوغاريتم العشري:

x	0	$+\infty$
f'		+
f(x)		$+\infty$

تطبيق خاصيات اللوغاريتم النيبيري: المعادلات:

مثال : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$\ln(x) = 7 \quad (3)$$

$$\ln(x) = 1 \quad (2)$$

$$\ln(x) = 0 \quad (1)$$

$$\ln(x) + \ln(4-x) = \ln(6-x) \quad (6)$$

$$\ln(x-1) = \ln(2x+3) \quad (5)$$

$$\ln(x+1) = \ln(3) \quad (4)$$

الحل:

$$(1) \text{ يجب أن يكون } x > 0 \text{ في المعادلة } \ln(x) = 0$$

و منه مجموعة تعريف هذه المعادلة هي $]0, +\infty[$

$$\ln(x) = 0 \text{ تكافئ } \ln(x) = \ln(1)$$

$$\text{و منه } x = 1 \text{ و بما أن } 1 \in]0, +\infty[$$

فان مجموعة حلول المعادلة هي: $S = \{1\}$

$$(2) \text{ مجموعة تعريف المعادلة } \ln(x) = 1 \text{ هي }]0, +\infty[$$

$$\text{و هي تكافئ } \ln(x) = \ln(e) \text{ أي } x = e$$

$$\text{و بما أن } e \in]0, +\infty[\text{ فإن } e \in S = \{e\}$$

$$(3) \text{ مجموعة تعريف المعادلة } \ln(x) = 7 \text{ هي }]0, +\infty[$$

$$\text{و هي تكافئ } \ln(x) = \ln(e^7) \text{ أي } x = e^7$$

$$\text{و بما أن } e^7 \in]0, +\infty[\text{ فإن } e^7 \in S = \{e^7\}$$

$$(4) \text{ يجب أن يكون } x+1 > 0 \text{ أي } x > -1$$

$$\text{و منه مجموعة تعريف المعادلة } \ln(x+1) = \ln(3) \text{ هي }]-1, +\infty[$$

$$\text{المعادلة تكافئ } x+1 = 3 \text{ أي } x = 2$$

$$\text{و بما أن } 2 \in]-1, +\infty[\text{ فإن } 2 \in S = \{2\}$$

$$(5) \text{ يجب أن يكون } x-1 > 0 \text{ و } 2x+3 > 0$$

$$\text{أي } x > 1 \text{ و } 2x > -3 \text{ أي } x > -\frac{3}{2} \text{ و } x > 1 \text{ أي } x > 1$$

$$\text{و منه مجموعة تعريف المعادلة } \ln(x-1) = \ln(2x+3) \text{ هي }]1, +\infty[$$

$$\text{و هي تكافئ } x-1 = 2x+3 \text{ أي } x = -4$$

$$\text{و بما أن } -4 \notin]1, +\infty[\text{ فإن } S = \emptyset$$

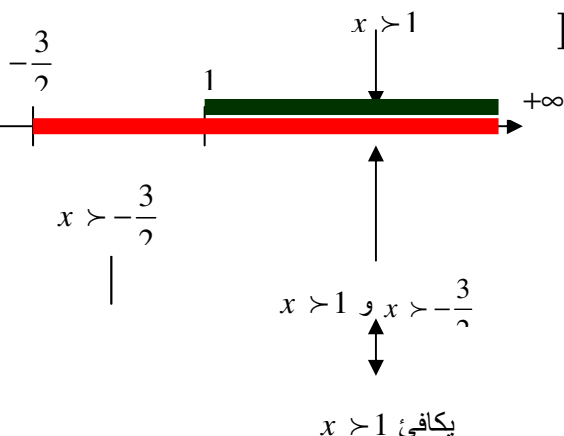
نضع: $x = 104, 27$
لدينا: $100 \leq x \leq 1000$
أي: $10^2 \leq x < 10^3$
إن: $2 \leq \log(x) < 3$
أي: $\log(x) \approx 2, \dots\dots\dots$

الكتابة $\ln(x)$ لها معنى إذا كان $x > 0$.

$$\ln(1) = 0$$

$$7 = \ln(e^7)$$

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) : \ln(e^n) = n$$





$$x > 0 \text{ و } x < 4 \text{ و } x < 6 \text{ يكافئ } 0 < x < 4$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حلين مختلفين

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

(6) يجب أن يكون $x > 0$ و $4 - x > 0$ و $6 - x > 0$.

أي $x > 0$ و $x < 4$ و $x < 6$.
و منه مجموعة تعريف

$$\ln(x) + \ln(4 - x) = \ln(6 - x)$$

هي $]0, 4[$ و هي تكافئ $\ln(x(4 - x)) = \ln(6 - x)$

$$x(4 - x) = 6 - x$$

أي $4x - x^2 = 6 - x$ أي $x^2 - 5x + 6 = 0$
و هذه الأخيرة معادلة من الدرجة الثانية
يتم حلها بحساب المميز Δ

$$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1$$

لدينا $\sqrt{\Delta} = 1$ و منه المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$

تقبل حلين مختلفين $x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$ و $x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$

و بما أن $2 \in]0, 4[$ و $3 \in]0, 4[$

فان مجموعة حلول المعادلة $\ln(x) + \ln(4 - x) = \ln(6 - x)$

$$S = \{2, 3\}$$

تطبيق خاصيات اللوغاريتم النيبري: دراسة دالة تحتوي صيغتها على اللوغاريتم النيبري:

مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ ب: $f(x) = x \ln x - x + 1$

1. أحسب $f(1)$ و $f(e)$ و $f(4)$ و $f\left(\frac{1}{3}\right)$ علما أن $\ln(2) \approx 0,69$ و $\ln(3) \approx 1,1$ و $e \approx 2,71$.

2. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$.

3. أعط جدول تغيرات الدالة f .

4. حدد معادلة مماس (C_f) في 4.

الحل:

$$1. f(1) = 1 \ln(1) - 1 + 1 = 0$$

$$f(e) = e \ln(e) - e + 1$$

$$= e \times 1 - e + 1$$

$$= e - e + 1 = 1$$

$$f(4) = 4 \ln(4) - 4 + 1$$

$$= 4 \ln(2^2) - 4 + 1$$

$$= 8 \ln(2) - 3$$

$$= 8 \times 0,69 - 3 = 2,52$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3) \approx -1,1$$

$$\ln(1) = 0$$

$$\ln(e) = 1$$

$$\ln(2^2) = 2 \ln(2)$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

2. حساب $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x \ln(x) - x + 1) \\ &= (x \ln(x))' - (x)' + (1)' \\ &= (x)' \ln(x) + x \cdot \ln'(x) - 1 + 0 \\ &= \ln(x) + 1 - 1 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \ln(x)$$

3. معادلة المماس عند النقطة ذات الأفضول 4

$$y = f'(4)(x - 4) + f(4)$$

$$\text{أي } y = 1,38x - 3 \text{ لأن } f(4) = 2,25 \text{ و } f'(4) = 1,38.$$

معادلة المماس عند النقطة ذات الأفضول 1

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$\text{أي } y = 0 \text{ لأن } f(1) = 0 \text{ و } f'(1) = 0$$

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ ب : $f(x) = 2 \ln(x) - x$

أعط جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0, 3]$

أنشئ (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم على المجال $]0, 3]$.
الحل:

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x} \text{ إشارة } f'(x) \text{ هي إشارة } (2-x) \text{ لأن } x \text{ موجب قطعاً.}$$

و منه جدول تغيرات f هو كما يلي:

x	0	2	3
f'(x)		+	-
f(x)	$-\infty$	-0,6	-0,8

الأستاذ: نجيب عثمانى