# Chapitre 11

# Etude des fonctions numeriques

## I Asymptotes

### 1)Asymptote verticale

**Définition :** Soit $a$ un nombre réel.
Lorsque $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ (respectivement $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$), on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote (verticale) à la courbe représentant $f$.

**Remarque :** Cette définition est aussi valable pour les limites à droite ou à gauche.
**Exemple :** On reprend l'exemple du 2.3.1.
On a vu que :

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{3}\\ x<\frac{1}{3}}} \frac{x-2}{3x-1} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to\frac{1}{3}\\ x>\frac{1}{3}}} \frac{x-2}{3x-1} = -\infty$$

Donc la droite d'équation $x = \frac{1}{3}$ est asymptote à la courbe représentant la fonction $x \longrightarrow \frac{x-2}{3x-1}$.

### 3.2 Asymptote horizontale

**Définition :** Soit $l$ un réel.
Lorsque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ (respectivement $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$), on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote (horizontale) à la courbe représentant $f$.

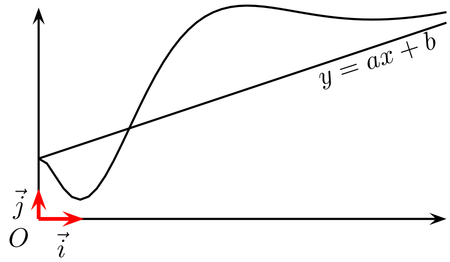
**Exemple :** On reprend l'exemple du 2.3.2.
On a vu que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x^3} = 0$$

Donc la droite d'équation $y = 0$ (c'est-à-dire l'axe des abscisses) est asymptote à la courbe représentant la fonction $x \longrightarrow \frac{x+2}{x^3}$.

### 3) Asymptote oblique

**Définition :** Soit $\Delta$ la droite d'équation $y = ax + b$.
Si $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ (respectivement $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$) alors la droite $\Delta$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant $f$.




**Exemple** : $\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x + 1 + \frac{1}{x} \end{aligned}$

- $\mathcal{C}_f$ admet-elle une droite comme asymptote en $+\infty$ ?
- Justifier.

**Exemple** : $\begin{aligned} f : \mathcal{D}_f &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x^2 - 1} + 2x \end{aligned}$

- Déterminer $\mathcal{D}_f$ ;
- Prouver que la droite $d : y = 3x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ ;
- $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote oblique en $-\infty$ ? (*attendre ce qui suit pour répondre à cette question*)

**Exemple :** Soit $f$ la fonction définie sur $[0\,; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 5x + 1}{2x + 1}$$

et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = -x + 3$.

$$\begin{aligned} f(x) - (-x + 3) &= \frac{-2x^2 + 5x + 1}{2x + 1} - (-x + 3) \\ &= \frac{-2x^2 + 5x + 1 - (-x + 3)(2x + 1)}{2x + 1} \\ &= \frac{-2x^2 + 5x + 1 - \left(-2x^2 + 6x - x + 3\right)}{2x + 1} \\ &= \frac{-2x^2 + 5x + 1 + 2x^2 - 6x + x - 3}{2x + 1} \\ &= -\frac{2}{2x + 1} \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{2}{2x+1}\right) = 0$, donc $\mathcal{D}$ est asymptote à la courbe représentant la fonction $f$.

**Remarque :** Pour étudier la position de la courbe représentant $f$ par rapport à son asymptote, il suffit d'étudier le signe de $\phi(x) = f(x) - (ax + b)$.

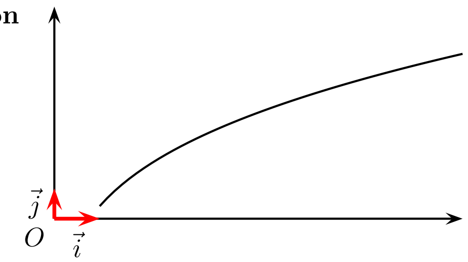
**Exercice :** Reprendre l'exemple précédent et étudier les positions relatives de la courbe représentant $f$ et de son asymptote.

# II Branches paraboliques

## 1) Branche parabolique de direction $(Ox)$

On dit que $\mathcal{C}_f$ présente une **branche parabolique de direction asymptotique** $(Ox)$ en $+\infty$ si :

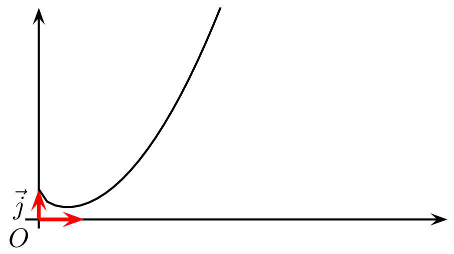
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ ;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ ;




## 2) Branche parabolique de direction $(Oy)$

On dit que $\mathcal{C}_f$ présente une **branche parabolique de direction asymptotique** $(Oy)$ en $+\infty$ si :

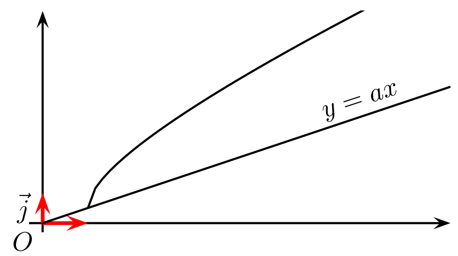
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ ;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$ ;




## 3) Branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$

On dit que $\mathcal{C}_f$ présente une **branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation** $y = ax$ en $+\infty$ si :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ ;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ ;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = \pm\infty$ ;




# III ) Convexité – Point d'inflexion

## 1) Notion de convexité, de concavité

**Définition :** Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.
- On dit que $f$ est convexe sur $I$ si, sur l'intervalle $I$, la courbe $\mathcal{C}$ est entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.
- On dit que $f$ est concave sur $I$ si, sur l'intervalle $I$, la courbe $\mathcal{C}$ est entièrement au-dessous de chacune de ses tangentes.

**Exemples :**

1. La fonction carrée $x \to x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (voir figure 1).

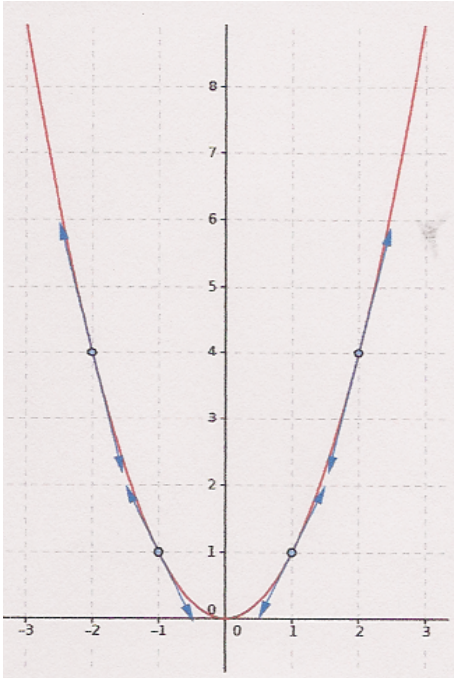



FIGURE 1 – La fonction carrée

2. La fonction racine carrée $x \to \sqrt{x}$ est concave sur $[0\,;+\infty[$ (voir figure 2).
3. La fonction inverse $x \to \frac{1}{x}$ est concave sur sur $]-\infty\,;0[$ et convexe sur $]0\,;+\infty[$ (voir figure 3).

## 2) Point d'inflexion

**Définition :** Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$, $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère et $a \in I$.
On dit que le point $A\,(a\,;\,f\,(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$ si, en $A$, la courbe $\mathcal{C}$ traverse sa tangente.

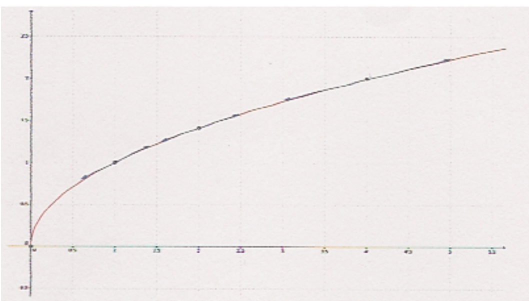


FIGURE 2 – La fonction racine carrée

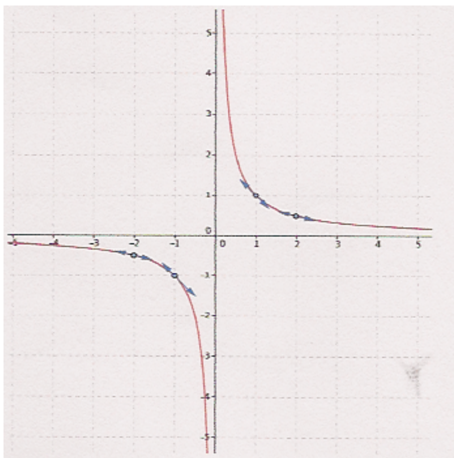


FIGURE 3 – La fonction inverse

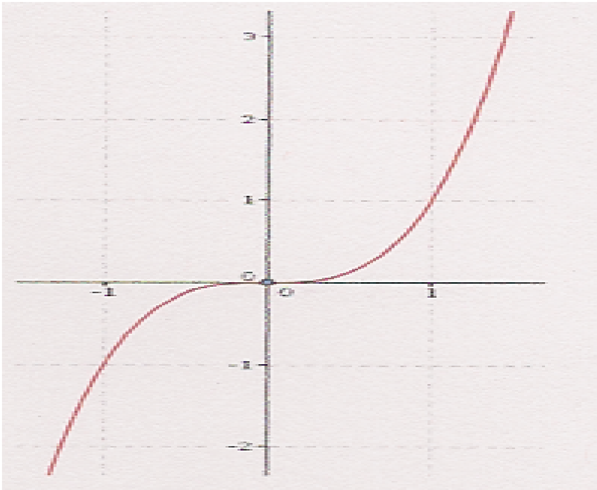



FIGURE 4 – La fonction cube

**Exemple :** La fonction cube $x \to x^3$ admet un point d'inflexion en l'origine $O$ du repère (voir figure 6). Elle est concave sur $]-\infty\,;\,0]$ et convexe sur $[0\,;\,+\infty[$.

**Remarque :** En l'abscisse $a$ du point d'inflexion, la courbe $\mathcal{C}$ passe de concave à convexe ou de convexe à concave.

### 3 ) Convexité et opérations

**Propriété 1 :** Soit $f$ et $g$ deux fonctions dérivables et convexes sur un intervalle $I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- La fonction $f + g$ est convexe sur $I$.
- Si $\lambda > 0$, la fonction $\lambda f$ est convexe sur $I$.
- Si $\lambda < 0$, la fonction $\lambda f$ est concave sur $I$.

**Propriété 2 :** Soit $f$ et $g$ deux fonctions dérivables et concaves sur un intervalle $I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- La fonction $f + g$ est concave sur $I$.
- Si $\lambda > 0$, la fonction $\lambda f$ est concave sur $I$.
- Si $\lambda < 0$, la fonction $\lambda f$ est convexe sur $I$.

## III ) Convexité et dérivées

### 1 ) Convexité et sens de variation de $f'$

**Théorème :** (admis)

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$.
- $f$ est convexe sur $I$ si et seulement si $f'$ est croissante sur $I$.
- $f$ est concave sur $I$ si et seulement si $f'$ est décroissante sur $I$.

## 2 ) Convexité et signe de $f''$

Définition : Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$.
Si la dérivée $f'$ de $f$ est elle aussi dérivable sur $I$, on dit que $f$ est deux fois dérivable sur $I$ et on note $f''$ la dérivée de $f'$ sur $I$.
$f''$ est appelée dérivée seconde de $f$.

**Exemple :**

1. $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$
   $f'(x) = 6x - 3$
   $f''(x) = 6$

**Théorème :**
Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $I$.
- $f$ est convexe sur $I$ si et seulement si $f''$ est positive sur $I$.
- $f$ est concave sur $I$ si et seulement si $f''$ est négative sur $I$.

## 3 ) Point d'inflexion et dérivée seconde

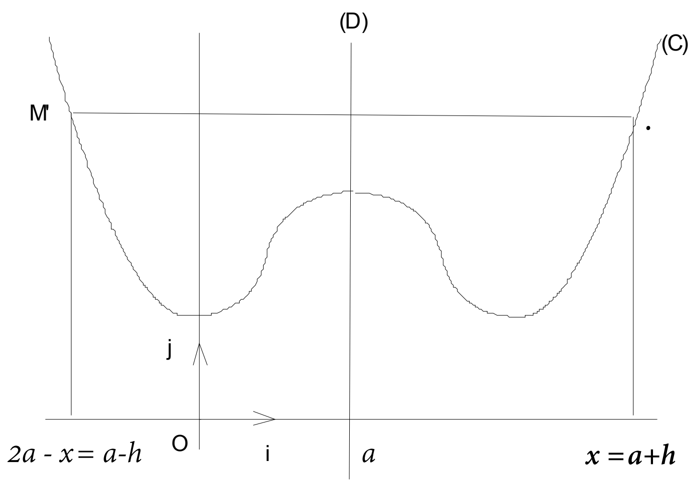
**Théorème :** (admis)
Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $I$ et $a \in I$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $f$.
La courbe $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion au point $A\ (a\,;\,f(a))$ si et seulement si $f''$ s'annule en changeant de signe en $a$.

# *IV )Axe et centre de symétrie d'une représentation graphique de fonction.*

*oit Āf une fonction définie sur l'ensemble Df et qui est représentée graphiquement dans un repère or-*

thogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par une courbe (C).

***<u>Axe de symétrie</u>***



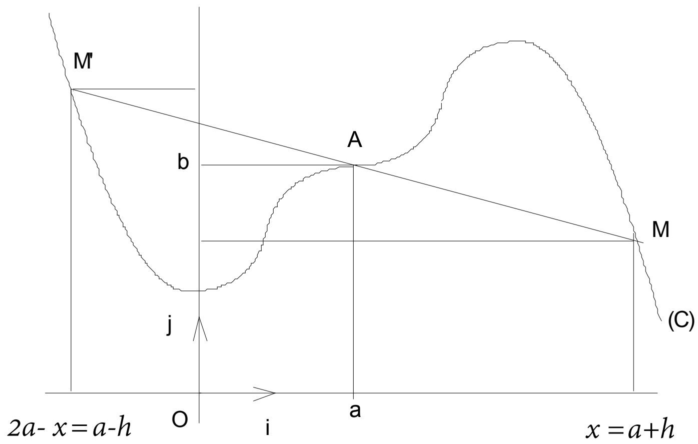

*La droite (D) d'équation x = a est axe de symétrie de (C) si et seulement si, pour tout M∈ (C), son symétrique M' par rapport à (D) appartient aussi à (C). On traduit cela par l'une des deux propriétés équivalentes ci-dessous:*

- *Pour tout x∈ Df, on a:*
  $2a - x \in Df$ et $f(2a - x) = f(x)$

- *Pour tout $h \in IR$ tel que $a + h \in Df$, on a:*
  ***a − Ā∈ Df et***
  ***f(a + ) = f(a Ā− h)***

*Dans le cas particulier où a = 0, on retrouve la propriété du graphique d'une fonction paire: Axe de symétrie: axe des ordonnées.*

***Centre de symétrie***




*Le point A de coordonnées (a;b) est centre de symétrie de (C) si et seulement si, pour tout M∈ (C), son symétrique M' par rapport à A appartient aussi à (C). On traduit cela par l'une des deux propriétés équivalentes ci-dessous:*

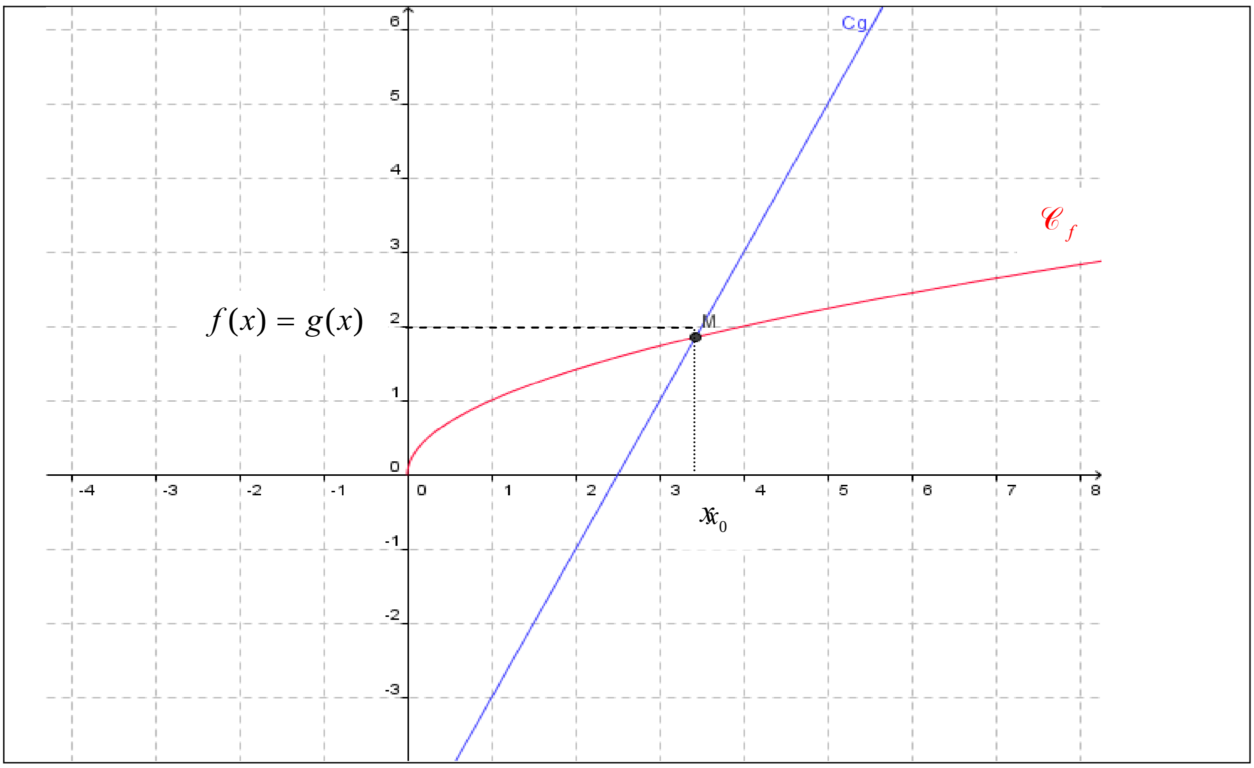
- *Pour tout* $x\in Df$*, on a:*
  $\boldsymbol{2a - x\in Df}$ **et**
  $\boldsymbol{f(2a - x) + f(x) = 2b}$
- *Pour tout* $h \in IR$ *tel que* $a + h \in Df$, on a:
  $a - h \in Df$ *et*
  $f(a + h) + f(a - h) = 2b$

*Dans le cas particulier où a = b = 0, on retrouve la propriété du graphique d'une fonction impaire: Centre de symétrie: origine O du repère.*

## *V ) Position relative de deux courbes*

### 1. Principe

On considère deux fonction $f$ et $g$ définies sur leurs ensembles de définitions. Soient $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives. On suppose que ces courbes ont des points d'intersection. Par exemple :



Soit $x_0$ l'abscisse du point d'intersection.
Graphiquement, on voit que :
- pour $x = x_0$, il y a intersection.

- pour $x > x_0$, la courbe de $f$ est en dessous de celle de g
- pour $x < x_0$, la courbe de $f$ est au dessus de celle de g

On peut dire également que :
- pour $x = x_0$, $f(x) = g(x)$
- pour $x > x_0$, $f(x) < g(x)$
- pour $x < x_0$, $f(x) > g(x)$

En fait, on doit "prévoir" par le calcul ce positionnement relatif des deux courbes.
Ceci revient donc à comparer les expressions $f(x)$ et $g(x)$
Or e, mathématiques, on utilise le principe suivant :
" **pour comparer deux nombres, on étudie le signe de leur différence**"

Par conséquent, pour étudier la position relative de deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, on étudie le signe de la différence $f(x) - g(x)$.

- Dans le cas où $f(x) - g(x) > 0$, on en déduit que $f(x) > g(x)$ et par conséquent $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$
- Dans le cas où $f(x) - g(x) < 0$, on en déduit que $f(x) < g(x)$ et par conséquent $\mathscr{C}_f$ au dessous de $\mathscr{C}_g$
- Dans le cas où $f(x) - g(x) = 0$, il y a intersection

## 2) Exemple

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = -x^2 - 4x - 3$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x - 6$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

………….

pour étudier la position relative de deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, on étudie le signe de la différence $f(x) - g(x)$.
Pour tout réel $x$, $f(x) - g(x) = -2x^2 + 4x + 6 + 2x - 10 = -2x^2 + 6x - 4$
On doit donc étudier le signe de ce trinôme
…..Ce trinôme admet pour racines $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$
D'où le tableau de signes et de conséquences :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de la différence $f(x) - g(x)$ | $-$ | | $0$ | | $-$ |
| Conséquences | $\mathscr{C}_f$ en dessous de $\mathscr{C}_g$ | | $\mathscr{C}_f$ au dessus de $\mathscr{C}_g$ | | $\mathscr{C}_f$ en dessous de $\mathscr{C}_g$ |

Intersection

intersection