

الأستاذ:
نجيب
عثماني

مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا
• شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك
اللغة العربية
شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك
العلوم الإنسانية

أكاديمية
الجهة
الشرقية

المادة: الرياضيات

تمارين بحلول في درس الاشتقاق ودراسة الدوال

تمرين 3: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

(1) $f(x) = 2$ (2) $f(x) = 3x - 5$ (3) $f(x) = x^{10}$

الأجوبة:

(1) $f'(x) = (2)' = 0$ (2) $f'(x) = (3x - 5)' = 3$

(3) $f'(x) = (x^{10})' = 10x^{10-1} = 10x^9$

قواعد مهمة في العمليات على الدوال المشتقة:

الدالة	مشتقتها
$u + v$	$u' + v'$
$k \cdot u$	$k \cdot u'$
$u \cdot v$	$u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$u^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$nu^{n-1}u'$

تمرين 4: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

(1) $f(x) = 2x^8$ (2) $f(x) = 5x^4 - 1$

الأجوبة: (1) $f'(x) = (2x^8)' = 2 \times 8x^{8-1} = 16x^7$

(2) $f'(x) = (5x^4 - 1)' = 5 \times (x^4)' - (1)' = 5 \times 4x^{4-1} - 0 = 20x^3$

تمرين 5: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

(1) $f(x) = 3x^7$ (2) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 1$

(3) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 6$ (4) $f(x) = 2x^5 - 3x^4 - 6x + 1$

الأجوبة: (1) $f'(x) = (3x^7)' = 3 \times (x^7)' = 3 \times 7x^{7-1} = 21x^6$

(2) $f'(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - 1\right)' = -\frac{1}{2} \times (x^2)' - (1)' = -\frac{1}{2} \times 2x^{2-1} - 0 = -x$

(3) $f'(x) = (3x^3 - 4x^2 + 6)' = 3 \times (x^3)' - 4 \times (x^2)' + (6)'$

$f'(x) = 3 \times 3x^{3-1} - 4 \times 2x + 0 = 9x^2 - 8x$

(4) $f'(x) = (2x^5 - 3x^4 - 6x + 1)' = 2 \times (x^5)' - 3 \times (x^4)' - 6 \times (x)' + (1)'$

$f'(x) = 10x^4 - 12x^3 - 6$

تمرين 1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = 2x^2$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 1$

2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0 = 1$.

الجواب: (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}$

$= \lim_{x \rightarrow 1} 2(x+1) = 2(1+1) = 4 = f'(1) \in \mathbb{R}$

اذن: الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 1$.

(2) لدينا $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$f'(1) = 4$ و $f(1) = 2$ اذن:

$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 4(x - 1) + 2 = 4x - 4 + 2$

ومنه $y = 4x - 2$ وهي معادلة المماس

تمرين 2: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = 3x^2$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند

$x_0 = 2$

2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0 = 2$.

الجواب: (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 12}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)(x+2)}{x-2}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} 3(x+2) = 3(2+2) = 12 = f'(2) \in \mathbb{R}$

للاشتقاق عند $x_0 = 2$.

(2) لدينا $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$f'(2) = 12$ و $f(2) = 12$ اذن:

$y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 12(x - 2) + 12 = 12x - 24 + 12$

$y = 12x - 12$ وهي معادلة المماس

قواعد مهمة في مشتقات الدوال الاعتيادية:

$f'(x)$	$f(x)$
0	k
a	ax
$2x$	x^2
nx^{n-1}	$x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$

تمرين 11: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$(1) f(x) = 3x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1 \quad (2) f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - 4x - 6$$

$$(3) f(x) = x^2 \times (2x - 1) \quad (4) f(x) = \frac{1}{5x - 4}$$

$$(5) f(x) = \frac{4x - 2}{2x + 1}$$

$$(6) f(x) = (2x - 1)^7$$

الجواب (1): $f'(x) = \left(3x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1\right)' = 9x^2 - x$

$$(2) f(x) = x^4 - x^3 - 4$$

$$(3) f'(x) = (x^2 \times (2x - 1))' = (x^2)' \times (2x - 1) + x^2 \times (2x - 1)'$$

$$f'(x) = 2x \times (2x - 1) + x^2 \times 2 = 4x^2 - 2x + 2x^2 = 6x^2 - 2x$$

$$(4) f'(x) = \left(\frac{1}{5x - 4}\right)' = -\frac{(5x - 4)'}{(5x - 4)^2} = -\frac{5}{(5x - 4)^2}$$

$$(5) f'(x) = \left(\frac{4x - 2}{2x + 1}\right)' = \frac{(4x - 2)' \times (2x + 1) - (4x - 2) \times (2x + 1)'}{(2x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4 \times (2x + 1) - (4x - 2) \times 2}{(2x + 1)^2} = \frac{(8x + 4) - (8x - 4)}{(2x + 1)^2} = \frac{8}{(2x + 1)^2}$$

$$(6) f'(x) = ((2x - 1)^7)' = 7(2x - 1)^6 \times (2x - 1)' = 7(2x - 1)^6 \times 2 = 14(2x - 1)^6$$

تمرين 12: لتكن f دالة عددية معرفة بـ : $f(x) = 5x^3$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

2. أحسب الدالة المشتقة واستنتج رتبة الدالة f

الأجوبة (1): الدالة f حدودية إذن $D_f = \mathbb{R}$

$$(2) f'(x) = (5x^3)' = 5(x^3)' = 5 \times 3x^2 = 15x^2 \geq 0$$

ومنه الدالة f تزايدية على $\mathbb{R}$

تمرين 13: نعتبر الدالة f المعرفة

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

(1) حدد D_f (2) أحسب نهايات f عند محددات D_f

(3) أحسب مشتقة الدالة f و أدرس اشارتها

(4) حدد جدول تغيرات f

(5) حدد معادلة لمماس منحى الدالة f في النقطة الذي

$$x_0 = -1$$

(6) حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم

(7) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f و المستقيم (D) الذي

معادلته $y = 3$: (D) في معلم متعامد ممنظم $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

(8) حدد نقط تقاطع (C_f) و (D) .

(9) حل مبيانيا في $\mathbb{R}$ المتراجحة $x^2 + 4x \geq 0$.

الأجوبة: $f(x) = x^2 + 4x + 3$

(1) الدالة f حدودية إذن $D_f = \mathbb{R}$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 4x + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 4x + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

تمرين 6: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات

$$(1) f(x) = 3x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1 \quad (2) f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - 4x - 6$$

$$(3) f(x) = 2x^5 - 4x^2 + 7$$

الأجوبة (1):

$$f'(x) = \left(3x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1\right)' = 3 \times (x^3)' - \frac{1}{2}(x^2)' - (1)' = 9x^2 - x$$

$$(2) f'(x) = \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - 4x - 6\right)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{5} \times (x^5)' - \frac{1}{4} \times (x^4)' - 4 \times (x)' - (6)' = x^4 - x^3 - 4$$

(3)

$$f'(x) = (2x^5 - 4x^2 + 7)' = 2 \times (x^5)' - 4 \times (x^2)' + 7' = 10x^4 - 8x$$

تمرين 7: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$(1) f(x) = (3x + 5) \times (2x + 6) \quad (2) f(x) = x^2 \times (2x - 1)$$

الجواب (1):

$$f'(x) = ((3x + 5) \times (2x + 6))' = ((3x + 5))' \times (2x + 6) + (3x + 5) \times (2x + 6)'$$

$$f'(x) = ((3x + 5) \times (2x + 6))' = 3 \times (2x + 6) + (3x + 5) \times 2$$

$$f'(x) = 6x + 18 + 6x + 10 = 12x + 28$$

$$(2) f'(x) = (x^2 \times (2x - 1))' = (x^2)' \times (2x - 1) + x^2 \times (2x - 1)'$$

$$f'(x) = 2x \times (2x - 1) + x^2 \times 2 = 4x^2 - 2x + 2x^2 = 6x^2 - 2x$$

تمرين 8: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$(1) f(x) = \frac{1}{2x + 1} \quad (2) f(x) = \frac{1}{4x - 3}$$

$$(1) f'(x) = \left(\frac{1}{2x + 1}\right)' = -\frac{(2x + 1)'}{(2x + 1)^2} = -\frac{2}{(2x + 1)^2}$$

$$(2) f'(x) = \left(\frac{1}{4x - 3}\right)' = -\frac{(4x - 3)'}{(4x - 3)^2} = -\frac{4}{(4x - 3)^2}$$

تمرين 9: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$(1) f(x) = \frac{2x + 3}{x + 1} \quad (2) f(x) = \frac{3x - 1}{2x + 5}$$

الجواب (1):

$$f'(x) = \left(\frac{2x + 3}{x + 1}\right)' = \frac{(2x + 3)' \times (x + 1) - (2x + 3) \times (x + 1)'}{(x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 \times (x + 1) - (2x + 3) \times 1}{(x + 1)^2} = \frac{2x + 2 - 2x - 3}{(x + 1)^2} = \frac{-1}{(x + 1)^2}$$

$$(2) f'(x) = \left(\frac{3x - 1}{2x + 5}\right)' = \frac{(3x - 1)' \times (2x + 5) - (3x - 1) \times (2x + 5)'}{(2x + 5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3 \times (2x + 5) - (3x - 1) \times 2}{(2x + 5)^2} = \frac{6x + 15 - 6x + 2}{(2x + 5)^2} = \frac{17}{(2x + 5)^2}$$

تمرين 10: حدد الدالة المشتقة للدالة f : $f(x) = (4x + 3)^3$

الجواب: $f'(x) = ((4x + 3)^3)' = 3(4x + 3)^2 \times (4x + 3)'$

$$f'(x) = 3(4x + 3)^2 \times 4 = 12(4x + 3)^2$$

(8) تحديد نقط تقاطع (C_f) و (D) .

نحل المعادلة : $f(x) = y$ يعني $x^2 + 4x + 3 = 3$

يعني $x^2 + 4x = 0$ يعني $x(x+4) = 0$ يعني $x = 0$ أو $x = -4$

ومنه نقط التقاطع هم : $E(0;3)$ و $F(-4;3)$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 \geq 3 \Leftrightarrow x^2 + 4x \geq 0 \quad (9)$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq y \Leftrightarrow \text{منحنى الدالة } (C_f)$$

يوجد فوق المستقيم (D) : $S = [-4; 0]$

تمرين 14: دالة عددية معرفة ب : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

2. أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3. أحسب الدالة المشتقة ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

4. أنشئ منحنى الدالة f .

الاجوبة:

1. الدالة f محدودة اذن $D_f = \mathbb{R}$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$3. f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)' = (x^3)' - (3x^2)' + (4)'$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \times 2x^1 + 0 = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$$

$$3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ أو } x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

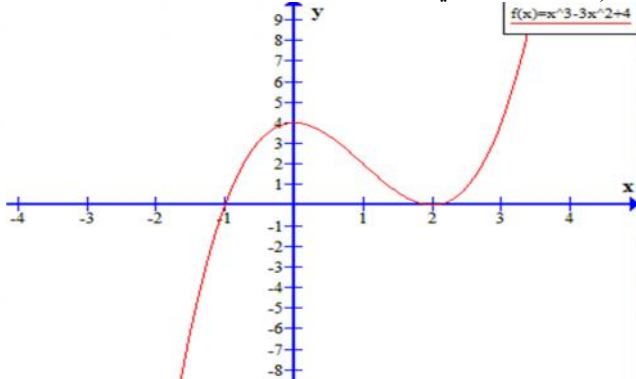
جدول إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$3x$	-	0	+	+
$x-2$	-	-	0	+
$3x(x-2)$	+	0	-	+

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	4	0	$+\infty$

(4) التمثيل البياني للدالة f



$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = (x^2 + 4x + 3)' = 2x + 4 \quad (3)$$

$$f'(x) = 0 \text{ يعني } 2x + 4 = 0 \text{ يعني } x = -2$$

ندرس إشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$2x+4$	-	0	+

إذا كانت : $x \in [-2; +\infty[$ فإن : $f'(x) \geq 0$ ومنه f تزايدية

إذا كانت : $x \in]-\infty; -2]$ فإن : $f'(x) \leq 0$ ومنه f تناقصية

(4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

$$(5) x_0 = -1 \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = 2x + 2 \Leftrightarrow y = 2(x + 1) \Leftrightarrow y = f(-1) + f'(-1)(x + 1)$$

$$f(1) = 0 \text{ و } f'(1) = 2$$

(6) تحديد نقط التقاطع مع محور الأفصيل

نحل المعادلة : $f(x) = 0$ يعني $x^2 + 4x + 3 = 0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$$a = 1 \text{ و } b = 4 \text{ و } c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 16 - 12 = 4 = (2)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما :

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{-4 - 2}{2 \times 1} = -3 \text{ و } x_1 = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{-4 + 2}{2 \times 1} = -1$$

ومنه نقط التقاطع هم : $A(-1; 0)$ و $B(-3; 0)$

(ب) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتايب

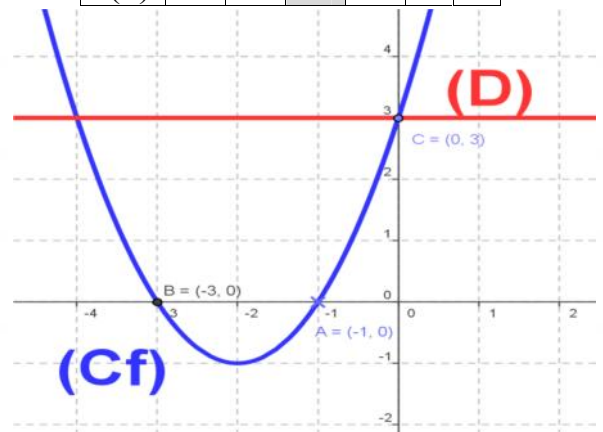
نحسب فقط : $f(0)$

$f(0) = 3$ ومنه نقطة التقاطع هي : $C(0; 3)$

(7) رسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f

و المستقيم (D) : $y = 3$

x	-4	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	3	0	-1	0	3	8



الأجوبة:

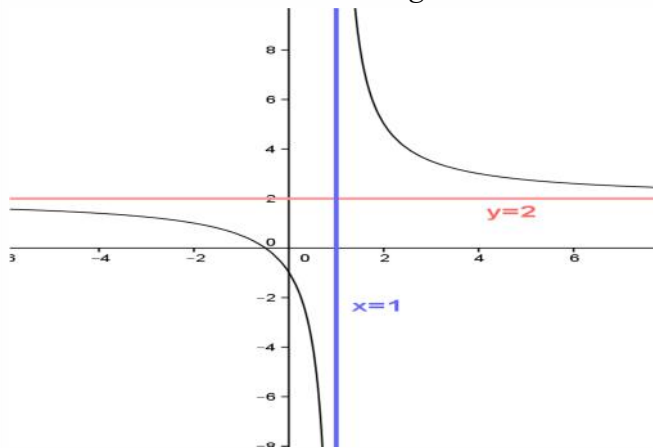
1. حدد حيز تعريف الدالة g هو:
 $D = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1\}$
 و منه $D =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$
 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$
 يعني المستقيم ذا المعادلة $y = 2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) .
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{x-1} = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+1}{x-1} = -\infty$
 يعني المستقيم ذا المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي للمنحنى.
 3. لكل x من D لدينا: $g'(x) = \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$
 يعني: $(\forall x \in D) g'(x) < 0$
 جدول تغيرات الدالة:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	—	—
$f(x)$	2		2

4.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	1	1/2	-1		5	7/2	3

5. منحنى الدالة g .



تمرين 17: نعتبر الدالة العددية g المعرفة ب: $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

1. حدد حيز تعريف الدالة f .
2. أحسب نهايات الدالة f في محداث حيز التعريف و أول النتائج هندسياً.
3. أحسب الدالة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .
4. املأ الجدول التالي:

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$							

5. أنشئ منحنى الدالة f .

تمرين 15: f دالة عددية معرفة ب: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2. أحسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. أحسب الدالة المشتقة وأدرس إشارتها.
4. ضع جدول تغيرات الدالة f .
5. أنشئ منحنى الدالة f .

الأجوبة (1): الدالة f محدودة إذن $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$f'(x) = (x^3 + 3x^2 - 1)' = (x^3)' + (3x^2)' - (1)' = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

$$3x(x+2) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$$

$$x = -2 \text{ أو } x = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \text{ أو } 3x = 0$$

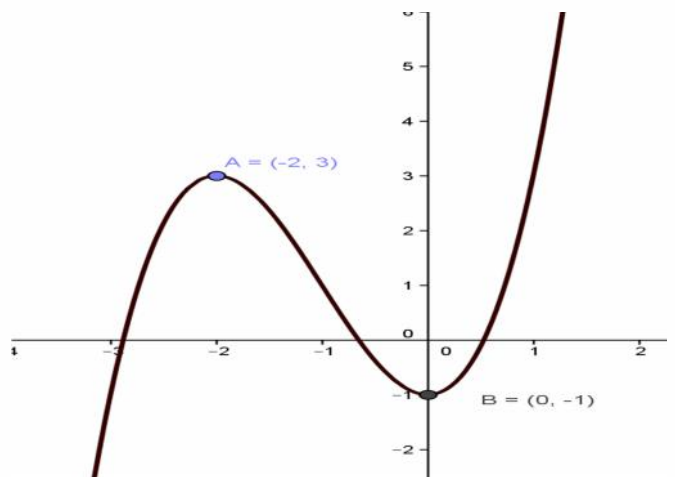
جدول إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$x+2$	—	0	+	+
$3x$	—	—	0	+
$3x(x+2)$	+	0	—	+

4) جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	—	+
$f(x)$	$-\infty$	3	-1	$+\infty$

5) التمثيل المبياني للدالة f .



تمرين 16: نعتبر الدالة العددية g المعرفة ب: $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

1. حدد حيز تعريف الدالة g .
2. أحسب نهايات الدالة g في محداث حيز التعريف و أول النتائج هندسياً.
3. أحسب الدالة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة g .
4. املأ الجدول التالي:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$							

5. أنشئ منحنى الدالة g .

الأجوبة:

1. حيز تعريف الدالة f هو:

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

و منه $D =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y = 3$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x+1}{x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x+1}{x-2} = -\infty$$

يعني المستقيم ذا المعادلة $x = 2$ مقارب عمودي للمنحنى.

$$3. \text{ لكل } x \text{ من } D \text{ لدينا: } f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{(x-2)^2} = \frac{-7}{(x-2)^2}$$

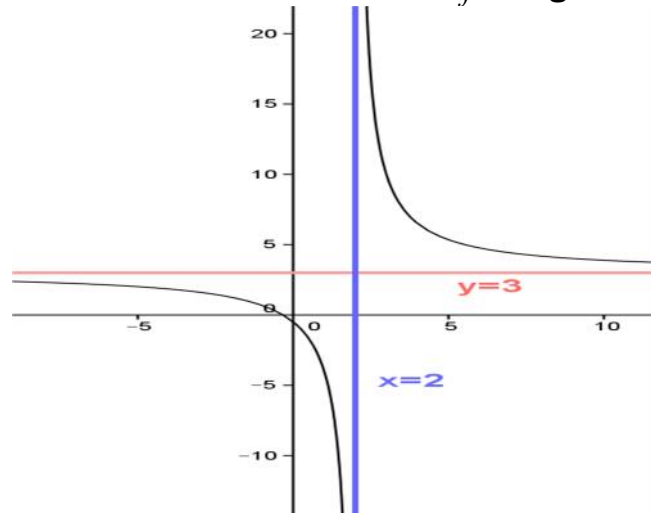
يعني: $(\forall x \in D) f'(x) < 0$

جدول تغيرات الدالة.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	—	—	—
$f(x)$	3 ↘		3 ↘

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	2/3	-1/2	-4		10	13/2	4

5. منحنى الدالة f .



تمرين 18: نعتبر الدالة العددية f المعرفة العددية المعرفة ب:

$$f(x) = \sqrt{3x-5}$$

1. حدد D حيز تعريف الدالة f .

2. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3. أحسب $f'(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة f .

4. أحسب $f(2)$ و $f(3)$ و $f(7)$

5. مثل مبيانيا الدالة f في معلم متعامد ممنظم.

الأجوبة:

1. $f(x)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $3x-5 \geq 0$ يعني $3x \geq 5$

$$\text{منه } x \geq \frac{5}{3}$$

يعني حيز تعريف الدالة f هو: $D = \left[\frac{5}{3}, +\infty\right[$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x\left(3 - \frac{5}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \sqrt{3 - \frac{5}{x}} = +\infty$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = 0$$

$$3. \text{ لدينا: } f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$$

بما أن $\frac{3}{2} > 0$ و $\sqrt{3x-5} > 0$ فان: $f'(x) > 0$.

جدول التغيرات:

x	5/3	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

$$4. \text{ لدينا: } f(2) = \sqrt{3 \times 2 - 5} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{و } f(3) = \sqrt{3 \times 3 - 5} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{و } f(7) = \sqrt{3 \times 7 - 5} = \sqrt{16} = 4$$

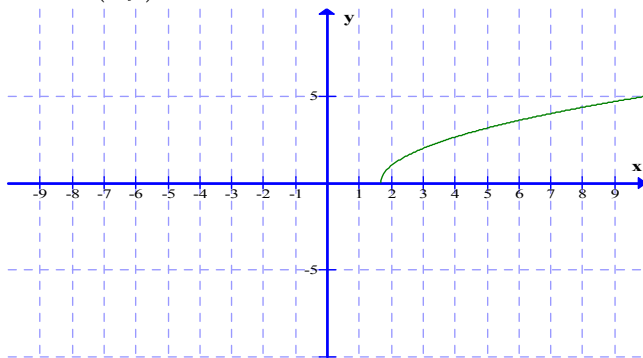
5. التمثيل المبياني:

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = 0 \text{ يعني أن النقطة } A\left(\frac{5}{3}, 0\right) \text{ تنتمي لـ } (C_f).$$

$$f(2) = 1 \text{ يعني أن النقطة } B(2, 1) \text{ تنتمي لـ } (C_f).$$

$$f(3) = 2 \text{ يعني أن النقطة } B(3, 2) \text{ تنتمي لـ } (C_f).$$

$$f(7) = 4 \text{ يعني أن النقطة } B(7, 4) \text{ تنتمي لـ } (C_f).$$



تمرين 19: نعتبر الدالة العددية f المعرفة العددية المعرفة ب:

$$f(x) = \sqrt{2x+4}$$

1. حدد D حيز تعريف الدالة f .

2. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3. أحسب $f'(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة f .

4. أحسب $f(-2)$ و $f(0)$ و $f(6)$

5. مثل مبيانيا الدالة f في معلم متعامد ممنظم.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+1}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x+1}{x+1} = +\infty$$

يعني المستقيم ذا العادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحنى.

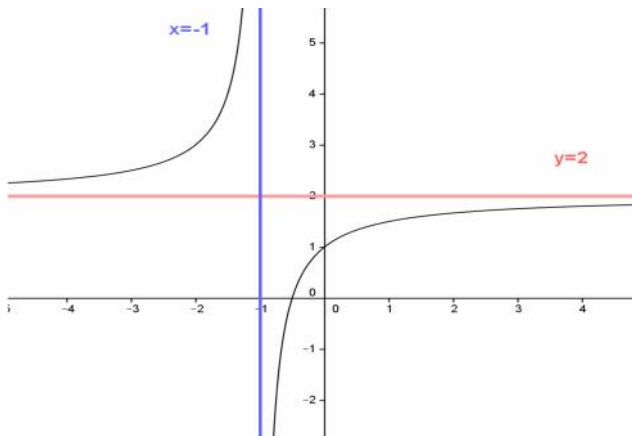
$$(3) \text{ لكل } x \text{ من } D \text{ لدينا: } g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$(\forall x \in D) g'(x) > 0$$

(4) جدول تغيرات الدالة.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$			

منحنى الدالة g .



تمرين 21: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2. أدرس زوجية الدالة f

3. أحسب نهايات الدالة f عند محددات D_f

4. أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f

5. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها

6. حدد جدول تغيرات الدالة f

7. حدد معادلة لمماس المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في

النقطة A التي أفصولها $x_0 = -1$

8. حدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) الممثل للدالة مع محوري المعلم.

9. حدد مطاريق الدالة f اذا وجدت

10. أرسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم

أجوبة: $D_f = \mathbb{R}$ (1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ لأنها دالة حدودية

(2) اذا كانت $x \in \mathbb{R}$ فان $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \frac{1}{3}(-x)^3 - 4(-x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x = -\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right) = -f(x)$$

ومنه f دالة فردية

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

لأن نهاية دالة حدودية عند ما لانهاية هي نهاية حدها الأكبر درجة

الأجوبة: (1) $f(x)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $2x+4 \geq 0$ يعني

$$x \geq -2 \text{ و منه } 2x \geq -4$$

يعني حيز تعريف الدالة f هو: $D = [-2, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x\left(2 + \frac{4}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \sqrt{2 + \frac{4}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$$

$$\text{لدينا: } (\forall x \in]-2, +\infty[) f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+4}} = \frac{1}{\sqrt{2x+4}}$$

بما أن $\sqrt{2x+4} > 0$ فان $f'(x) > 0$.

جدول التغيرات:

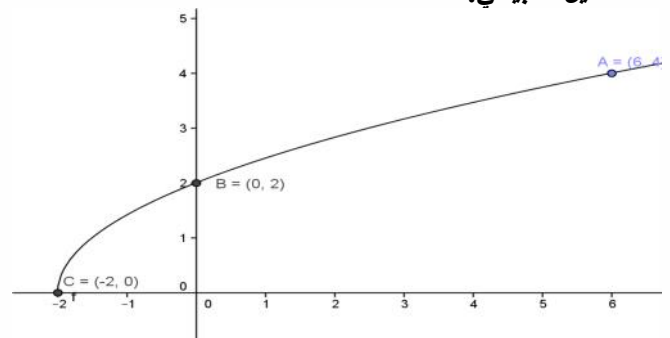
x	-2	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		

$$\text{لدينا: } f(-2) = \sqrt{2 \times (-2) + 4} = \sqrt{0} = 0$$

$$\text{و } f(0) = \sqrt{2 \times 0 + 4} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{و } f(6) = \sqrt{2 \times 6 + 4} = \sqrt{16} = 4$$

التمثيل المبياني:



تمرين 20: نعتبر الدالة العددية g المعرفة ب: $g(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

1. حدد حيز تعريف الدالة g .

2. أحسب نهايات الدالة g في محددات حيز التعريف و أول النتائج

هندسيا.

3. أحسب الدالة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة g .

4. أنشئ منحنى الدالة g .

الأجوبة:

(1) حيز تعريف الدالة g هو:

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

ومنه

$$D =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y = 2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x^2 = +\infty \quad (4)$$

(C_f) يقبل فرعا شلجيميا اتجاهه محور الأرتيب بجوار $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3}x^2 = +\infty$$

(C_f) يقبل فرعا شلجيميا اتجاهه محور الأرتيب بجوار $-\infty$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)' = \frac{1}{3}3x^2 - 4 = x^2 - 4 \quad (5)$$

$$(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$$

$$x = -2! \quad x = 2 \Leftrightarrow$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

(6)

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 16/3$	$\searrow -16/3$	$\nearrow +\infty$	

(7) معادلة لمماس ل (C_f) في النقطة A التي أفصولها $x_0 = -1$

$$f'(-1) = -3 \quad \text{و} \quad f(-1) = \frac{11}{3} \quad \text{و} \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = -3x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = \frac{11}{3} - 3(x+1) \Leftrightarrow y = f(-1) + f'(-1)(x+1)$$

(8) أ) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

$$\text{نحل فقط المعادلة : } f(x) = 0 \text{ يعني } \frac{1}{3}x^3 - 4x = 0$$

$$\text{يعني } x\left(\frac{1}{3}x^2 - 4\right) = 0 \text{ يعني } x = 0 \text{ أو } \frac{1}{3}x^2 - 4 = 0$$

$$\text{يعني } x = 0 \text{ أو } x^2 = 12 \text{ يعني } x = 0 \text{ أو } x = \sqrt{12} \text{ أو } x = -\sqrt{12}! \quad x = -2\sqrt{3}! \quad x = 2\sqrt{3}$$

$$\text{يعني } x = 0 \text{ أو } x = -2\sqrt{3}! \quad x = 2\sqrt{3}$$

ومنه نقط التقاطع هم: $A(2\sqrt{3}; 0)$ و $B(-2\sqrt{3}; 0)$ و $O(0; 0)$

ب) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتيب

نحسب فقط : $f(0) = 0$ لدينا $f(0) = 0$ ومنه نقطة التقاطع هي: $O(0; 0)$

$$(9) \quad f(2) = -\frac{16}{3} \text{ هي قيمة دنيا للدالة } f$$

$$f(-2) = \frac{16}{3} \text{ هي قيمة قصوى للدالة } f$$

(9) التمثيل المبياني للدالة f

