

مذكرة رقم 2 في درس نهاية متتالية

مذكرة رقم : 2
الأستاذ : عثمانى نجيب

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- المتتاليات من الشكل: $u_{n+1} = au_n + b$ وتمثيلها مبيانياً؛ - نهايات المتتاليات المرجعية: $(n)_{n \geq 0}$ و $(n^2)_{n \geq 0}$ و $(\sqrt{n})_{n \geq 0}$ و $(n^3)_{n \geq 0}$ حيث p عدد صحيح طبيعي أكبر من 3، - نهايات المتتاليات المرجعية: $(\frac{1}{n})_{n \geq 0}$ و $(\frac{1}{n^2})_{n \geq 0}$ و $(\frac{1}{n^3})_{n \geq 0}$ حيث p عدد صحيح طبيعي أكبر من 3؛ - نهاية متتالية هندسية (a^n) حيث $a \in \mathbb{R}$. - العمليات على النهايات؛	- استعمال المتتاليات الهندسية والمتتاليات الحسابية في دراسة أمثلة من متتاليات من الشكل: $u_{n+1} = au_n + b$ - استعمال نهايات المتتاليات المرجعية لتحديد نهايات متتاليات عديدة؛	- نقبل أن المتتاليات $(n)_{n \geq 0}$ و $(n^2)_{n \geq 0}$ و $(n^3)_{n \geq 0}$ و $(\sqrt{n})_{n \geq 0}$ و $(\frac{1}{n})_{n \geq 0}$ و $(\frac{1}{n^2})_{n \geq 0}$ و $(\frac{1}{n^3})_{n \geq 0}$ حيث p عدد صحيح طبيعي أكبر من 3، تؤول إلى 0 عندما يؤول n إلى $+\infty$ اعتباراً لكون المتتالية العددية دالة عددية معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية؛ - جميع النهايات الواردة في محتوى البرنامج تعتبر نهايات مرجعية؛ - تعتبر العمليات على النهايات المنتهية واللامنتهية مقبولة وينبغي تعويد التلاميذ على الاستعمال الصحيح لها؛ - إن أي دراسة نظرية لمفهوم نهاية متتالية تعتبر خارج البرنامج

I. متتاليات مرجعية نهايتها $+\infty$

نشاط: أحسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^7$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} 9x^2$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{8}x^4$ و

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^6$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} 7\sqrt{x}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^7$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} -6\sqrt{x}$

ولكون المتتالية العددية هي نوع من الدوال العددية معرفة على $\mathbb{N}$ أو جزء من $\mathbb{N}$ فإننا نحصل على نتائج مشابهة:

خاصية 1:

المتتاليات المرجعية: (n) و (n^2) و (n^3) و $(\sqrt{n})$ و (n^p) حيث $p \in \mathbb{N}$ و $p \geq 4$ تؤول إلى $+\infty$ عندما تؤول n إلى $+\infty$

ونكتب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

خاصية 2:

إذا كانت (u_n) متتالية مرجعية نهايتها $+\infty$ فإن المتتالية $(-u_n)$ تؤول إلى $-\infty$

II. متتاليات مرجعية نهايتها 0

خاصية: المتتاليات المرجعية: $(\frac{1}{n})$ و $(\frac{1}{n^2})$ و $(\frac{1}{n^3})$ و $(\frac{1}{n^p})$ و $(\frac{1}{\sqrt{n}})$

حيث $p \in \mathbb{N}$ و $p \geq 4$ تؤول إلى 0 عندما تؤول n إلى $+\infty$

ونكتب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$

تمرين 1: أحسب النهايات التالية: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{n^3}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-6}{\sqrt{n}}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{n^7}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^9$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}n^6$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} -3n^5$

إجابة: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{n^3} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-6}{\sqrt{n}} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{n^7} = 0$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^9 = +\infty$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}n^6 = -\infty$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} -3n^5 = -\infty$

I. متتاليات نهايتها عدد

مثال: أحسب النهايات التالية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + 3$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4}{n^3} - 7$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{n}} + 5$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{n^7}$

أجوبة: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + 3 = 0 + 3 = 3$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4}{n^3} - 7 = 0 - 7 = -7$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{n}} + 5 = 0 + 5 = 5$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{n^7} = 0$

ملاحظات:

- كل متتالية تكون نهايتها عددا حقيقيا تسمى متتالية متقاربة
- كل متتالية غير متقاربة تسمى متتالية متباعدة

II. نهاية المتتالية (a^n)

خاصية: ليكن a عددا حقيقيا

1. إذا كان $a > 1$ فان (a^n) تؤول إلى $+\infty$

2. إذا كان $a = 1$ فان (a^n) تؤول إلى 1

3. إذا كان $-1 < a < 1$ فان (a^n) تؤول إلى 0

4. إذا كان $a \leq -1$ فان (a^n) ليست لها نهاية

أمثلة: أحسب النهايات التالية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-5)^n$

أجوبة: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ لأن $a = 2 > 1$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ لأن $-1 < a = \frac{2}{3} < 1$

$(-5)^n$ ليست لها نهاية لأن $a = -5 < -1$

تمرين 2: أحسب النهايات التالية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,7)^n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2})^n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3)^n - \frac{1}{2^n}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2)^n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4)^{-n}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(5)^n}{(4)^n}$

أجوبة: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,7)^n = 0$ لأن $-1 < a = 0,7 < 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2}^n = +\infty$ لأن $a = \sqrt{2} > 1$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3)^n - \frac{1}{2^n} = +\infty - 0 = +\infty$

$(-2)^n$ ليست لها نهاية لأن $a = -2 < -1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (4)^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(4)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ لأن $-1 < a = \frac{1}{4} < 1$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(5)^n}{(4)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n = +\infty$ لأن $a = \frac{5}{4} > 1$

III. العمليات على النهايات

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين و l و l' أعدادا حقيقية نقبل أن العمليات على المتتاليات العددية هي نفسها على الدوال العددية

1. الجمع والضرب

$\lim u_n$	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞
$\lim v_n$	l'	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim(u_n \times v_n)$	$l \times l'$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ش غ م

$\lim u_n$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim v_n$	l'	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$l + l'$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ش غ م

2. المقلوب و الخارج:

$\lim u_n$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{u}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

أمثلة : أحسب النهايات التالية : (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{3n}} - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{5}{n^2} - 1$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-3 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3n - 7}{3n^2 + 5}$ (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3)^n + (2)^n}{(2)^n}$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - n$ (6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - 2n$

$\lim u_n$	l	$l < 0$	$l > 0$	$-\infty$	$l < 0$	l	∞	0
$\lim v_n$	$l' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$l < 0$	$-\infty$	∞	∞	0
$\lim \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{l}{l'}$	0^-	0^-	$+\infty$	0^+	0	شغ م	شغ م

أجوبة: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{3n}} - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{5}{n^2} - 1 = 0 - 0 + 0 - 1 = -1$ لأن: $1 > \frac{2}{3} > -1 < a$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{3n}} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2} = 0$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-3 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = (-3 + 0)(1 + 0) = (-3)(1) = -3$ لأن: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3n - 7}{3n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(4 - \frac{3}{n} - \frac{7}{n^2}\right)}{n^2 \left(3 + \frac{5}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(4 - \frac{3}{n} - \frac{7}{n^2}\right)}{\left(3 + \frac{5}{n^2}\right)} = \frac{4}{3}$ لأن: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^2} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2} = 0$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - n$ الحساب مباشرة نحصل على شكل غير محدد من قبيل: $+\infty - \infty$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - n = \lim_{n \rightarrow \infty} n(n-1) = +\infty$ لأن: $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} n-1 = +\infty$ و $+\infty \times +\infty = +\infty$ و $-1 < a = \frac{2}{3} < 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3)^n + (2)^n}{(2)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3)^n}{(2)^n} + \frac{(2)^n}{(2)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n + 1 = +\infty + 1 = +\infty$

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - 2n$ الحساب مباشرة نحصل على شكل غير محدد من قبيل: $+\infty - \infty$

لأن: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - 2n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(1 - 2\sqrt{n}) = -\infty$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$ و $+\infty \times -\infty = -\infty$

ملاحظة :

❖ نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة
❖ نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

تمرين 3 : أحسب النهايات التالية : (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{7}{n^2}}$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} 4n^3 - 5n^2 + 3n - 1$ (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} 6n^3 - 2n^5 + 7n - 9$ (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n-3}{3n+5}$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 - 9}{3n + 1}$ (6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^5 + 3n - 4}$ (7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + 1}{14n^3 - 5n + 9}$ (8) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^2 - (n-1)^2$

أجوبة: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{7}{n^2}} = \frac{5}{3}$ لأن: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^2} = 0$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} 4n^3 - 5n^2 + 3n - 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 4n^3 = +\infty$ لأن: نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} 6n^3 - 2n^5 + 7n - 9 = \lim_{n \rightarrow \infty} -2n^5 = -\infty$ لأن: نهاية متتالية

حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n-3}{3n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n}{3n} = \frac{9}{3} = 3$ لأن: نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 - 9}{3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 2 \times n \times n}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \times n = +\infty$ لأن: نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^5 + 3n - 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \times n}{n \times n \times n \times n \times n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0$

(7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + 1}{14n^3 - 5n + 9} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2}{14n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n \times n}{14n \times n \times n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0$

(8) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^2 - (n-1)^2$ الحساب مباشرة نحصل على شكل غير محدد من قبيل: $+\infty - \infty$

لأن: $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^2 - (n-1)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 + 2n + 1 - (n^2 - 2n + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4n = +\infty$

تمرين 4 : محلول في دفتر الدروس :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 8 \\ u_0 = 4 \end{cases}$ ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = u_n + 2$

1. أحسب u_1 و v_0 و v_1

2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها : 5

3. أكتب v_n بدلالة n

4. استنتج u_n بدلالة n

5. أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

(الجواب : 1) نعوض $n=0$ فنجد : $u_{0+1} = 5 \times u_0 + 8 = 5 \times 4 + 8 = 28$

نعوض $n=0$ فنجد : $v_0 = u_0 + 2 = 4 + 2 = 6$

نعوض $n=1$ فنجد : $v_1 = u_1 + 2 = 28 + 2 = 30$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} + 2}{u_n + 2} = \frac{5u_n + 8 + 2}{u_n + 2} = \frac{5u_n + 10}{u_n + 2} = \frac{5(u_n + 2)}{u_n + 2} = 5 = q \quad (2)$$

اذن : المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=5$ وحدها الأول $v_0 = 6$

3 كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=5$ وحدها الأول v_0

فان : $v_n = v_0 \times q^n$ أي : $v_n = 6 \times (5)^n$

استنتاج u_n بدلالة n

4 لدينا : $v_n = u_n + 2$ اذن : $v_n - 2 = u_n$ أي : $u_n = 6 \times (5)^n - 2$

5 لأن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 6 \times (5)^n = +\infty$ و $1 < q = 5$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 6 \times (5)^n - 2 = +\infty$

تمرين 5 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$ ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = u_n - \frac{8}{3}$

1. أحسب u_1 و v_0 و v_1

2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها : $\frac{1}{4}$

3. أكتب v_n بدلالة n

4. استنتج u_n بدلالة n

5. أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

(الأجوبة : 1) نعوض $n=0$ فنجد : $u_{0+1} = \frac{1}{4} \times u_0 + 2 = \frac{1}{4} \times (-1) + 2 = -\frac{1}{4} + 2 = \frac{7}{4}$ اذن : $u_1 = \frac{7}{4}$

نعوض $n=0$ فنجد : $v_0 = u_0 - \frac{8}{3} = -1 - \frac{8}{3} = -\frac{11}{3}$ و نعوض $n=1$ فنجد : $v_1 = u_1 - \frac{8}{3} = \frac{7}{4} - \frac{8}{3} = -\frac{11}{3}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - \frac{8}{3}}{u_n - \frac{8}{3}} = \frac{\frac{1}{4}u_n + 2 - \frac{8}{3}}{u_n - \frac{8}{3}} = \frac{\frac{1}{4}u_n - \frac{2}{3}}{u_n - \frac{8}{3}} = \frac{\frac{1}{4}(u_n - \frac{8}{3})}{u_n - \frac{8}{3}} = \frac{1}{4} = q \quad (2)$$

3 كتابة v_n بدلالة n : بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ وحدها الأول v_0 فان : $v_n = v_0 \times q^n$ أي : $v_n = -\frac{11}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

4 استنتاج u_n بدلالة n لدينا : $v_n = u_n - \frac{8}{3}$ اذن : $v_n + \frac{8}{3} = u_n$ أي : $u_n = -\frac{11}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{8}{3}$

5 لأن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ و $-1 < a = \frac{1}{4} < 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{11}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{11}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

تمرين 6: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 5$ و $\forall n \in \mathbb{N}$ ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = u_n - 10$ و $u_0 = 4$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1

2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

3. أكتب v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n

4. أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

الجواب: نعوض $n=0$ فنجد: $u_{0+1} = \frac{1}{2} \times u_0 + 5 = \frac{1}{2} \times 4 + 5 = 2 + 5 = 7$ إذن : $u_1 = 7$

نعوض $n=1$ فنجد : $u_{1+1} = \frac{1}{2} \times u_1 + 5 = \frac{1}{2} \times 7 + 5 = \frac{7}{2} + \frac{10}{2} = \frac{17}{2}$ إذن : $u_2 = \frac{17}{2}$

: نعوض $n=0$ فنجد : $v_0 = u_0 - 10 = 4 - 10 = -6$

نعوض $n=1$ فنجد : $v_1 = u_1 - 10 = 7 - 10 = -3$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 10}{u_n - 10} = \frac{\frac{1}{2}u_n + 5 - 10}{u_n - 10} = \frac{\frac{1}{2}u_n - 5}{u_n - 10} = \frac{\frac{1}{2}u_n - \frac{10}{2}}{u_n - 10} = \frac{\frac{1}{2}(u_n - 10)}{u_n - 10} = \frac{1}{2} = q \quad (2)$$

إذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = -6$

3 كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = -6$ فإن: $v_n = (-6) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n : لدينا: $v_n = u_n - 10$ إذن: $v_n + 10 = u_n$ أي: $u_n = -6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 10$

4 : لأن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ولأن $-1 < a = \frac{1}{2} < 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 10 = 0 + 10 = 10$$