

I. Groupes caractéristiques :

I. 1- Définition : Le groupe caractéristique (ou groupe fonctionnel) est un groupe d'atomes propriétés chimiques similaires aux molécules qui le possèdent .



les composés ayant le même groupe fonctionnel appartiennent à la même famille.

Les groupes caractéristiques permettent de classer les molécules organiques en différentes familles.

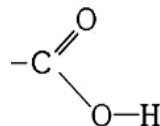
I. 2- Activités : voir lien → TP : <http://ph-chmzrh.e-monsite.com/medias/files/tp-identification-chimie-organique-1biof.pdf>

lien → correction : <http://ph-chmzrh.e-monsite.com/medias/files/tp-corrige-chimie-organique-1biof.pdf>

D'après les tests chimiques faites en TP , chaque famille est caractérisée par un groupe caractéristique (ou fonction chimique) , Chaque famille sera donc reconnaissable :

- par l'identification de son groupe caractéristique à partir de la formule chimique correspondant à l'espèce.
- Par les tests chimiques caractéristiques que nous avons mis en œuvre en travaux pratiques.

Dans le tableau suivant ; on présente les différentes familles de molécules organiques :

Famille	Groupe ou fonction caractéristique	Formule générale	Test caractéristique
Composés halogénés	—X (X : Cl, Br, I, F)	R—X $\text{C}_n\text{H}_{2n+1}\text{—X}$ Ex : $\text{C}_2\text{H}_5\text{—Cl}$	• Les composés halogénés forment des précipités d'halogénure d'argent en présence d'ions argent Ag^+
Alcools	—OH	R—OH $\text{C}_n\text{H}_{2n+1}\text{—OH}$ Ex: $\text{CH}_3\text{—OH}$	• Réagissent avec le permanganate de potassium.
Aldéhydes	—CHO Contient le  groupe carbonyle	R—CHO $\text{C}_n\text{H}_{2n+1}\text{—CHO}$ Ex : $\text{C}_2\text{H}_5\text{—CHO}$	• Formation d'un précipité jaune-orangé avec la 2,4 DNPH • Formation d'un précipité rouge brique avec la liqueur de Fehling. • Formation d'un miroir d'argent avec le réactif de Tollens.
Cétones	—CO—  groupe carbonyle	R—CO—R' $\text{C}_n\text{H}_{2n+1}\text{—CO—}$ $\text{C}_n'\text{H}_{2n'+1}$ Ex : $\text{CH}_3\text{—CO—C}_2\text{H}_5$	• Formation d'un précipité jaune-orangé avec la 2,4 DNPH
Acides carboxyliques	—COOH 	R—COOH $\text{C}_n\text{H}_{2n+1}\text{—COOH}$ Ex : $\text{C}_2\text{H}_5\text{—COOH}$	• Le BBT devient jaune en présence d'un acide carboxylique • $\text{pH} < 7$

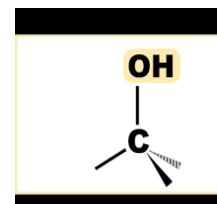
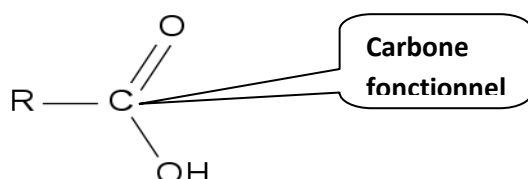
Amines	$-\text{NH}_2$	$\text{R}-\text{NH}_2$ $\text{C}_n\text{H}_{2n+1}-\text{NH}_2$	Le BBT devient bleu en présence d'une amine • $\text{pH} > 7$
Alcènes		C_nH_{2n} avec $n \in \mathbb{N}^*$ Ex : $\text{H}_2\text{C}=\text{CH}_2$	• Décolore une solution aqueuse de dibrome Br_2. • Une solution aqueuse de permanganate de potassium initialement violette en milieu basique devient verte.

II. Familles des composés organiques :

II. 1- Carbone fonctionnel :

Le carbone qui porte le groupe caractéristique s'appelle carbone fonctionnel.

Exemples :



II. 2- Les alcools :

2. 1- Définition :

- Un alcool est un composé organique dans lequel un groupe **hydroxyle** $-\text{OH}$ est fixé sur un atome de **carbone tétragonal** saturé.
- Par rapport aux alcanes on substitue à un hydrogène le groupement caractéristique des alcools, le groupement **hydroxyle** $-\text{OH}$
- Un alcool à chaîne carbonée saturée a pour formule générale $\text{C}_n\text{H}_{2n+1}-\text{OH}$.

2. 2- Nomenclature des alcools : <https://youtu.be/HV98p21R2Oc?t=174>

- ✚ Le nom d'un alcool dérive de celui de l'alcane de même squelette carbonée en remplaçant le « e » final par la terminaison « ol » caractéristique des alcools, précédé de l'indice de position du groupe hydroxyle ($-\text{OH}$) sur la chaîne carbonée principale.
- ✚ La numérotation de la chaîne principale, la plus longue passant par l'atome de carbone fonctionnel, doit lui accorder le plus petit indice possible.
- ✚ Pour les alcools ramifiés, la chaîne carbonée principale est la plus longue chaîne qui comporte le carbone fonctionnel et pour préciser la position du groupe $-\text{OH}$ sur la chaîne carbonée on utilise le suffixe (ol) précédé du plus petit nombre qui indique la position du carbone fonctionnel sur la chaîne carbonée principale.

Exemples :

✚ Ex1 : Un alcool à chaîne carbonée non ramifiée :

a. CH_3-OH méthanol, $\text{CH}_3-\text{CH}_2-\text{OH}$ éthanol, $\text{CH}_3-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{OH}$ propan-1 ol

b. La chaîne carbonée principale possède 6 atomes de carbone, c'est donc un **hexan-**

Le groupe hydroxyle (fonction alcool) est porté par l'atome **n°3**.

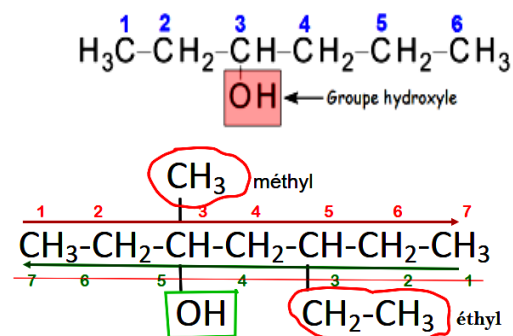
Le nom de cette molécule est donc : **hexan-3-ol**

✚ Ex 2 : Un alcool à chaîne carbonée ramifié :

La chaîne carbonée principale possède 7 atomes de carbone, le préfixe est donc **hept-**

Le groupe hydroxyle (fonction alcool) est porté par l'atome **n°3** (numérotation rouge)

On a donc un **hept-3-ol**.



De plus un groupe méthyle est présent sur l'atome de carbone n°3 et groupe éthyle est présent sur l'atome de carbone n°5. et puisque selon l'ordre alphabétique « e » précède « m » :
 le nom complet de cette molécule est : **5-ethyl 3-méthylhept-3-ol**.

Application :

Compléter le tableau ci-après :

Formule semi-développée	$\text{CH}_3-\text{CH}_2-\underset{\text{CH}_3}{\underset{\text{OH}}{\text{CH}}}-\text{CH}_2-\text{CH}_3$		$\text{CH}_3-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\underset{\text{OH}}{\overset{\text{CH}_3}{\text{C}}}-\text{CH}_3$
Nom		2,2-diméthylbutan-1-ol	

2.3- Classification des alcools :

a) Définition :

On définit la **classe d'un alcool** en fonction du nombre de chaînes carbonées portées par l'atome de carbone fonctionnel.

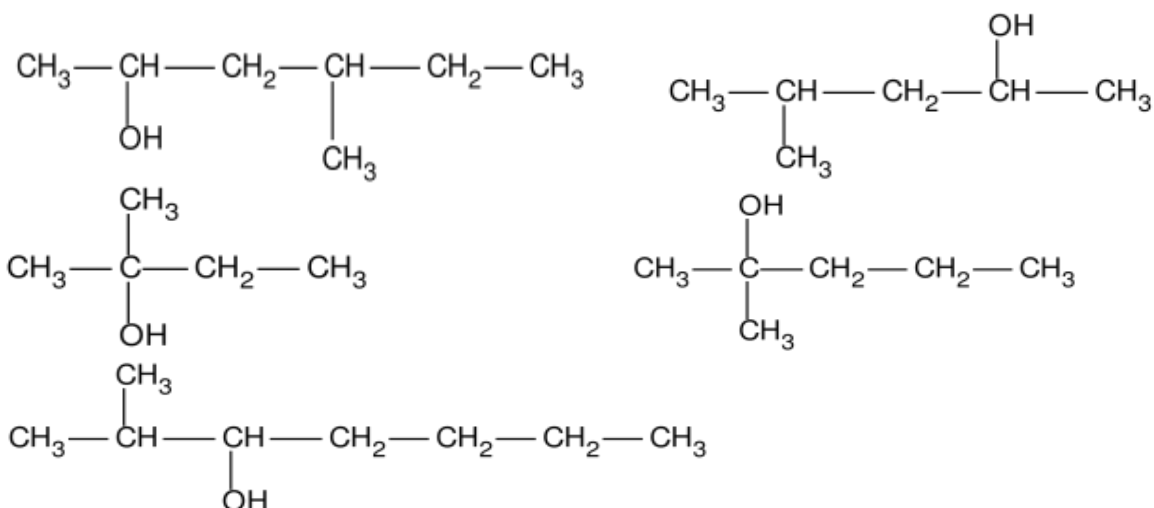
b) Classes des alcools :

On distingue trois classes d'alcools, les alcools primaires, les alcools secondaires et les alcools tertiaires :

Types d'alcools	alcools primaires	alcools secondaires	Alcools tertiaires
Définitions	le groupe -OH est porté par un carbone ayant deux atomes d'hydrogène	*le groupe -OH est porté par un carbone ayant un atome d'hydrogène	le groupe -OH est porté par un carbone n'ayant aucun atome d'hydrogène
Formules	$\text{R}-\text{CH}_2-\text{OH}$	$\text{R}-\underset{\text{R}'}{\text{CH}}-\text{OH}$	$\text{R}-\underset{\text{R}'}{\overset{\text{R}''}{\text{C}}}-\text{OH}$
Exemples	$\text{CH}_3-\text{CH}_2-\underset{\text{CH}_3}{\underset{\text{OH}}{\text{C}}}-\text{CH}_2-\text{CH}_3$	$\text{CH}_3-\text{CH}_2-\underset{\text{CH}_3}{\underset{\text{OH}}{\text{CH}}}-\text{CH}_2-\text{CH}_3$	$\text{CH}_3-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\underset{\text{OH}}{\overset{\text{CH}_3}{\text{C}}}-\text{CH}_3$

Exercices :

- A- 1) Donner le nom systématique des molécules représentées ci-contre.
 2) Indiquer la classe de chaque molécule d'alcool.

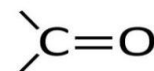


- B- Écrire tous les alcools isomères de formule brute $\text{C}_5\text{H}_{12}\text{O}$. Indiquer leur nom et leur classe.

II. 3- composés carbonylés.

3. 1- Définition :

Les composés organiques comportant au sein de leur molécule le groupe carbonyle —CO— sont appelés composés carbonylés. Les composés carbonylés se composent en deux familles, les aldéhydes et les cétones.



Groupe carbonyle

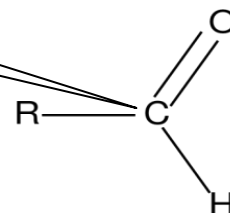
3. 2- La famille aldéhyde :

a) Définition :

les aldéhydes comportent le groupe (ou groupe fonctionnel) —CHO . Le groupe carbonyle est lié à un groupe alkyle ($\text{R} : \text{—C}_n\text{H}_{2n+1}$) et un atome d'hydrogène.

⚡ Dans les aldéhydes le groupe carbonyle est en bout de chaîne

Carbone fonctionnel



Formule générale d'un aldéhyde

b) Nomenclature :

Le nom des aldéhydes est obtenu **en remplaçant le « e » final de l'alcane ayant le même nombre de carbone que la chaîne principale de d'aldéhyde par la terminaison caractéristique « al » des aldéhydes.**

La fonction aldéhyde est forcément en bout de chaîne, il n'est donc pas nécessaire de préciser sa localisation.

c) Exemple :

La chaîne carbonée principale comporte quatre atomes de carbone : le nom principal commence par le préfixe **Butan-**.

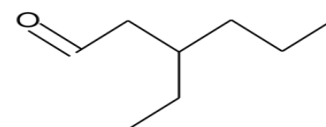
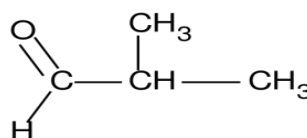
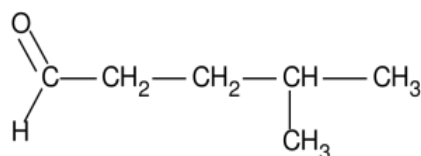
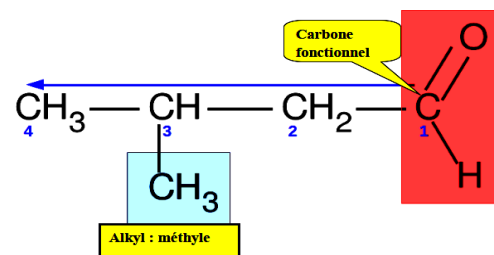
On reconnaît **le groupe fonctionnel carbonyle** en bout de chaîne.

Il s'agit donc d'un **aldéhyde**.

Le carbone fonctionnel porte le $n^\circ=1$, donc la ramification **méthyle** est portée par le carbone $n^\circ=4$.

Le nom complet de la molécule est donc : **3-méthylbutanal**.

Application : Nommer les composés oxygénés insaturés suivants :



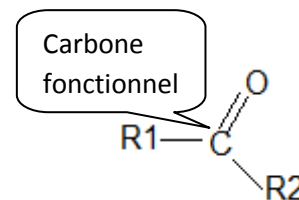
3. 2- La famille cétones :

a) Définition :

les cétones comportent le groupe caractéristique : —CO—

Le groupe carbonyle est lié à des groupes alkyles R_1 et R_2

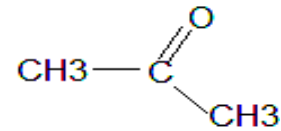
L'atome de carbone du groupement carbonyle est relié à deux atomes de carbones.



Formule générale

Où R_1 et R_2 sont des groupements hydrocarbonés n (à noter R_2 ne peut être un hydrogène, sinon, on retombe dans la famille des aldéhydes)

La cétone la plus simple est l'acétone ou propanone :



b) Nomenclature :

Pour nommer une cétone, il faut se reporter aux règles

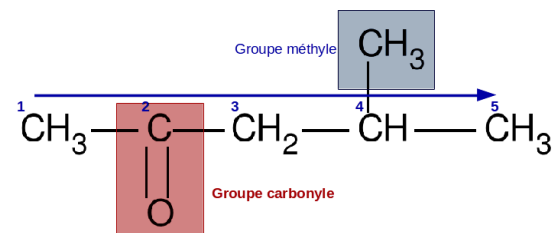
de nomenclature des alcanes.

Le nom de la cétone est le même que celui de l'alcane correspondant, en remplaçant le suffixe -ane par le suffixe -one, précédé du numéro de position du carbone fonctionnel.

S'il y a ambiguïté lors de la numérotation de la chaîne carbonée, le carbone fonctionnel doit porter le numéro le plus bas possible.

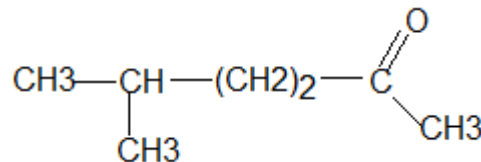
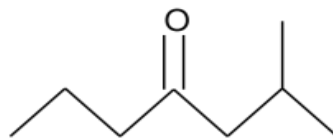
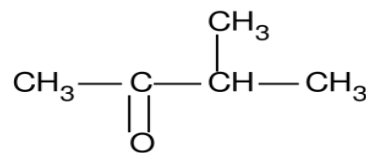
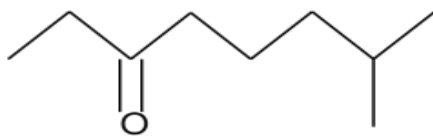
c) Exemple :

- ✚ La chaîne carbonée principale, matérialisée en bleu, comporte 5 atomes de carbone :
- ✚ le nom principal commence donc par le préfixe **Pentan-**.
- ✚ Le groupe **carbonyle** est porté par l'atome de carbone n°2 sa position impose le sens de numérotation de la chaîne carbonée et on en déduit qu'il s'agit **d'une cétone**.
On aura donc la terminaison **2-one**.



- ✚ Enfin, l'atome de carbone n°4 porte un groupe **méthyle**.
Le nom de cette cétone est donc : **4-méthylpentan-2-one**.

Application : Nommer les composés oxygénés insaturés suivants :



II. 4- Les amines :

4. 1- Définition :

On appelle **amines** les composés obtenus à partir de la molécule d'ammoniac NH_3 , par substitution d'un, de deux ou de trois groupes alkyles à un, deux ou trois atomes d'hydrogène.

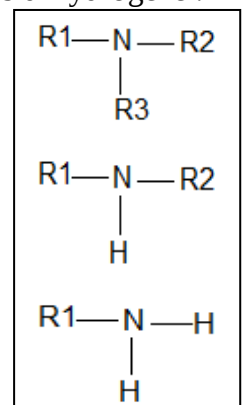
4. 2- Les classes des amines :

Une amine est constituée d'un azote (N de valence égale à 3) relié à des atomes de carbones et d'hydrogène, Il existe :

- ✚ des **amines tertiaires** :

l'azote est relié à 3 atomes de carbones. Où R1, R2, et R3 sont des groupements hydrocarbonés

- ✚ Des **amines secondaires**, **l'azote est relié à un atome d'hydrogène et à deux atomes de carbones** :



✚ **Des amines primaires, l'azote est relié à deux atomes d'hydrogène :**

4. 3- Nomenclature :

a) Amines primaires : Elles sont nommées (de façon analogue aux alcools) en ajoutant le suffixe "amine", éventuellement précédé par un préfixe multiplicatif convenable, au nom du composé fondamental.

Exemples :

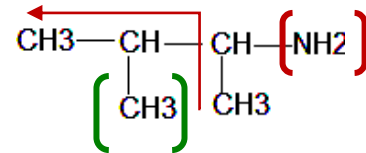
- $\text{CH}_3\text{—CH}_2\text{—NH}_2$ éthanamine , $\text{CH}_3\text{—NH}_2$ méthanimine

- La chaîne principale possède 4 atomes de carbone donc par le préfixe : butan-

l'atome de carbone n°3 porte un groupe **méthyle**.

Le groupe amino ($-\text{NH}_2$) (fonction amine) est porté par l'atome de carbone n°2. On aura donc la terminaison **2-amine**.

En fin , Le nom de cette amine est donc : 3-méthyl butan-2 amine .

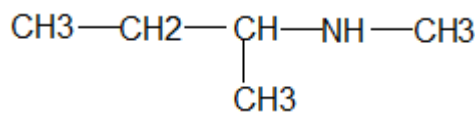


b) Amines secondaires et tertiaires :

La position du groupe fonctionnel dans ce cas doit être indiquée pour les amines secondaires et tertiaires. Le groupe alkyle le plus important est choisi comme structure de base et les groupes restants sont traités comme substituants à la suite de lettres N-, N,N-

. Groupe principal : Suffixe = -amine

Exemples :



N-méthyl,1-méthylpropanamine



N-éthyl,N-méthylpropanamine

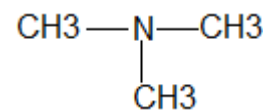
Remarque : Quand ces amines sont symétriques (les substituants fixés sur l'azote sont identiques), elles sont nommées en ajoutant la terminaison "amine " au nom du groupe lié à l'azote, muni d'un préfixe multiplicatif convenable.



diméthylamine



diéthylamine



triméthylamine (N,N-diméthylméthanimine)

II. 5- Les acides carboxyliques :

5.1- Définition : L'atome de carbone du groupement carbonyle est relié à un atome de carbone (ou à un hydrogène) et à un groupement $-\text{OH}$.

Structure générale :

R—COOH	$\text{R—CO}_2\text{H}$	
-----------------	-------------------------	--

Où R : groupement hydrocarboné ($-\text{C}_n\text{H}_{2n+1}$) .

5. 2- Nomenclature :

Le nom de l'acide s'obtient **en remplaçant le « e » de l'alcane correspondant au nombre de carbone de la chaîne principale par la terminaison « oïque » caractéristique des acides carboxyliques**, l'ensemble étant précédé du mot « **acide** ».

Les règles de nomenclature des acides carboxyliques s'appuie essentiellement sur **les règles propres aux alcanes**

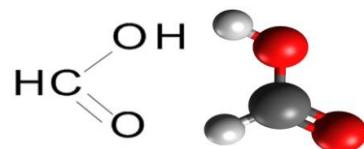
En general :

acide(indice(s) des alkyl(s)- puis- nom(s) de(s) alkyl(s) –puis- nom d'alcane correspondante)oïque.

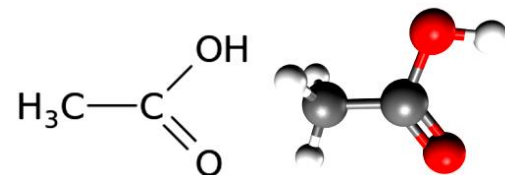
Exemples :

Les acides carboxyliques les plus simples sont :

- L'acide formique (composé produit par les fourmis) ou acide méthanoïque :



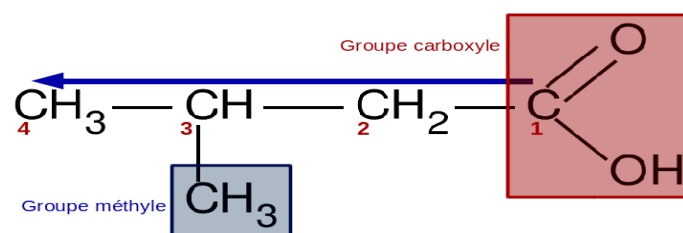
- L'acide acétique (constituant principal du vinaigre de cuisine)
ou acide éthanoïque :



- ♣ On repère la chaîne carbonée principale (flèche bleue) et on la numérote en partant de l'atome de carbone fonctionnel.

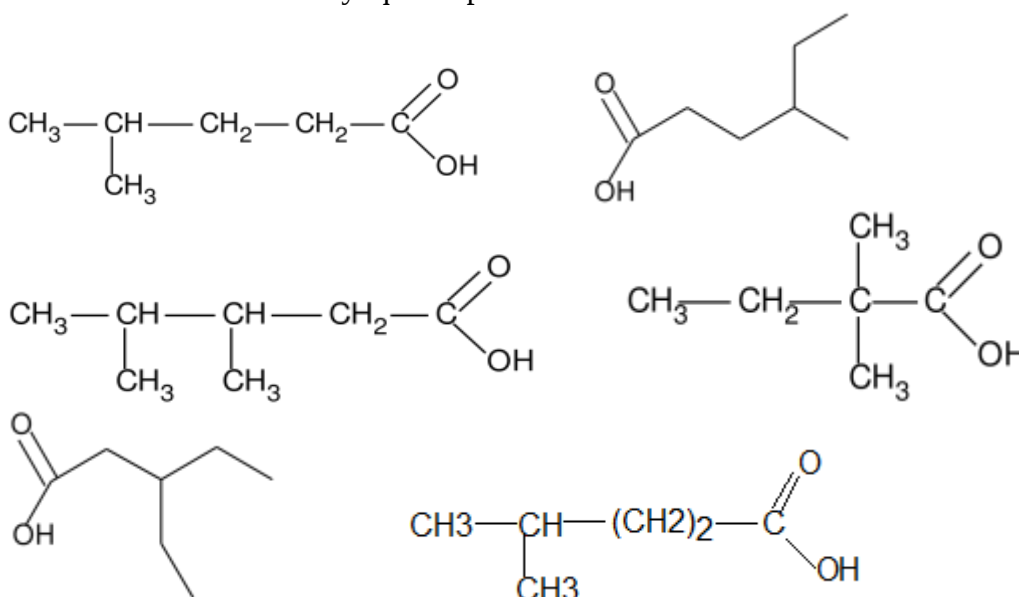
Elle comporte **4 atomes de carbone** donc l'alcane correspondant serait du **butane**.

- ♣ Un groupe **méthyle** est présent sur l'atome de carbone **n°3**.
- ♣ Le groupe carboxyle indique qu'il s'agit d'un acide carboxylique dont le nom complet est : **acide 3-méthylbutanoïque**



Applications :

Nommer les acides carboxyliques représentés ci-contre :



III. Réactivités des alcools :

III. 1- Oxydation ménagée des alcools :

1. 1- Oxydation des alcools primaires :

1.1.1- Expérience n°1 :

a- Manipulation : Réaction entre l'ion permanganate et le propan-1-ol

Dans un tube à essai contenant environ 3 mL d'une solution de permanganate de potassium K^+ ; MnO_4^- à $0,1 \text{ mol.L}^{-1}$ préalablement acidifiée à l'acide sulfurique on ajoute environ, 0,5 mL de propan-1-ol,. On agite et on observe.

Schéma de l'expérience :



A B C

Oxydation de propan-1-ol

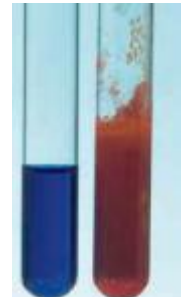
A : éthanol (incolore)
 B : ajout de propan-1-ol
 aux ions permanganates
 C : résultat



C' D E

Test à la 2,4-DNPH

C' : phase organique
 D : Addition de la phase
 organique au 2,4-DNPH
 E : résultat (formation de
 précipité jaune orange)



G H

Test à la liqueur de
 Fehling :

G : liqueur de Fehling
 H : Apparition d'un
 précipité rouge-brique

b- Observations : Lorsque l'on ajoute la solution de permanganate on observe une disparition progressive de la coloration violette due aux ions permanganate. L'ajout de liqueur de Fehling sur la phase organique provoque la formation d'un précipité rouge brique.

- On laisse reposer le mélange réactionnel. Il apparaît deux phases ; une phase organique située au-dessus et une phase aqueuse .
 avec un ampoule à décanter on sépare les deux phases .
- On prélève un peu de la phase organique que l'on verse dans deux tubes à essai C' et H.
 → Dans le tube à essais D, on réalise le test à la 2,4-D.N.P.H
 → Dans le tube H, on réalise le test à la Liqueur : on ajoute quelques gouttes de liqueur de Fehling. En chauffant le tube.

(les deux tests sont positifs)

c- Exploitation :

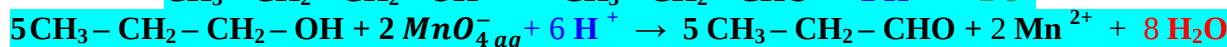
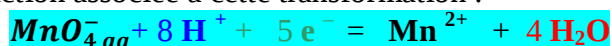
Questions :

- Comment interpréter l'évolution de la coloration dans le mélange réactionnel ?
- Quelle est la nature de l'espèce chimique formée ? Donner sa formule semi-développée.
- Écrire les demi-équations électroniques (on donne le couple MnO_4^- / Mn^{2+})
- En déduire l'équation chimique correspondante.

Réponse :

La disparition de la coloration violette montre que l'ion permanganate MnO_4^- réagit.
 La précipité rouge brique obtenu avec la liqueur de Fehling prouve la formation d'un aldéhyde.

Il y a donc eut une réaction d'oxydoréduction entre l'alcool primaire et l'ion permanganate. Le propan-1-ol a été oxydé en propanal, quand a l'ion MnO_4^- - il a été réduit en ions manganèse Mn^{2+} (aq). On écrit l'équation de la réaction associée à cette transformation :



1.1.2- Expérience n°2 :

a- Manipulation : Le propanal réagit-il avec l'ion permanganate ?

Dans un tube à essai contenant 0,5 mL de propanal, on introduit environ 2mL de solution de permanganate de potassium, acidifiée à l'acide sulfurique. Et on utilise l'indicateur coloré B.B.T pour savoir la nature du produit obtenu. Et on observe .

Schéma de l'expérience :

 A B	A : addition de Propanal sur la solution de permanganate de potassium acidifiée. B : Résultat du mélange	 B C D	B : Résultat du mélange C : B.B.T D : Coloration de L'espèce produite en jaune
--	--	--	--

b- Observations :

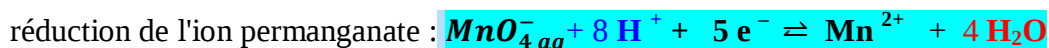
On observe une décoloration immédiate de la solution de permanganate. L'apparition de la coloration jaune dans le tube D montre que Le produit obtenu est un acide

c- Interprétation :

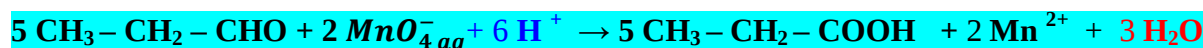
L'ion permanganate a été réduit en ions manganèse, alors que l'aldéhyde (propanal) a été réduit en acide carboxylique (acide propanoïque).

d- Conclusion :

L'équation de la réaction associée à cette transformation est :

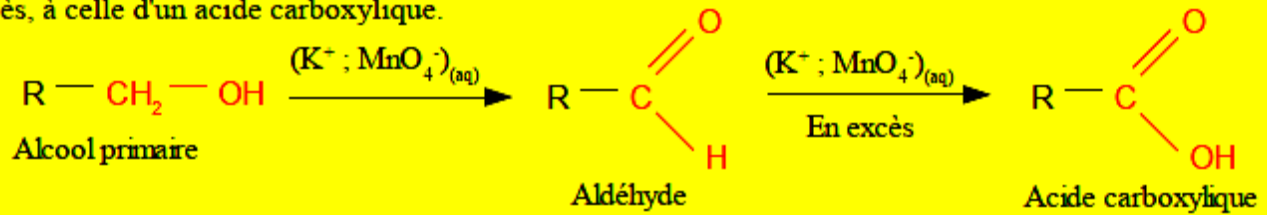


donc l'équation modélisante de cette transformation :



A savoir:

L'oxydation d'un alcool primaire conduit à la formation d'un aldéhyde, puis, lorsque l'oxydant est en excès, à celle d'un acide carboxylique.



1.2- Oxydation des alcools secondaires :

a- Expérience : Dans un tube à essai N° 1 contenant du propan-2-ol, on ajoute une solution acidifiée de permanganate de potassium.

Observations :

- ♣ La coloration violette due aux ions permanganate disparaît progressivement.
- ♣ On laisse reposer le mélange réactionnel, Il apparaît deux phases.
Une phase organique située au-dessus et une phase aqueuse.
- ♣ On prélève un peu de la phase organique que l'on verse dans deux tubes à essai **A** et **B**.
 - Dans le tube à essais **A**, on réalise le test à la 2,4-D.N.P.H
 - dans le tube **B**, on réalise le test à la Liqueur de Fehling.

Le test à la 2,4-D.N.P.H est positif et celui à la Liqueur de Fehling est négatif.

b- Interprétation :

Lors de la réaction, les ions permanganate (teinte violette) sont réduits en ions manganèse II (incolore).

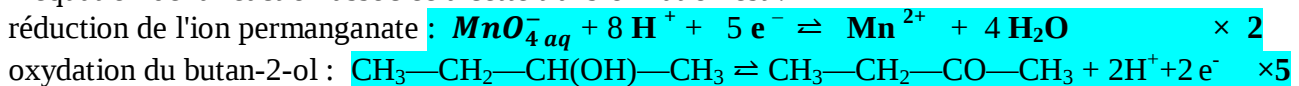
Et puisque le test à la 2,4 D.N.P.H est positif, il s'agit d'un composé carbonyle (aldéhyde ou cétone).

Mais comme le test à la Liqueur de Fehling est négatif, Ce n'est pas un aldéhyde, c'est une cétone :

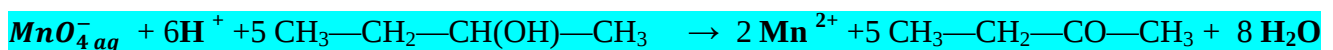
La propan-2-one ou propanone .

c- Conclusion :

L'équation de la réaction associée à cette transformation est :

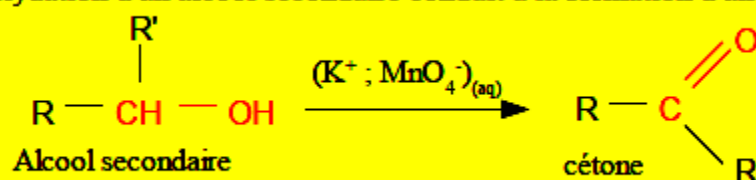


donc l'équation qui modélise l'oxydation de l'alcool secondaire butan-2-ol s'écrit :



A savoir:

L'oxydation d'un alcool secondaire conduit à la formation d'une cétone.



1.3- Oxydation des alcools tertiaires :

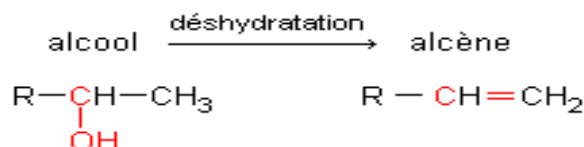
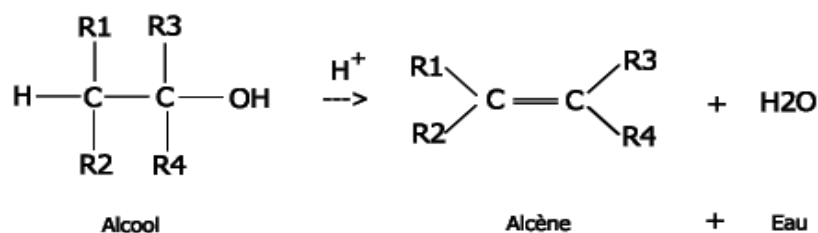
Un alcool tertiaire ne subit pas d'oxydation ménagée.

III. 2- Déshydratation :

On part d'un alcool auquel on doit enlever une molécule d'eau (d'où le terme de déshydratation).

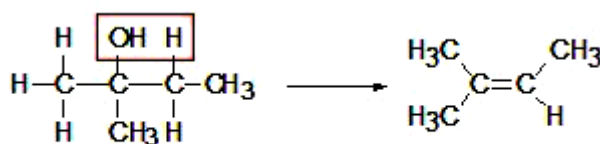
L'équation de déshydratation d'un alcool conduit à la formation d'un alcène :

Sous l'action d'acide sulfurique considéré comme catalyseur on a en général :

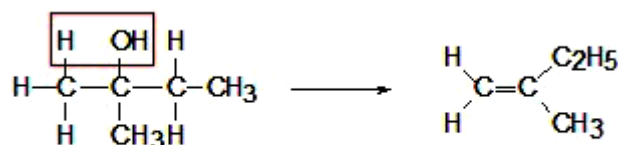


Exemples :

- le méthyl-2-butan-2-ol peut fournir le méthyl-2-but-2-ène :



- ou le méthyl-2-but-1-ène :



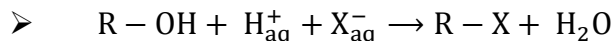
III. 3- Réactions de substitution:

Définition :

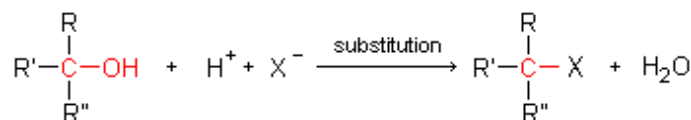
Le groupe hydroxyle des alcool peut être substituer par un groupe halogène X (Cl, Br, F, I ...). ce qui conduit à la formation d'un composé halogéné R—X.

Les alcools peuvent subir une transformation au cours de laquelle leur groupe caractéristique hydroxyle

(—OH) peut être remplacé par un atome d'halogène (Cl, Br, F, I ...). Une telle réaction au cours de laquelle un groupe d'atomes est remplacé par un autre groupe d'atomes ou par un atome est appelé réaction de substitution :



➤

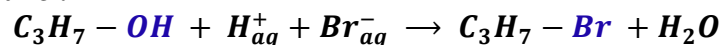


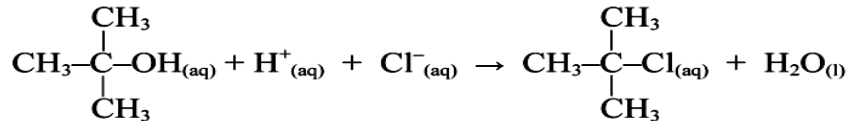
EXEMPLES :

- ✚ Préparation du chlorométhane :



- ✚ Préparation du Bromopropane :





III. 4- Oxydation complète des alcools :

Une oxydation complète est une combustion au cours de laquelle le squelette du composé organique est modifié: le carbone du dioxygène pour former du dioxyde de carbone et de l'eau .

Exemple : $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH} + 3 \text{O}_2 \rightarrow 2 \text{CO}_2 + 3 \text{H}_2\text{O}$ *combustion complète*

IV. Passage d'un groupe caractéristique à un autre :

<http://www.eduonline.net/phychi/presenter/1S/0910/Chi/orga/passage%20d%92un%20groupe%20caract%e9ristique%20%e0%20un%20autre/player.html>

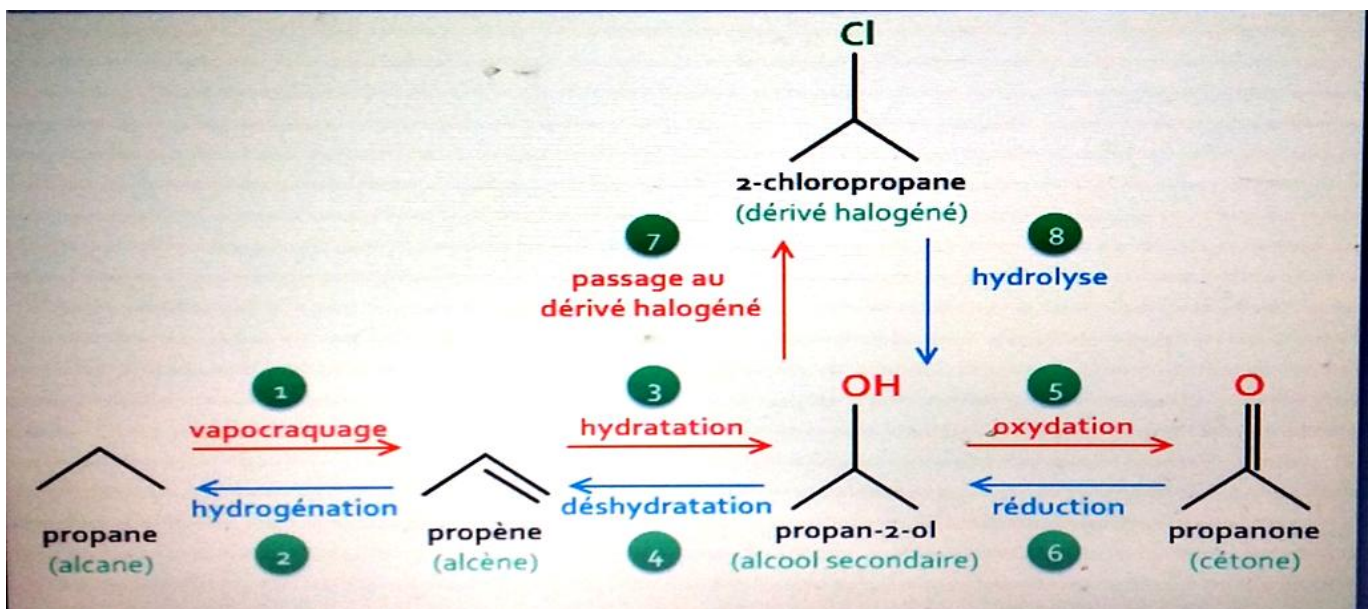
La maîtrise du passage d'un groupe caractéristique à un autre ou d'une famille chimique à une autre est un enjeu capital en chimie organique. C'est cette maîtrise qui permet de recréer des molécules existant dans la nature ou d'en créer de nouvelles. Ces répliques et ces créations de molécules trouvent de nombreuses applications industrielles et pharmaceutiques.

A l'issue d'une oxydation ménagée, un alcool primaire peut conduire à un aldéhyde ou à un acide

carboxylique et un alcool secondaire peut conduire à une cétone.

A l'issue d'une déshydratation, un alcool peut conduire à un alcène.

A l'issue d'une réaction de substitution, un alcool peut conduire à un composé halogéné.



Qu'est-ce que le rendement d'une synthèse :

Définition :

Le rendement d'une synthèse, noté généralement ρ , est égal au quotient de la quantité réelle de produit obtenu $n_{\text{réel}}$ par la quantité maximale n_{max} de produit attendu :

$$\rho = \frac{n_{\text{réel}}}{n_{\text{max}}} \quad 0 < \rho \leq 1$$