

Exercice1 : (8 points)

1) Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

$$P : (\sqrt{4} + \sqrt{1} = \sqrt{4+1} \text{ et } \pi \in \mathbb{Z}) \quad ; \quad Q : (\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{5} \text{ ou } \sqrt{(-2)^2} = 2) \quad (0,75+0,75)$$

2) On considère la proposition suivante :

$$R : (\forall x \in \mathbb{R}) ; (x^2 = 25 \Rightarrow x = 5)$$

a- Déterminer la négation de R . (0,75)

b- Déduire que R est fausse . (0,75)

3) En utilisant le raisonnement par la contraposée montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left[(y \neq x \text{ et } x + y \neq 1) \Rightarrow (\sqrt{x^2 - x + 1} \neq \sqrt{y^2 - y + 1}) \right] \quad (1,5)$$

4) En utilisant le raisonnement par les équivalences successives montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \frac{4x}{x^2 + 4} \leq 1 \quad (1,5)$$

5) En utilisant le raisonnement par récurrence montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : 5^0 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^n = \frac{5^{n+1} - 1}{4} \quad (2)$$

Exercice2 : (4 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x^2 - 6x + 7}{x^2 - 2x + 3}$

1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 - 2x + 3 > 0$ et déduire D_f , le domaine de définition de f . (1+0,5)

2) Montrer que $f(1) = 2$ est une valeur minimale de la fonction f sur \mathbb{R} . (1)

3) a- Montrer que f est majorée par 3 sur \mathbb{R} . (1)

b- Est ce que 3 est une valeur maximale de f sur \mathbb{R} ? (0,5)

Exercice3 : (8points)

On considère les deux f et g fonctions définies par :

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x - 3}$$

C_f et C_g sont respectivement les courbes des fonctions f et g dans un repère orthonormé

1) a- Donner le tableau de variations de f . (1)

b- Déterminer la nature de C_f et ses éléments caractéristiques. (0,5)

c- Déterminer l'intersection de C_f avec les axes (ox) et (oy) . (1+0,5)

2) Déterminer D_g et donner le tableau de variations de g . (0,5+0,5)

3) Construire C_f et C_g dans le même repère orthonormé . (1,25+0,75)

4) a- Montrer graphiquement que l'équation $E : x^2 - 6x + 8 - \sqrt{x - 3} = 0$ admet une seule solution α dans l'intervalle $[3; +\infty[$ et que $4 < \alpha < 5$. (0,5+0,5)

b- Résoudre graphiquement l'inéquation $x^2 - 6x + 8 - \sqrt{x - 3} \leq 0$. (1)