

المادة: الرياضيات

ملخص لدرس الاشتقاق

ودراسة الدوال

مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
- شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

ا. اشتقاق دالة في نقطة:

تعريف:

نقول ان دالة f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 إذا وجد عدد حقيقي ℓ بحيث $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell$

$$\text{أو } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$

العدد ℓ يسمى العدد المشتق للدالة f في النقطة x_0 . و نكتب $\ell = f'(x_0)$

ملاحظة:

إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 فان معادلة مماس المنحنى (C_f) في النقطة التي أفصولها x_0 هي:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

ii. الدالة المشتقة:

مشتقات الدوال الاعتيادية:

المجال	$f'(x)$	$f(x)$
$\mathbb{R}$	0	k
$\mathbb{R}$	a	ax
$\mathbb{R}$	$2x$	x^2
$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$
$]0, +\infty[$ أو $]-\infty, 0[$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$

العمليات على الدوال المشتقة:

الشرط	مشتقتها	الدالة
	$u' + v'$	$u + v$
	$k \cdot u'$	$k \cdot u$
	$u'v + uv'$	$u \cdot v$
u لا تنعدم في I	$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{1}{u}$
v لا تنعدم في I	$\frac{u'v + uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$
	$nu^{n-1}u'$	$u^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$

III. رتبة دالة و إشارة مشتقتها:

خاصية:

I مجال من $\mathbb{R}$ و f دالة قابلة للاشتقاق على I .

▪ f ثابتة على $I \Leftrightarrow f'(x) = 0$ لكل x من I .

▪ f تزايدية على $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ لكل x من I .

▪ f تناقصية على $I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$ لكل x من I .

ملاحظة: f قابلة للاشتقاق على المجال I .

إذا انعدمت $f'(x)$ في x_0 مغيرة اشارتها بالمرور من فان f تقبل مطرافا في x_0 .

IV. نهايات دالة:

نهاية دالة حدودية في $+\infty$ أو في $-\infty$ هي نهاية حدها الأعلى درجة.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} \quad (c \neq 0)$$

و نهاية الدالة $\frac{ax+b}{cx+d}$ في $x \rightarrow -\frac{d}{c}$ هي $+\infty$ أو في $-\infty$.

ملاحظة:

▪ إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ فان المستقيم ذا المعادلة $y = \ell$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) .

▪ إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ فان المستقيم ذا المعادلة $x = x_0$ مقارب عمودي.

V. المعادلة و المتراجحة:

f دالة عددية و (C_f) منحناها و c عدد حقيقي.

▪ حلول المعادلة $f(x) = c$ هي أفاصيل نقط تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم $y = c$.

▪ حلول المتراجحة $f(x) = c$ هي المجالات التي يكون فيها المنحنى (C_f) تحت المستقيم $y = c$.

▪ حلول المتراجحة $f(x) = c$ هي المجالات التي يكون فيها المنحنى (C_f) فوق المستقيم $y = c$.

مثال 1 : دراسة دالة حدودية:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ ب : $\mathbb{R}$ معرفة على

1. حدد أرتوب مركز تماثل منحنى الدالة f علما أن أفصولها يساوي 1.

2. حدد حيز الدراسة و أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. أحسب الدالة المشتقة ثم ضع جدول تغيرات الدالة f على حيز الدراسة.

4. أنشئ منحنى الدالة f .

5. حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = 3$ على المجال $]-\infty, 1]$.

الحل:

1. الدالة f حدودية يعني معرفة على $\mathbb{R}$, و يعني أن مركز تماثل (C_f) ينتمي إليه.

فإذا كان أفصول مركز التماثل هو 1 فان أرتوبه هو $f(1) = 2$.

2. حيز دراسة الدالة f هو $D = [1, +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

3. لكل x من $[1, +\infty[$: $f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)' = 3x^2 - 6x$

يعني: $f'(x) = 3x(x - 2)$

$$f'(x) = 0 \text{ يعني } 3x(x - 2) = 0$$

يعني $x = 0$ أو $x = 2$

جدول تغيرات الدالة f .

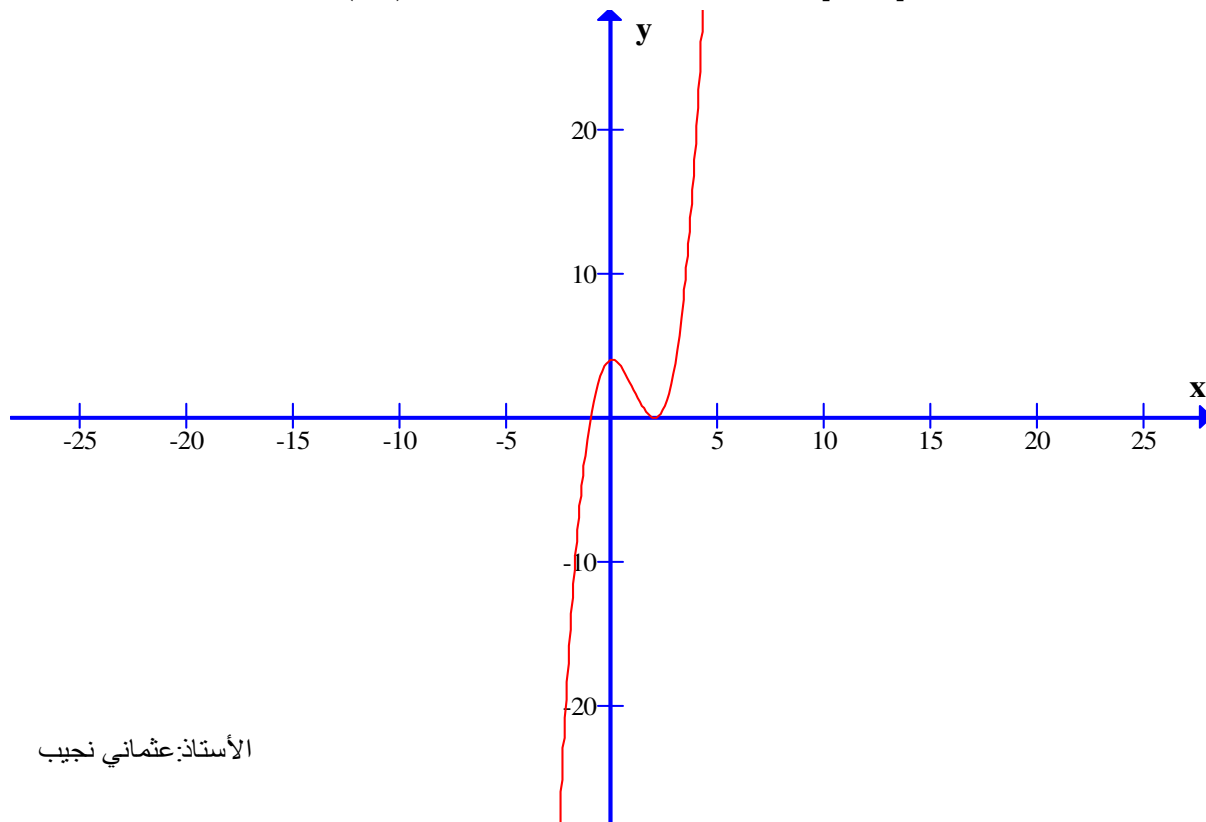
x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	2	0	$+\infty$

جدول إشارة $f'(x)$

x	1	2	$+\infty$
$3x$	+	+	+
$x-2$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+

4. التمثيل المبياني للدالة f .

نبدأ برسم المنحنى على المجال $[1, +\infty[$ ثم نستعمل التماثل المركزي الذي مركزه $I(1, 2)$ لإتمام المنحنى على $\mathbb{R}$.



الأستاذ: عثمانى نجيب

5. مبيانيا، نلاحظ أن المستقيم ذا المعادلة $y = 3$ يقطع المنحنى (C_f) مرتين على المجال $]-\infty, 1]$.

ومن المعادلة $f(x) = 3$ تقبل حلين على المجال $]-\infty, 1]$.

مثال 2 : دراسة دالة متخاطة:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة ب: $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$

1. حدد حيز تعريف الدالة g .

2. أحسب نهايات الدالة g في محددات حيز التعريف و أول النتائج هندسيا.

3. أحسب الدالة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة g .

4. أنشئ منحنى الدالة g .

5. حل مبيانيا المتراجحة $-2 < g(x) < 2$.

الحل:

1. حيز تعريف الدالة g هو: $D = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1\}$

و منه $D =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1$$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{x-1} = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = +\infty$$

يعني المستقيم ذا المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي للمنحنى.

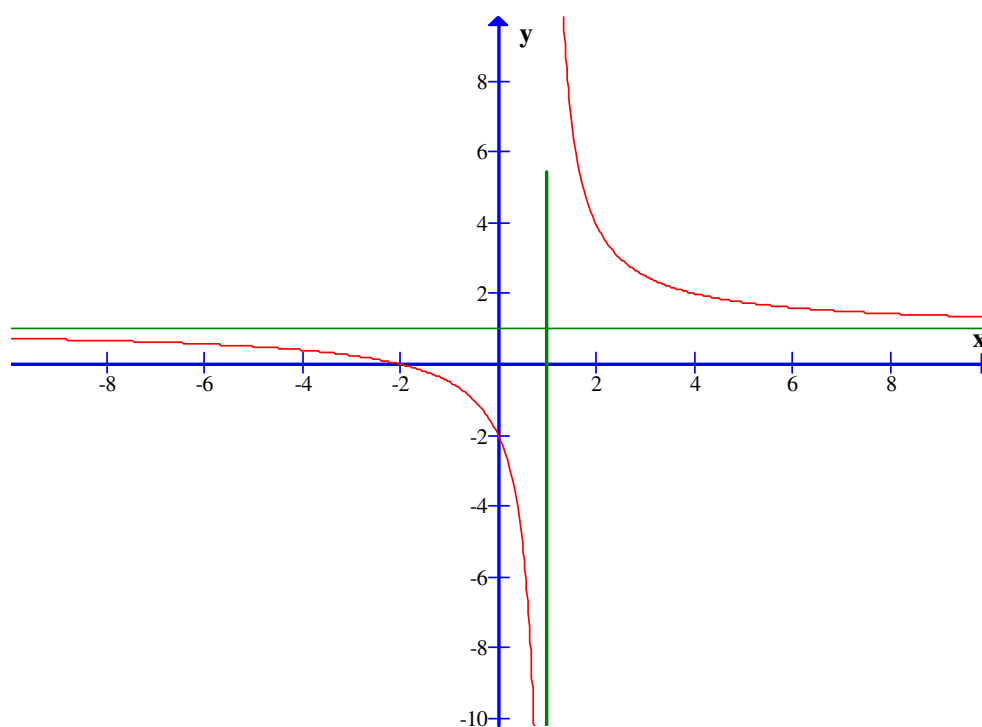
$$g'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

لكن x من D لدينا: $(\forall x \in D) g'(x) < 0$ يعني:

جدول تغيرات الدالة.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	-		-
$g(x)$	1	$+\infty$	$-\infty$

4. منحنى الدالة g .



5. لدينا $g(0) = -2$ و $g(4) = 2$

مجموعة حلول المتراجحة $-2 < g(x) < 2$ هي:

$$S =]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$$

VI. دراسة الدالة $(a \neq 0)x \mapsto \sqrt{ax+b}$:

1. مجموعة تعريف الدالة $(a \neq 0)x \mapsto \sqrt{ax+b}$:

مجموعة تعريف الدالة $(a \neq 0)f : x \mapsto \sqrt{ax+b}$ هي:

في جميع الحالات يجب أن يكون $ax + b \geq 0$.

لدينا: $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ في الحالتين.

▪ إذا كان $a > 0$ $D_f = \left[-\frac{b}{a}, +\infty\right[$

▪ إذا كان $a < 0$ $D_f = \left]-\infty, -\frac{b}{a}\right]$

2. **نهايات الدالة** $x \mapsto \sqrt{ax+b}$ ($a \neq 0$):

▪ إذا كان $a > 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{ax+b} = +\infty$

▪ إذا كان $a < 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{ax+b} = +\infty$

3. **اشتقاق الدالة** $x \mapsto \sqrt{ax+b}$ ($a \neq 0$):

نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب: $(a \neq 0) f(x) = \sqrt{ax+b}$

▪ إذا كان $a > 0$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق في النقطة $-\frac{b}{a}$ و قابلة للاشتقاق على $\left]-\frac{b}{a}, +\infty\right[$

فان: $\left(\forall x \in \left]-\frac{b}{a}, +\infty\right[\right) f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

▪ إذا كان $a < 0$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق في النقطة $-\frac{b}{a}$ و قابلة

للاشتقاق على $\left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[$ فان: $\left(\forall x \in \left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[\right) f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

إذا كان $a > 0$ فإن $\frac{a}{2\sqrt{ax+b}} > 0$ يعني $f'(x) > 0$
إذا كان $a < 0$ فإن $\frac{a}{2\sqrt{ax+b}} < 0$ يعني $f'(x) < 0$

4. **جدول تغيرات الدالة** $x \mapsto \sqrt{ax+b}$ ($a \neq 0$):

حالة $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f'		-	
f(x)	$+\infty$		0

حالة $a < 0$

x	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)	0	$+\infty$

ملاحظة : الرمز || يعني أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق في النقطة $-\frac{b}{a}$

مثال: لدراسة الدالة من قبيل $x \mapsto \sqrt{ax+b}$ ($a \neq 0$):

نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب: $f(x) = \sqrt{3x-5}$

1. حدد D حيز تعريف الدالة f .

2. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة في النقطة $\frac{5}{3}$ على اليمين.

4. أحسب $f'(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة f .

5. أحسب $f(2)$ و $f(3)$ و $f(7)$.

6. مثل مبيانيا الدالة f في معلم متعامد ممنظم.

الحل:

1. $f(x)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $3x - 5 \geq 0$ يعني $3x \geq 5$ ومنه $x \geq \frac{5}{3}$

يعني حيز تعريف الدالة f هو: $D = \left[\frac{5}{3}, +\infty \right[$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x \left(3 - \frac{5}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \sqrt{3 - \frac{5}{x}} = +\infty$

3. نحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{5}{3}\right)}{x - \frac{5}{3}}$

$$\frac{f(x) - f\left(\frac{5}{3}\right)}{x - \frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{3x - 5} - 0}{x - \frac{5}{3}} = \frac{3\sqrt{3x - 5}}{3x - 5} = \frac{3}{\sqrt{3x - 5}}$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{5}{3}\right)}{x - \frac{5}{3}} = +\infty \text{ ومنه } \left(\forall x > \frac{5}{3} \right) : \sqrt{3x - 5} > 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^+} \sqrt{3x - 5} = 0$$

لدينا:

هذا يعني أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق في $\frac{5}{3}$ على اليمين.

4. لدينا: $\left(\forall x \in \left] \frac{5}{3}, +\infty \right[\right) f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x - 5}}$

بما أن $\frac{3}{2} > 0$ و $\sqrt{3x - 5} > 0$ فان: $f'(x) > 0$.

جدول التغيرات:

x	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$+\infty$

5. لدينا: $f(2) = \sqrt{3 \times 2 - 5} = \sqrt{1} = 1$

و $f(3) = \sqrt{3 \times 3 - 5} = \sqrt{4} = 2$

و $f(7) = \sqrt{3 \times 7 - 5} = \sqrt{16} = 4$

6. التمثيل المبياني:

$\left(\frac{5}{3}\right) = 0$ يعني أن النقطة $A\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ تنتمي ل (C_f) .

$f(2) = 1$ يعني أن النقطة $B(2, 1)$ تنتمي ل (C_f) .

$f(3) = 2$ يعني أن النقطة $B(3, 2)$ تنتمي ل (C_f) .

$f(7) = 4$ يعني أن النقطة $B(7, 4)$ تنتمي ل (C_f) .

