

الأستاذ:
نجيب
عثماني

مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا
• شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك
اللغة العربية
شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك
العلوم الإنسانية

أكاديمية
الجهة
الشرقية

المادة: الرياضيات
تمارين بحلول في درس نهاية متتالية

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2}^n = +\infty \text{ لأن: } a = \sqrt{2} > 1 \text{ و}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (3)^n - \frac{1}{2^n} = +\infty - 0 = +\infty$$

$$a = -2 < -1 \text{ ليست لها نهاية لأن: } (-2)^n$$

$$-1 < a = \frac{1}{4} < 1 \text{ لأن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (4)^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(4)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$$

$$a = \frac{5}{4} > 1 \text{ لأن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(5)^n}{(4)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n = +\infty \text{ و}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}} - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{5}{n^2} - 1 \text{ (أحسب النهايات التالية: 1)}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - 3n - 7}{3n^2 + 5} \quad (3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3)^n + (2)^n}{(2)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - 2n \quad (6) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}} - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{5}{n^2} - 1 = 0 - 0 + 0 - 1 = -1 \text{ (أجوبة: 1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n^2} = 0 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}} = 0 \text{ و } -1 < a = \frac{2}{3} < 1 \text{ لأن:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = (-3 + 0)(1 + 0) = (-3)(1) = -3 \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ لأن:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - 3n - 7}{3n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(4 - \frac{3}{n} - \frac{7}{n^2}\right)}{n^2 \left(3 + \frac{5}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(4 - \frac{3}{n} - \frac{7}{n^2}\right)}{\left(3 + \frac{5}{n^2}\right)} = \frac{4}{3} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n^2} = 0 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{n^2} = 0 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0 \text{ لأن:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n \text{ الحساب مباشرة نحصل على شكل غير محدد من قبيل: } +\infty - \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \text{ لأن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(n-1) = +\infty \quad (4)$$

$$-1 < a = \frac{2}{3} < 1 \text{ و } +\infty \times +\infty = +\infty \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} n - 1 = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3)^n + (2)^n}{(2)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3)^n}{(2)^n} + \frac{(2)^n}{(2)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n + 1 = +\infty + 1 = +\infty$$

$$\text{تمرين 1: أحسب النهايات التالية: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{n^3} \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{n^7} \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-6}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^9 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}n^6 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} -3n^5$$

$$\text{أجوبة: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{n^3} = 0 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{n^7} = 0 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-6}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}n^6 = -\infty \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} -3n^5 = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^9 = +\infty$$

$$\text{تمرين 2: أحسب النهايات التالية: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4}{n^3} - 7 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{n^7} \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{n}} + 5$$

$$\text{أجوبة: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4}{n^3} - 7 = 0 - 7 = -7 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + 3 = 0 + 3 = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{n^7} = 0 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{n}} + 5 = 0 + 5 = 5$$

$$\text{تمرين 3: أحسب النهايات التالية: } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-5)^n$$

$$\text{أجوبة: } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty \text{ لأن: } a = 2 > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ لأن: } -1 < a = \frac{2}{3} < 1$$

$$a = -5 < -1 \text{ ليست لها نهاية لأن: } (-5)^n$$

$$\text{تمرين 4: أحسب النهايات التالية: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2})^n \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,7)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(5)^n}{(4)^n} \text{ , } \lim_{n \rightarrow +\infty} (4)^{-n} \text{ , } \lim_{n \rightarrow +\infty} (-2)^n \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n - \frac{1}{2^n}$$

$$\text{أجوبة: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,7)^n = 0 \text{ لأن: } -1 < a = 0,7 < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - 2n \quad \text{الحساب مباشرة نحصل على شكل غير محدد من} \quad (6)$$

قبيل: $+\infty - \infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - 2n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} (1 - 2\sqrt{n}) = -\infty \quad \text{لأن:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - 2\sqrt{n}) = -\infty \quad \text{و} \quad +\infty \times -\infty = -\infty$$

$$\text{تمرين 6:} \quad \text{أحسب النهايات التالية: (1) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{7}{n^2}}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} 6n^3 - 2n^5 + 7n - 9 \quad (3) \lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^3 - 5n^2 + 3n - 1$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n-3}{3n+5} \quad (5) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2-9}{3n+1} \quad (6) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{n^5+3n-4}$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2+1}{14n^3-5n+9} \quad (8) \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)^2 - (n-1)^2$$

$$\text{أجوبة: (1) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{7}{n^2}} = \frac{5}{3} \quad \text{لأن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{n^2} = 0$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^3 - 5n^2 + 3n - 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^3 = +\infty \quad \text{لأن: نهاية}$$

متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة

$$(3) \lim_{n \rightarrow +\infty} 6n^3 - 2n^5 + 7n - 9 = \lim_{n \rightarrow +\infty} -2n^5 = -\infty \quad \text{لأن: نهاية متتالية}$$

حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة

$$(4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n-3}{3n+5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n}{3n} = \frac{9}{3} = 3 \quad \text{لأن: نهاية متتالية جذرية هي}$$

خارج نهاية حديها الأكبر درجة. (5)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2-9}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2}{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \times 2 \times n \times n}{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \times n = +\infty$$

لأن: نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة

$$(6) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{n^5+3n-4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \times n}{n \times n \times n \times n \times n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2+1}{14n^3-5n+9} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2}{14n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n \times n}{14n \times n \times n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)^2 - (n-1)^2 \quad \text{الحساب مباشرة نحصل على شكل}$$

غير محدد من قبيل: $+\infty - \infty$

$$\text{لأن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)^2 - (n-1)^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + 2n + 1 - (n^2 - 2n + 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

تمرين 7: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي:

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 8 \\ u_0 = 4 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي: $v_n = u_n + 2$

$$1. \text{ أحسب } u_1 \text{ و } v_0 \text{ و } v_1$$

$$2. \text{ بين أن } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها: } 5$$

$$3. \text{ أكتب } v_n \text{ بدلالة } n$$

$$4. \text{ استنتج } u_n \text{ بدلالة } n$$

$$5. \text{ أحسب: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

الجواب: (1) نعوض بـ 0

$$u_{0+1} = 5 \times u_0 + 8 = 5 \times 4 + 8 = 28 \quad \text{فنجذ:}$$

$$\text{نعوض بـ } n \text{ فنجد: } v_0 = u_0 + 2 = 4 + 2 = 6$$

$$\text{نعوض بـ } n \text{ فنجد: } v_1 = u_1 + 2 = 28 + 2 = 30$$

$$(2) \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} + 2}{u_n + 2} = \frac{5u_n + 8 + 2}{u_n + 2} = \frac{5u_n + 10}{u_n + 2} = \frac{5(u_n + 2)}{u_n + 2} = 5 = q$$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $5 = q$

$$\text{وحدها الأول } v_0 = 6$$

$$(3) \text{ كتابة } v_n \text{ بدلالة } n$$

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $5 = q$ وحدها الأول v_0

$$\text{فان: } v_n = v_0 \times q^n \quad \text{أي: } v_n = 6 \times (5)^n$$

$$\text{استنتاج } u_n \text{ بدلالة } n$$

$$(4) \text{ لدينا: } v_n = u_n + 2 \quad \text{اذن: } v_n - 2 = u_n \quad \text{أي: } u_n = 6 \times (5)^n - 2$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 6 \times (5)^n = +\infty \quad \text{لأن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (5)^n = 0$$

$$1 < q = 5$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 6 \times (5)^n - 2 = +\infty$$

تمرين 8: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي:

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$$

$$\text{كالتالي: } v_n = u_n - \frac{8}{3}$$

$$1. \text{ أحسب } u_1 \text{ و } v_0 \text{ و } v_1$$

$$2. \text{ بين أن } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها: } \frac{1}{4}$$

$$3. \text{ أكتب } v_n \text{ بدلالة } n$$

$$4. \text{ استنتج } u_n \text{ بدلالة } n$$

$$5. \text{ أحسب: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

الأجوبة (1) نعوض بـ 0

$$\text{فنجذ: } u_1 = \frac{1}{4}u_0 + 2 = \frac{1}{4} \times (-1) + 2 = -\frac{1}{4} + 2 = \frac{7}{4} \quad \text{اذن: } u_{0+1} = \frac{7}{4}$$

نعوض بـ 0 فنجد:

$$v_0 = u_0 - \frac{8}{3} = -1 - \frac{8}{3} = -\frac{11}{3}$$

$$\text{و نعوض بـ } n \text{ فنجد: } v_1 = u_1 - \frac{8}{3} = \frac{7}{4} - \frac{8}{3} = -\frac{11}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{19}{3}$$

$$(2) \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - \frac{8}{3}}{u_n - \frac{8}{3}} = \frac{\frac{1}{4}u_n + 2 - \frac{8}{3}}{u_n - \frac{8}{3}} = \frac{\frac{1}{4}u_n - \frac{2}{3}}{u_n - \frac{8}{3}} = \frac{\frac{1}{4}(u_n - \frac{8}{3})}{u_n - \frac{8}{3}} = \frac{1}{4} = q$$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4} = q$

$$\text{وحدها الأول } v_0 = -\frac{11}{3}$$

$$(3) \text{ كتابة } v_n \text{ بدلالة } n: \text{ بما أن المتتالية } (v_n) \text{ هندسية}$$

(3) كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2} = q$

وحدها الأول $v_0 = -6$ فإن: $v_n = (-6) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n : لدينا: $v_n = u_n - 10$

اذن: $v_n + 10 = u_n$ أي: $u_n = -6 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 10$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad (4)$$

لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ولأن $-1 < a = \frac{1}{2} < 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 10 = 0 + 10 = 10$$

أساسها $\frac{1}{4} = q$ وحدها الأول v_0 فإن: $v_n = v_0 \times q^n$

$$\text{أي: } v_n = -\frac{11}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

(4) استنتاج u_n بدلالة n لدينا: $v_n = u_n - \frac{8}{3}$ اذن: $v_n + \frac{8}{3} = u_n$

$$\text{أي: } u_n = -\frac{11}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{8}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{11}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{11}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{8}{3} = \frac{8}{3} - 1 < a = \frac{1}{4} < 1$$

تمرين 9: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي:

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 5 \\ u_0 = 4 \end{cases}$$

كالتالي: $v_n = u_n - 10$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1

2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

3. أكتب v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n

4. أحسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

الجواب: نعوض بـ 0

$$\text{فنجد: } u_1 = 7 \quad \text{اذن: } u_{0+1} = \frac{1}{2} \times u_0 + 5 = \frac{1}{2} \times 4 + 5 = 2 + 5 = 7$$

$$\text{نعوض بـ } n \text{ بـ } 1 \text{ فنجد: } u_{1+1} = \frac{1}{2} \times u_1 + 5 = \frac{1}{2} \times 7 + 5 = \frac{7}{2} + \frac{10}{2} = \frac{17}{2}$$

$$\text{اذن: } u_2 = \frac{17}{2}$$

$$\text{نعوض بـ } n \text{ بـ } 0 \text{ فنجد: } v_0 = u_0 - 10 = 4 - 10 = -6$$

$$\text{نعوض بـ } n \text{ بـ } 1 \text{ فنجد: } v_1 = u_1 - 10 = 7 - 10 = -3 \quad (2)$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 10}{u_n - 10} = \frac{\frac{1}{2}u_n + 5 - 10}{u_n - 10} = \frac{\frac{1}{2}u_n - 5}{u_n - 10} = \frac{\frac{1}{2}u_n - \frac{10}{2}}{u_n - 10} = \frac{\frac{1}{2}(u_n - 10)}{u_n - 10} = \frac{1}{2} = q$$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2} = q$ وحدها الأول

$$v_0 = -6$$