

ملخص وقواعد في الرياضيات

مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
- شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

ملخص درس الاشتقاق ودراسة الدوال

1) اشتقاق دالة في نقطة:

تعريف: نقول ان دالة f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 إذا وجد

عدد حقيقي ℓ بحيث $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$ والعدد ℓ يسمى العدد

المشتق للدالة f في النقطة x_0 . و نكتب $\ell = f'(x_0)$

ملاحظة: إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 فان معادلة مماس

المنحنى (C_f) في النقطة التي أفصولها x_0 هي:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = 2x^2$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 1$.

2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0 = 1$.

$$\text{الجواب: (1)} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} 2(x+1) = 2(1+1) = 4 = f'(1) \in \mathbb{R}$$

للاشتقاق عند $x_0 = 1$.

$$(2) \quad y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 4(x - 1) + 2 = 4x - 4 + 2$$

اذن $f(1) = 2$

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 4(x - 1) + 2 = 4x - 4 + 2$$

وهي معادلة المماس

(2) مشتقات الدوال الاعتيادية و العمليات على الدوال المشتقة:

الدالة	مشتقتها
$u + v$	$u' + v'$
$k \cdot u$	$k \cdot u'$
$u \cdot v$	$u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$u^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$nu^{n-1}u'$

أمثلة: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات

$$(1) \quad f(x) = 2 \quad (2) \quad f(x) = 3x - 5 \quad (3) \quad f(x) = x^{10}$$

$$\text{الأجوبة: (1)} \quad f'(x) = (2)' = 0 \quad (2) \quad f'(x) = (3x - 5)' = 3$$

$$(3) \quad f'(x) = (x^{10})' = 10x^{10-1} = 10x^9$$

مثال: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

$$(1) \quad f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 6 \quad (2) \quad f(x) = (3x + 5)(2x + 6)$$

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{2x + 1} \quad (4) \quad f(x) = \frac{2x + 3}{x + 1} \quad (5) \quad f(x) = (4x + 3)^3$$

$$\text{(الحل: (1)} \quad f'(x) = (3x^3 - 4x^2 + 6)' = 9x^2 - 4x$$

$$(2) \quad f'(x) = ((3x + 5)(2x + 6))' = ((3x + 5))' \times (2x + 6) + (3x + 5) \times (2x + 6)'$$

$$f'(x) = ((3x + 5)(2x + 6))' = 3 \times (2x + 6) + (3x + 5) \times 2$$

$$f'(x) = 6x + 18 + 6x + 10 = 12x + 28$$

$$(3) \quad f'(x) = \left(\frac{1}{2x + 1} \right)' = - \frac{(2x + 1)'}{(2x + 1)^2} = - \frac{2}{(2x + 1)^2}$$

$$(4) \quad f'(x) = \left(\frac{2x + 3}{x + 1} \right)' = \frac{(2x + 3)' \times (x + 1) - (2x + 3) \times (x + 1)'}{(x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 \times (x + 1) - (2x + 3) \times 1}{(x + 1)^2} = \frac{2x + 2 - 2x - 3}{(x + 1)^2} = \frac{-1}{(x + 1)^2}$$

$$(5) \quad f'(x) = ((4x + 3)^3)' = 3(4x + 3)^2 \times (4x + 3)' = 3(4x + 3)^2 \times 4 = 12(4x + 3)^2$$

(3) رتبة دالة و إشارة مشتقتها و دراسة بعض الدوال

خاصية: I مجال من $\mathbb{R}$ و f دالة قابلة للاشتقاق على I .

▪ f ثابتة على $I \Leftrightarrow f'(x) = 0$ لكل x من I .

▪ f تزايدية على $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ لكل x من I .

▪ f تناقصية على $I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$ لكل x من I .

دراسة دالة حدودية: مثال 1:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ دالة عددية معرفة ب:

(1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

(2) أحسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(3) أحسب الدالة المشتقة ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

(4) أنشئ منحنى الدالة f .

الحل:

(1) الدالة f حدودية اذن $D_f = \mathbb{R}$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$(3) \quad f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)' = (x^3)' - (3x^2)' + (4)'$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \times 2x^1 + 0 = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

$$3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$$

$$x = 2 \text{ أو } x = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ أو } 3x = 0$$

جدول إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$3x$	-	0	+	+
$x - 2$	-	-	0	+
$3x(x - 2)$	+	0	-	+

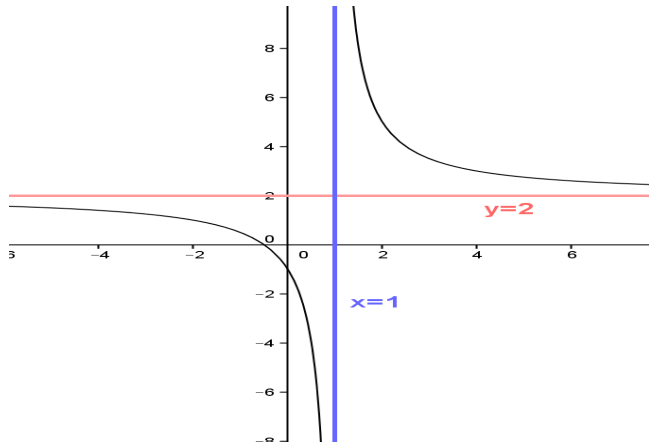
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	4	0	$+\infty$

جدول

تغيرات

الدالة f .

(5) منحنى الدالة g .



دراسة الدالة $(a \neq 0)x \mapsto \sqrt{ax+b}$

مثال: نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب: $f(x) = \sqrt{2x+4}$

1. حدد D حيز تعريف الدالة f .

2. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. أحسب $f'(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة f .

4. أحسب $f(-2)$ و $f(0)$ و $f(6)$.

5. مثل مبيانيا الدالة f في معلم متعامد ممنظم.

الحل: (1) معرفة $f(x)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $2x+4 \geq 0$ يعني

$$2x \geq -4 \text{ و منه } x \geq -2$$

يعني حيز تعريف الدالة f هو: $D = [-2, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x \left(2 + \frac{4}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \sqrt{2 + \frac{4}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$$

$$(\forall x \in]-2, +\infty[) f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+4}} = \frac{1}{\sqrt{2x+4}}$$

لدينا: بما أن $\sqrt{2x+4} > 0$ فإن $f'(x) > 0$.

جدول التغيرات:

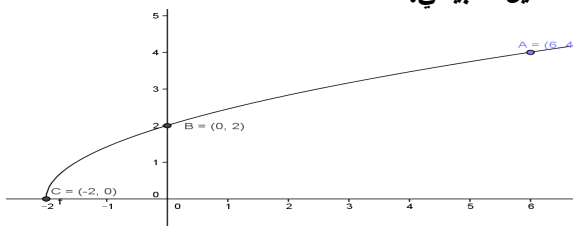
x	-2	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

$$\text{لدينا: } f(-2) = \sqrt{2 \times (-2) + 4} = \sqrt{0} = 0$$

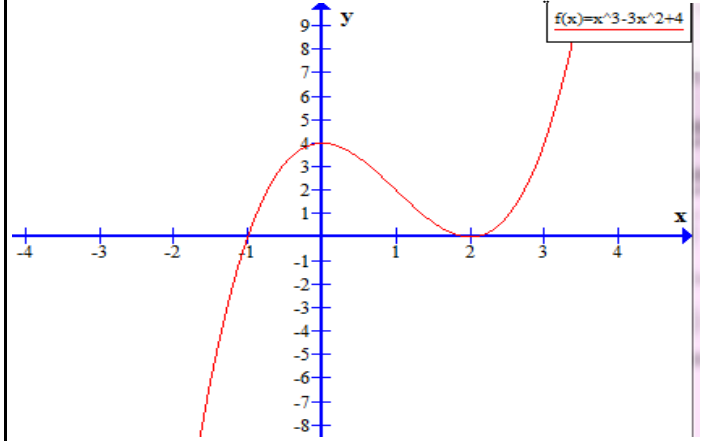
$$\text{و } f(0) = \sqrt{2 \times 0 + 4} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{و } f(6) = \sqrt{2 \times 6 + 4} = \sqrt{16} = 4$$

التمثيل المبياني:



و التمثيل المبياني للدالة f .



دراسة دالة متخاطة: مثال: نعتبر الدالة العددية g المعرفة ب

$$g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

(1) حدد حيز تعريف الدالة g (2) أحسب نهايات الدالة g في محداث حيز التعريف و أول النتائج هندسيا.

(3) أحسب الدالة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة g .

(4) املأ الجدول التالي:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$							

(5) أنشئ منحنى الدالة g .

الحل:

(1) حيز تعريف الدالة g هو: $D = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1\}$

$$\text{و منه } D =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y = 2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+1}{x-1} = -\infty$$

يعني المستقيم ذا المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي للمنحنى.

$$g'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	—	—
$f(x)$	2		2

يعني: $(\forall x \in D) g'(x) < 0$

جدول

تغيرات الدالة.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	1	1/2	-1		5	7/2	3

(4)