*Cours ETUDE DES FONCTIONS avec exemples et exercices avec solutions*

PROF: ATMANI NAJIB 1BAC BIOF

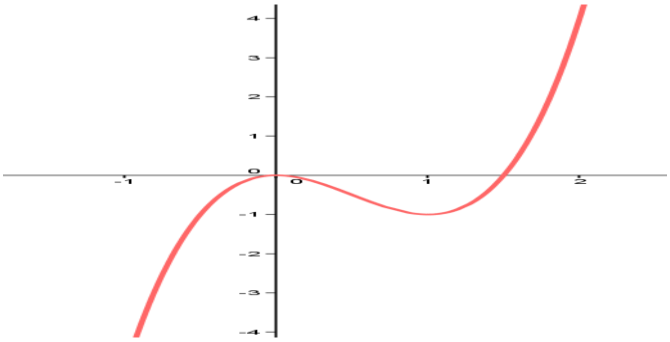
# ETUDE DES FONCTIONS

## I) CONCAVITE ; CONVEXITE ; POINTS D'INFLEXION

1) Activité :Soit la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = 2x^3 - 3x^2$

1. Déterminer les dérivées première et seconde de la fonction $g$.
2. Dresser le tableau de signe de $g''(x)$.

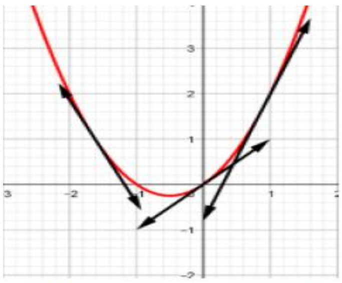


3. La courbe représentative de $g$ est représentée ci-contre
Étudier graphiquement La position relative de la courbe $cg$ par rapport à ses tangentes.
4. Que peut-on conclure ?

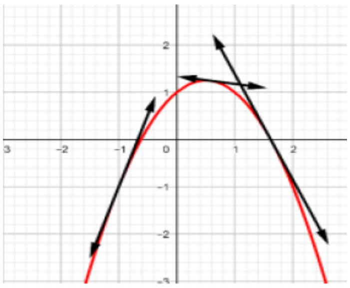
### 2) Définition et propriétés.

#### 2.1 Définitions :

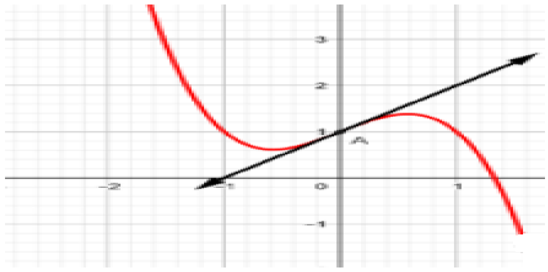
**Définition :** Soit $f$ une fonction dont la courbe représentative est $C_f$.
1) On dit que la courbe est convexe si elle se trouve au-dessus de toutes ses tangentes
2) On dit que la courbe est concave si elle se trouve au-dessous de toutes ses tangentes.
3) Un point d'inflexion est un point où s'opère un changement de concavité de la courbe $C_f$



Graphe d'une fonction convexe



Graphe d'une fonction concave



Point d'inflexion en $A$

**Remarque :**Si $f$ est dérivable en $a$ et $C_f$ traverse sa tangente en $A$ alors le point $A$ est un point d'inflexion

#### 2.2 Dérivée seconde et concavité.

**Théorème :** Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle$I$.
1) Si $f''$ est positive sur $I$ alors $C_f$ est convexe sur $I$.
2) Si $f''$ est négative sur $I$ alors $C_f$ est concave sur $I$.
3) Si $f''$ s'annule en $\boldsymbol{a}$ en changeant de signe alors $C_f$ admet un point d'inflexion en $A(a, f(a))$

**Remarque :**Les conditions du théorème précèdent sont suffisantes ; on peut avoir une courbe convexe, concave ou un point D'inflexion sans l'existence même de la dérivée seconde.

**Exemple :** Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3}$$

1. Déterminer les dérivées première et seconde de la fonction f.
2. Dresser le tableau de signe de f''$(x)$.et étudier la concavité de la courbe de f et déterminer les points d'inflexions s'ils existent

**Solution :1)**

$$f'(x) = \left(\frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3}\right)' = \frac{1}{12}4 \times x^3 - 4x + 1 = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x + 1\right)' = x^2 - 4$$

2) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -2 ou x = 2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-4$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$(C_f)$ est convexe sur $]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$

$(C_f)$ est concave sur $[-2,2]$ et $A(1, f(1))$ et $B(-1, f(-1))$ sont les points d'inflexions de $(C_f)$

**Exercice1 :** Soit la fonction f définie sur $I=[0;\pi]$ par : $f(x)=\sin^2 x$ Étudier la concavité de la courbe de f et déterminer les points d'inflexions s'ils existent sur $I$

**Solution :** $\forall x\in[0;\pi]$

$$f'(x)=\left(\sin^2 x\right)'=2(\sin x)'(\sin x)^{2-1}=2\cos x\sin x$$

$$f'(x)=\sin 2x \Rightarrow f''(x)=2\cos 2x \quad \forall x\in[0;\pi]$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \cos 2x=0 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$$

Et $k\in\mathbb{Z}$ donc les solutions sont : $x=\frac{\pi}{4}$ et $x=\frac{3\pi}{4}$

$$x\in[0;\pi]\Rightarrow 2x\in[0;2\pi]$$

| $2x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{3\pi}{2}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos 2x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

On a donc :

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{3\pi}{4}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Donc : $(C_f)$ est convexe sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$

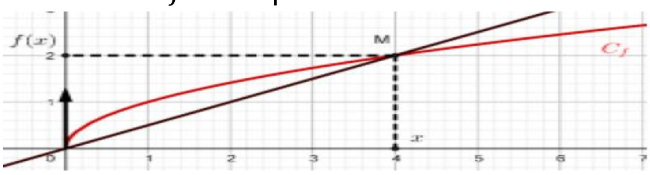
$(C_f)$ est concave sur $\left[\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ et $A\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$ et $B\left(\frac{3\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$ sont les points d'inflexions de $(C_f)$

## *II) DEMI-TANGENTE VERTICALE*

**Introduction :** Soit $f$ la fonction définie sur ℝ+ par : $(\forall x \in$ ℝ+$)$ $f(x)=\sqrt{x}$

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

La fonction $f$ n'est pas dérivable à droite de 0.



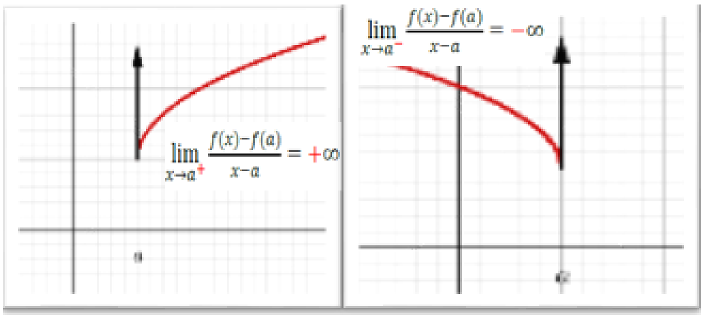

Soient $x\neq 0$ et $M(x, f(x))$ un point de la courbe $C_f$ la droite $(OM)$ à pour coefficient directeur $m=\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ donc elle a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(1;\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et le vecteur $\vec{v}\left(\sqrt{x};1\right)$ est aussi vecteur directeur de la droite $(OM)$ si on fait tendre $x$ vers 0 (à droite) La droite $(OM)$ "tend" pour une position limite vers une droite $(T)$ de vecteur directeur $\vec{j}(0;1)$ Donc sera parallèle à l'axe $(Oy)$.

**Propriété :** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a+r[$
Si $f$ est continue à droite de $a$ et

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$$

Alors la courbe $Cf$ admet une demi-tangente verticale à droite de $a$.

**Interprétation géométriques**




**Exemple :** Soit $f$ la fonction définie par : $f(x)=x^2\sqrt{1+x}$

1. étudier la dérivabilité de $f$ a droite en $x_0=-1$.
2. donner une interprétation géométrique

**Solution :** $D_f=[-1,+\infty[$

1) $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x^2\sqrt{1+x}-0}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x^2\sqrt{1+x}}{x+1}$

$$=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2\left(\sqrt{1+x}\right)^2}{(x+1)\sqrt{1+x}}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2(1+x)}{(x+1)\sqrt{1+x}}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

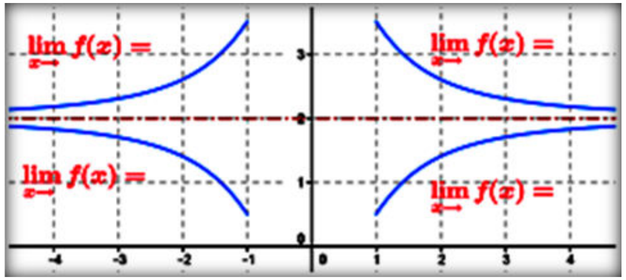
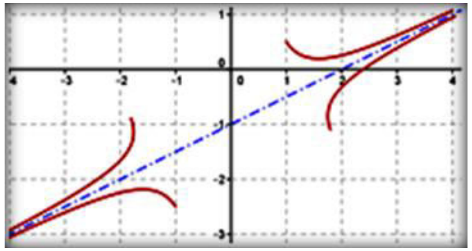
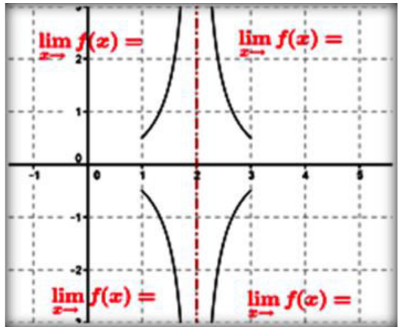
Donc f n'est pas dérivable a droite en $x_0=-1$.

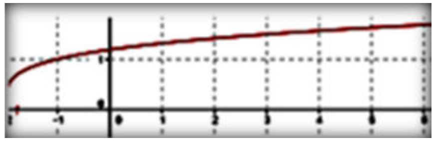
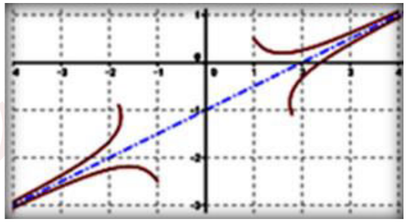
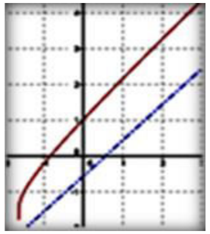
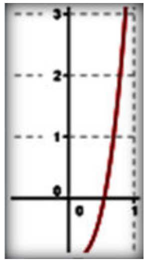
2)Interprétation géométrique :
La courbe $Cf$ admet une demi-tangente verticale à droite du point $A(-1; f(-1))$ dirigée vers le haut

Car : $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=+\infty$ $(+\times+=+)$

## *III)BRANCHES INFINIES.*

## II) BRANCHES INFINIES.

<table>
<tr><td>Si : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=b$</td><td>Si : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$</td><td>Si : $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$</td></tr>
<tr>
<td><br>La droite $(\Delta)$ d’équation $y=b$ est une Asymptôte à $(C_f)$ au voisinage de $\infty$</td>
<td>La droite $(\Delta): y=ax+b$ est une Asymptôte oblique à $(C_f)$<br>signifie que : $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$<br><br>$(C_f)$ est au dessus de $(\Delta) \Leftrightarrow \left(f(x)-(ax+b)\right)>0$<br>$(C_f)$ est en dessous de $(\Delta) \Leftrightarrow \left(f(x)-(ax+b)\right)<0$</td>
<td><br>La droite $(\Delta)$ d’équation $x=a$ est une Asymptôte à $(C_f)$ au voisinage de $a$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">Détermination de la nature de la branche infinie dans le cas : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Si : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=0$</td><td colspan="2">Si : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a\neq 0$</td><td rowspan="2">Si : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-ax\right)=b$</td><td>$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-ax\right)=\infty$</td></tr>
<tr>
<td><br>La courbe $(C_f)$ admet une branche parabolique de direction $(Ox)$</td>
<td><br>La droite $(\Delta)$ d’équation $y=ax+b$ est une Asymptôte à $(C_f)$ au voisinage de $\infty$ .</td>
<td><br>La courbe $(C_f)$ admet une branche parabolique de direction la droite $(D)$, d’équation $y=ax$</td>
<td><br>La courbe $(C_f)$ admet une branche parabolique de direction $(Oy)$</td>
</tr>
</table>

**Exemples :**

**Exemple1 :** Soit $f$ la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{2x-1}{3x-6}$$

déterminer les limites aux bornes de $D_f$ et (Donner une interprétation géométrique des résultats)

**Solution :** $D_f=\mathbb{R}-\{2\}=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

1) $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{2x-1}{3x-6}$

$\lim\limits_{x\to2^+}2x-1=3$ **et** $\lim\limits_{x\to2^+}3x-6=0^+$ **et** $\lim\limits_{x\to2^-}3x-6=0^-$

| $x$ | $-\infty$ 2 $+\infty$ |
|---|---|
| $3x-6$ | $-$ 0 $+$ |

**Donc :** $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=-\infty$

*Interprétation géométrique des résultats :*

La droite (Δ): $x=2$ est une asymptote vertical a la courbe $C_f$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{3x-6}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{3x-6}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$

*Interprétation géométrique des résultats :*

La droite (Δ): $y=\frac{2}{3}$ est une asymptote horizontal a la courbe $C_f$

**Exemple2 :**

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

On a : $f(x)=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\frac{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=1$$

($|x|=x$ car $x\to+\infty$)

La droite (Δ): $y=1$ est une asymptote horizontal a la courbe $C_f$ au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=-1$$

La droite (Δ'): $y=-1$ est une asymptote horizontal a la courbe $C_f$ au voisinage de $-\infty$

**Exemple3 : :** Soit $f$ la fonction définie par :

$\forall x\in\mathbb{R}^*$ : $f(x)=2+\frac{x-1}{x^2}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ car :

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

Donc : La droite (Δ): $y=2$ est une asymptote horizontal a la courbe $C_f$ au voisinage de $\infty$

étudions la position de courbe $(C_f)$ et la droite $(\Delta)$ ?

$f(x)-2=\frac{x-1}{x^2}$ le signe et celui de $x-1$

| $x$ | $-\infty$ | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)-2$ | $-$ | ‖ | $-$ 0 $+$ | |

Donc la courbe $C_f$ est au-dessous de (Δ): $y=2$

Sur l'intervalle $]-\infty;0[\cup]0;1[$ et la courbe $C_f$ est au-dessus de (Δ): $y=2$ Sur l'intervalle $]1;+\infty[$

$C_f$ coupe (Δ) au point $I(1;2)$

**Exemple4:** Soit $f$ la fonction définie par :

$\forall x\in\mathbb{R}^*-\{3\}$ : $f(x)=2x-1+\frac{1}{x-3}$

montrer que la courbe $C_f$ que la fonction $f$ admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$ que l'on déterminera

**Solution** $f(x)=2x-1+\frac{1}{x-3}\Leftrightarrow f(x)-(2x-1)=\frac{1}{x-3}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(2x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-3}=\frac{1}{+\infty}=0$

Donc : la droite (Δ): $y=2x-1$ est une asymptote oblique à la courbe $C_f$ au voisinage de $+\infty$

Et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(2x-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-3}=0$

Donc : la droite (Δ): $y=2x-1$ est une asymptote oblique à la courbe $C_f$ au voisinage de $-\infty$

**Exemple5 :**Soit la fonction définie par :

$f(x)=\sqrt{x}$ étudier les branches paraboliques au voisinage de $+\infty$

**Solution :** On a : $Df = \mathbb{R}+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Donc la courbe $C_f$ admet une branche parabolique vers l'axe $(Ox)$ au voisinage de $+\infty$

**Exemple6 :** Soit la fonction définie par :

$f(x) = x^3$ étudier les branches paraboliques au voisinage de $+\infty$

**Solution :** On a : $Df = \mathbb{R}+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

Donc la courbe $C_f$ admet une branche parabolique vers l'axe $(Oy)$ au voisinage de $+\infty$

**Exemple7:** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$f(x) = x + \sqrt{x}$

**Solution :** On a : $Df = \mathbb{R}+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$

Mais $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 1x = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$

Donc la courbe de la fonction admet une branche parabolique vers la droite $(\Delta)$: $y = x$.

**Propriété :** Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $+\infty$. La droite $(\Delta)$: $y = ax + b$ ($a \neq 0$ ) est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ si et seulement si :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a$ $(a \neq 0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$

**Preuve :** D'après la propriété précédente : On peut écrire $f(x) = ax + b + h(x)$ où $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax+b+h(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} a + \frac{b}{x} + \frac{h(x)}{x} = a$

D'autre part : $f(x) - ax = b + h(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$

**Exemple:** Soit $f$ la fonction définie par :

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$

1)Déterminer $D_f$

2) montrer que la courbe $C_f$ que la fonction $f$ admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$ que l'on déterminera

**Solution :1)** On a : $x^2+1 \succ 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

donc $D_f = \mathbb{R}$

2)a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1} = +\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$ $|x| = x$ car $x \to +\infty$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1 = a$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 1x = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1} - x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$

Donc : la droite $(\Delta)$: $y = 1x$ est une asymptote oblique à la courbe $C_f$ au voisinage de $+\infty$

b)De même on a :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1} = +\infty$

Et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$ $|x| = -x$ car $x \to -\infty$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -1 = a$

Et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + 1x = \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1} + x$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$

Donc : la droite $(\Delta)$: $y = -x$ est une asymptote oblique à la courbe $C_f$ au voisinage de $-\infty$

## IV) LES ELEMENTS DE SYMETRIE D'UNE COURBE.

### 1) Axe de symétrie :

**Activité :** Soit la fonction

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto\sqrt{2x^2-4x-6}$

1. Déterminer $D_f$ ensemble de définition de la fonction $f$.
2. Montrer que $(\forall x\in D_f)\ (2-x\in D_f)$
3. Montrer que $(\forall x\in D_f)\ (f(2-x)=f(x))$

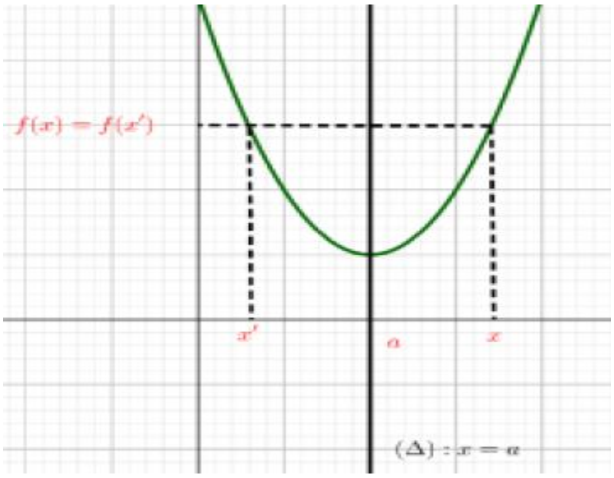
**Propriété :** Soit $f$ une fonction numérique dont l'ensemble de définition est $D_f$.

La droite $(\Delta)$: $x=a$ est un axe de symétrie de la courbe $C_f$ si et seulement si :

a)$(\forall x\in D_f)(2a-x\in D_f)$

b)$(\forall x\in D_f)(f(2a-x)=f(x))$

**Preuve :** Soit $x$ un élément de $D_f$ et $A(x,0)$, si $A'(x',0)$ est le symétrique




de $A$ par rapport à $(\Delta)$ $x=a$ alors

$\frac{x+x'}{2}=a$ ($a$ est le centre de l'intervalle de bornes $x$ et $x'$ )

d'où : $x'=2a-x$ et puisque $(\Delta)\perp(AA')$ alors $f(x)=f(x')$ ce que signifie : $f(2a-x)=f(x)$

**Exemple:** Soit $f$ la fonction définie par :

$f(x)=\sqrt{x-x^2}$

1)Déterminer $D_f$

2) montrer que la La droite $(\Delta)$: $x=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe $C_f$

**Solution :1)**On a : $f(x)=\sqrt{x-x^2}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-x^2\ge 0\}$

$x-x^2=0\Leftrightarrow x(1-x)=0\Leftrightarrow x=1 ou x=0$

Tableau de signe :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-x^2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

donc : $D_f=[0,1]$

2)a) montrons que : si $x\in D_f=[0,1]$ alors $1-x\in D_f$ ?

$x\in D_f=[0,1]\Rightarrow 0\le x\le 1\Rightarrow -1\le -x\le 0\Rightarrow 1-1\le 1-x\le 1$

Donc : $x\in D_f\Rightarrow 0\le 1-x\le 1\Rightarrow 1-x\in D_f$

b) montrons que : $f(1-x)=f(x)$ ؟؟؟؟

$f(1-x)=\sqrt{(1-x)-(1-x)^2}=\sqrt{1-x-(1-2x+x^2)}$

$=\sqrt{1-x-1+2x-x^2}=\sqrt{x-x^2}=f(x)$

Donc : La droite $(\Delta)$: $x=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe $C_f$

**Exercice2:** Soit $f$ la fonction définie par :

$f(x)=3x^2-2x+5$

montrer que la La droite $(\Delta)$: $x=\frac{1}{3}$ est un axe de symétrie de la courbe $C_f$

**Solution :** On a : $D_f=\mathbb{R}$

a) si $x\in D_f=\mathbb{R}$ alors $\frac{2}{3}-x\in\mathbb{R}$

b) montrons que : $f\left(\frac{2}{3}-x\right)=f(x)$ ؟؟؟؟

$f\left(\frac{2}{3}-x\right)=3\left(\frac{2}{3}-x\right)^2-2\left(\frac{2}{3}-x\right)+5$

$=3x^2-2x+5=f(x)$

Donc : La droite $(\Delta)$: $x=\frac{1}{3}$ est un axe de symétrie de la courbe $C_f$

**Exercice3:** Soit $f$ la fonction définie par :

$f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3}$

montrer que la La droite $(\Delta)$: $x=2$ est un axe de symétrie de la courbe $C_f$

**Solution :** On a : $D_f=\mathbb{R}-\{1;3\}$

a) si $x\in\mathbb{R}-\{1;3\}$ alors $4-x\in\mathbb{R}-\{1;3\}$ en effet :

$x\in\mathbb{R}-\{1;3\}\Rightarrow x\ne 1$ et $x\ne 3$

$\Rightarrow -x \neq -1$ et $-x \neq -3 \Rightarrow 4-x \neq 4-1$ et $4-x \neq 4-3$
$\Rightarrow 4-x \neq 3$ et $4-x \neq 1$ alors $4-x \in \mathbb{R}-\{1;3\}$

b) montrons que : $f(4-x)=f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}-\{1;3\}$ ????

$$f(4-x)=\frac{1}{4-x-1}-\frac{1}{4-x-3}=\frac{1}{3-x}-\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3}$$

donc $f(4-x)=f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}-\{1;3\}$

donc la droite (Δ): $x=2$ est un axe de symétrie de la courbe $C_f$

**Exercice4:** Soit $f$ la fonction définie par :

$f(x)=\cos x$

montrer que la La droite (Δ): $x=k\pi$ ; $k\in\mathbb{Z}$ est un axe de symétrie de la courbe $C_f$

**Solution :** On a : $D_f=\mathbb{R}$

a) si $x\in\mathbb{R}$ alors $2k\pi-x\in\mathbb{R}$

b) montrons que : $f(2k\pi-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$ ????

$$f(2k\pi-x)=\cos(2k\pi-x)=\cos(-x)=\cos x$$

donc $f(2k\pi-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$

donc la droite (Δ): $x=k\pi$ ; $k\in\mathbb{Z}$ est un axe de symétrie de la courbe $C_f$

## 2) Centre de symétrie.

**Propriété :** Soit $f$ une fonction numérique dont l'ensemble de définition est $D_f$.

Le point $\Omega(a,\ b)$ est un centre de symétrie de la courbe $C_f$ si et seulement si :

a) $(\forall x \in D_f)(2a-x\in D_f)$

b) $(\forall x \in D_f)(f(2a-x)=2b-f(x))$

**Preuve :** $\Omega(a,\ b)$ étant centre de symétrie de la courbe $C_f$, si $M(x,\ f(x))$ est un point de $C_f$ alors sont symétrique $M'$ par rapport à Ω est un point de $C_f$. soit $M'(x',\ f'(x))$ on a : $\frac{x+x'}{2}=a$

et $\frac{f(x)+f(x')}{2}=2b$

car $a$ est le centre de l'intervalles de bornes $x$ et $x'$ et $b$ est le centre de L'intervalles de bornes $f(x)$ et $f(x')$ Par suite : $x'=2a-x$ et $f(x')=2b-f(x)$

et finalement : $f(2a-x)=2b-f(x)$

**Exemple:** Soit $f$ la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{x^2-x}{x+1}$$

1) montrer que : $\forall \in D_f$ : $f(x)=x-2+\frac{2}{x+1}$

2)montrer que le point $\Omega(-1;-3)$ est un centre de symétrie de $(C_f)$

**Solution :** 1) On a : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

$$x-2+\frac{2}{x+1}=\frac{(x-2)(x+1)+2}{x+1}=\frac{x^2-x}{x+1}=f(x)$$

2)a) montrons que si $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ alors $-2-x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ en effet :

$x\in\mathbb{R}-\{-1\}\Leftrightarrow x\neq-1\Leftrightarrow -x\neq 1\Leftrightarrow -2-x\neq-2+1$
$\Leftrightarrow -2-x\neq -1\Leftrightarrow -2-x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

b) montrons que : $f(-2-x)+f(x)=-6=2b$ ??

$$f(-2-x)+f(x)=-2-x-2+\frac{2}{-2-x+1}+x-2+\frac{2}{x+1}$$
$$=-6+\frac{2}{-x-1}+\frac{2}{x+1}=-6-\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x+1}=-6$$

donc $f(-2-x)+f(x)=-6=2b\ \forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

donc le point $\Omega(-1;-3)$ est un centre de symétrie de $(C_f)$

**Exercice5 :** Soit $f$ la fonction définie par :

$f(x)=\sin x-\cos x$

montrer que le point $\Omega\left(\frac{\pi}{4};0\right)$ est un centre de symétrie de $(C_f)$

**Solution :**

a) on a si $x\in\mathbb{R}$ alors $2\frac{\pi}{4}-x=\frac{\pi}{2}-x\in\mathbb{R}$

b) montrons que : $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\times0-f(x)$ ??

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x-\sin x$$

donc $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\times0-f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$

donc le point $\Omega\left(\frac{\pi}{4};0\right)$ est un centre de symétrie de $(C_f)$

**Exercice6 :** Soit $f$ la fonction définie par :

$f(x)=\sqrt{4x^2+2x-2}$

1)Déterminer $D_f$

2) Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$

3) calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

4) montrer que la courbe $C_f$ que la fonction $f$ admet une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ que l'on déterminera

**Solution :** 1) $D_f = \left\{x\in\mathbb{R} / 4x^2+2x-2\geq 0\right\}$

$4x^2+2x-2=0 \Leftrightarrow 2x^2+x-1=0$

$\Delta = b^2-4ac=(1)^2-4\times2\times(-1)=1+8=9=(3)^2>0$

$x_1=\frac{-1+3}{2\times2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ **et** $x_2=\frac{-4}{4}=-1$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1/2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x^2+2x-2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Donc : $D_f = ]-\infty;-1]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

$4x^2+2x-2\succ0 \Leftrightarrow \forall x\in]-\infty;-1[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

Donc :

$$f'(x)=\left(\sqrt{4x^2+2x-2}\right)'=\frac{\left(4x^2+2x-2\right)'}{2\sqrt{4x^2+2x-2}}=\frac{8x+2}{2\sqrt{4x^2+2x-2}}$$

$$f'(x)=\frac{4x+1}{\sqrt{4x^2+2x-2}}\quad \forall x\in]-\infty;-1[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$$

3) calculons : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+2x-2}$

On a: $\lim_{x\to-\infty} 4x^2+2x-2=\lim_{x\to-\infty}4x^2=+\infty$

Donc : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x-2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{2x}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)}}{x}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x}$ $x\to-\infty$ donc $|x|=-x$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}=-\sqrt{4}=-2=a$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+2x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+2x-2}+2x=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+2x-2}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+2x-2}-2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+2x-2}-2x\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+2x-2-4x^2}{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}+2\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{-\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}+2\right)}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}=b$$

Donc : donc la droite $y=-2x-\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ a la courbe $C_f$

**Exercice7 :**Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=x^3-3x+3$

1) Déterminer les limites de $f$ aux bornes de $D_f$

2) étudier les branches infinies de la courbe $(C_f)$

3) dresser le tableaux de variation de $f$

4) Étudier la concavité de la courbe de $(C_f)$ et déterminer les points d'inflexions s'ils existent sur $\mathbb{R}$

5)montrer que le point $I(0;3)$ est un centre de symétrie de $(C_f)$ et déterminer l'équation de la tangente $(T)$ a la courbe $(C_f)$ en $I(0;3)$

6) on utilisant le tableaux de variation de $f$ monter que l'équation : $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$ tel que : $\alpha\prec-1$ et vérifier que $-2.2\prec\alpha\prec-2.1$ et déterminer le signe de $f(x)$

7) Tracer la courbe $Cf$ et discuter suivant les valeurs du paramètre $m$ le nombre de solutions de l'équation : $x^3-3x+3=m$

**Solution :** 1) On a : $D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$ car f est une fonction polynôme

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^3-3x+3=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^3-3x+3=\lim_{x\to+\infty}x^3=-\infty$

2) étude des branches infinies de la courbe $(C_f)$:

$\frac{f(x)}{x}=\frac{x^3-3x+3}{x}=x^2-3+\frac{3}{x}\quad \forall\in\mathbb{R}^*$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}x^2-3+\frac{3}{x}=+\infty$

Et $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}x^2-3+\frac{3}{x}=+\infty$

Donc la courbe $C_f$ admet une branche parabolique vers l'axe $(\boldsymbol{O}y)$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

3) le tableaux de variation de $f$ ?

$\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = (x^3 - 3x + 3)' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-1)(x+1)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

4) Étude de la concavité de la courbe de $(C_f)$ ?

$\forall x \in \mathbb{R}$ ; $f'(x) = 3(x^2 - 1)$ donc : $f''(x) = 6x$

le tableaux de signe de $f''(x)$ est :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

Donc : $(C_f)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$

$(C_f)$ est concave sur $\mathbb{R}_-^*$ et $f''(x)$ s'annule en changeant de signe 0 donc $I(0,3)$ est un point d'inflexion de $(C_f)$

5)montrons que le point $I(0;3)$ est un centre de symétrie de $(C_f)$ ?

a) on a si $x \in \mathbb{R}$ alors $2\times 0 - x = -x \in \mathbb{R}$

b) montrons que : $f(-x) = 2\times 3 - f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ?

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 3 = -x^3 + 3x + 3$

$2\times 3 - f(x) = 6 - f(x) = 6 - (x^3 - 3x + 3) = -x^3 + 3x + 3$

donc $f(-x) = 2\times 3 - f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ donc le point $I(0,3)$ est un centre de symétrie de $(C_f)$

l'équation de la tangente $(T)$ a la courbe $(C_f)$ en $I(0;3)$ est : $(T): y = f'(0)x + f(0) = -3x + 3$

6) du tableaux de variation de $f$

On deduit que $f$ admet une valeur minimal en 1 sur l'intervalle $[-1;+\infty[$ et c'est : $f(1) = 1$

Donc : $f(x) \geq f(1) = 1$ $\forall x \in [-1;+\infty[$

Et l'image de l'intervalle $]-\infty;-1]$ par f est l'intervalle $]-\infty;5]$ et $0 \in ]-\infty;5]$ donc il existe un $\alpha$ de $]-\infty;-1]$ tel que $f(\alpha) = 0$ et puisque f est strictement croissante sur $]-\infty;-1]$ alors quelque soit $x \neq \alpha$ on a $x \prec \alpha$ ou $\alpha \prec x \prec -1$ donc $f(x) \prec f(\alpha)$ ou $f(\alpha) \prec f(x) \prec f(-1)$

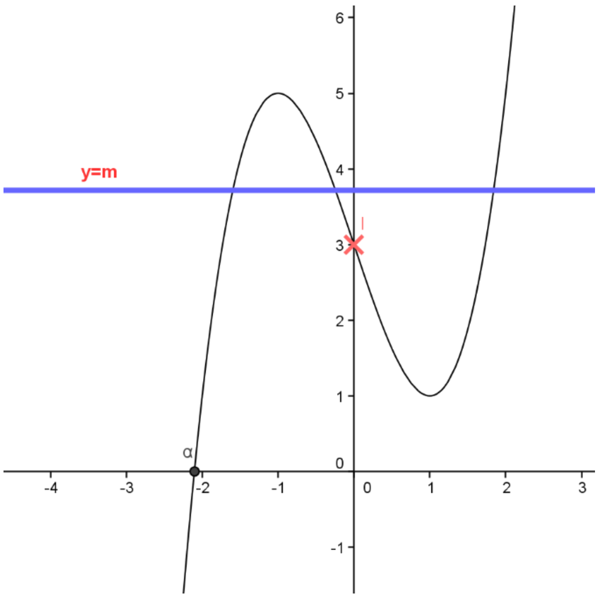
Donc : $f(x) \prec 0$ ou $0 \prec f(x) \leq 5$

Donc : $\forall x \in ]-\infty;-1] - \{\alpha\}$ on a $f(x) \neq 0$ donc $\alpha$ est unique et on utilisant la calculatrice en vérifie que : $f(-2.2) \approx -1.04$ et $f(-2.1) \approx 0.03$

Donc d'après l'étude précèdent on a alors : $-2.2 \prec \alpha \prec -2.1$

On deduit que : $f(x) \succ 0$ $\forall x \in ]\alpha;+\infty]$ et $f(x) \prec 0$ $\forall x \in ]-\infty;\alpha]$

7) Tracer la courbe $Cf$




Remarque : le signe de $f(x)$ partir de $(C_f)$?

a)sur $]-\infty;\alpha]$ $f(x) \leq 0$ car $(C_f)$ est au-dessous de l'axe des abscisses

b)sur $]\alpha;+\infty]$ $f(x) \geq 0$ car $(C_f)$ est au-dessus de l'axe des abscisses

7) $x^3 - 3x + 3 = m \Leftrightarrow f(x) = m$

Les solutions de l'équation : $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersections de $(C_f)$ avec la droite d'équation : $y = m$

| m | $m \in ]5;+\infty[ \cup ]-\infty;1[$ | $m = 1$ ou $m = 5$ | $m \in ]1;5[$ |
|---|---|---|---|
| nombre de solutions | 1 | 2 | 3 |

**Exercice8 :** soit $f$ une fonction définie par :

$f(x)=2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}$

1) déterminer $D_f$ ensemble de définition de $f$

2) étudier les branches infinies de la courbe $(C_f)$

3) étudier la position de courbe $(C_f)$ avec son asymptote horizontal

4) étudier les variations de $f$ et dresser le tableaux de variation de $f$

5) déterminer les points d'intersections de $(C_f)$ avec l'axe des abscisses $f$

6) montrer que la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de $(C_f)$

7) tracer la courbe $(C_f)$

**Solution :** 1) $x\in D_f \Leftrightarrow x\neq 0$ et $x\neq 1$

donc : $D_f=]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$

2) étude des branches infinies de la courbe $(C_f)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=2$

Car : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

La droite (Δ): $y=2$ est une asymptote horizontal a la courbe $C_f$ au voisinage de $\pm\infty$

b) on a $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ et

$\lim\limits_{x\to0} 2-\frac{1}{x-1}=3$

donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$

donc La droite (Δ'): $x=0$ est une asymptote a la courbe $C_f$

c) on a $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{-1}{x-1}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-1}{x-1}=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to1} 2+\frac{1}{x}=3$

donc $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty$

donc La droite (Δ ''): $x=1$ est une asymptote a la courbe $C_f$

3) étude de la position de courbe $(C_f)$ avec son asymptote horizontal : $(\forall x\in D_f)$

$f(x)-2=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-x}{x(x-1)}=\frac{-1}{x(x-1)}$

si $x\in]0;1[$ alors $f(x)-2\succ 0$

Donc la courbe $C_f$ est au- dessus de (Δ): $y=2$

si $x\in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ alors $f(x)-2\prec 0$

Donc la courbe $C_f$ est au-dessous de (Δ): $y=2$

5) déterminons les points d'intersections de $(C_f)$ avec l'axe des abscisses : $(\forall x\in D_f)$

$f(x)=0\Leftrightarrow 2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=0\Leftrightarrow\frac{2x^2-x-1}{x(x-1)}=0$

$2x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ou $x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Donc les points d'intersections de $(C_f)$ avec l'axe des abscisses sont : $A\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};0\right)$ et $B\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};0\right)$

6) montrons que la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de $(C_f)$ :

On a : $D_f=]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$

a) si $x\in D_f$ alors $1-x\in D_f$ en effet :

$x\in\mathbb{R}-\{0;1\}\Rightarrow x\neq 0$ et $x\neq 1$

$\Rightarrow -x\neq 0$ et $-x\neq -1\Rightarrow 1-x\neq 1$ et $1-x\neq 0$

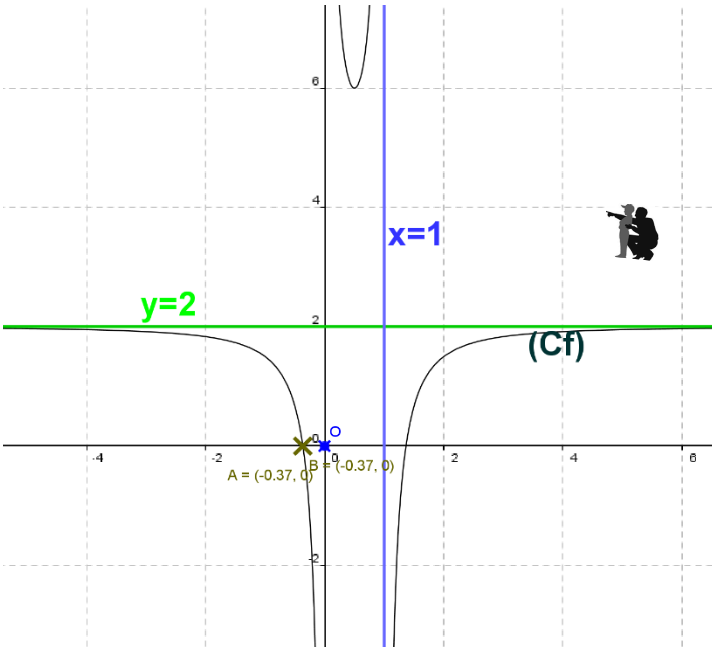
alors $1-x\in\mathbb{R}-\{0;1\}$

b) montrons que : $f(1-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}-\{0;1\}$ ????

$f(1-x)=2+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x-1}=2+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}=2-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}$

donc $f(1-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}-\{0;1\}$

donc la droite $x=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe $C_f$




**Exercice9 :** soit $f$ une fonction définie par :

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-3}$$

1) déterminer les limites aux bornes de $D_f$

2)déterminer les réels a et b tel que :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-3} \quad \forall x\in D_f$$

3) étudier les branches infinies de la courbe $(C_f)$

4) étudier les variations de $f$ et dresser le tableau de variation de $f$

5) montrer que le point $\Omega(3;4)$ est un centre de symétrie de $(C_f)$

6) calculer $f''(x)$ $\forall x\in D_f$ et étudier la concavité de la courbe de $f$

7) étudier la position de courbe $(C_f)$ et son asymptote oblique $(\Delta)$

8) Déterminer les points d'intersection de la courbe $(C_f)$ avec les axes du repére

9) déterminer l'équation de la tangente $(T)$ a la courbe $(C_f)$ en $x_0=2$

9) tracer la courbe $(C_f)$

**Solution :** 1) $x\in D_f \Leftrightarrow x\neq 3$

donc : $D_f=\mathbb{R}-\{3\}=]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-2x+1}{x-3}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-2x+1}{x-3}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

2)on fait la division euclidienne de $x^2-3x+6$ par $x-3$ on trouve : $x^2-2x+1=(x-3)(x+1)+4$

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-3}=\frac{(x-3)(x+1)+4}{x-3}=x+1+\frac{4}{x-3}$$

Donc : $a=1$ et $b=1$ et $c=4$

3)Les branches infinies de la courbe $(C_f)$

a) $\lim_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$

donc La droite $x=3$ est une asymptote a la courbe $C_f$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

on a : $f(x)=x+1+\frac{4}{x-3} \Leftrightarrow f(x)-(x+1)=\frac{4}{x-3}$

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x-3}=\frac{4}{+\infty}=0$

Donc : la droite $y=x+1$ est une asymptote oblique à la courbe $C_f$ au voisinage de $+\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x-3}=\frac{4}{-\infty}=0$

Donc : la droite $y=x+1$ est une asymptote oblique à la courbe $C_f$ au voisinage de $-\infty$

4) les variations de $f$ et le tableau de variation ?

$$\forall x\in\mathbb{R}-\{3\}: f'(x)=\left(x+1+\frac{4}{x-3}\right)'=1-\frac{4}{(x-3)^2}=\frac{(x-3)^2-4}{(x-3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x-3)^2-2^2}{(x-3)^2}=\frac{(x-3-2)(x-3+2)}{(x-3)^2}=\frac{(x-5)(x-1)}{(x-3)^2}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-5)(x-1)$

$(x-5)(x-1)=0 \Leftrightarrow x-5=0$ ou $x-1=0 \Leftrightarrow x=5$ ou $x=1$

Le tableau de signe :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Le tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ $\|\|$ $+\infty$ | $\searrow$ | $8$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

5) Montrons que le point $\Omega(3;4)$ est un centre de symétrie de $(C_f)$ ??

a) Montrons que si $x\in\mathbb{R}-\{3\}$ alors $6-x\in\mathbb{R}-\{3\}$ ?

$x\in\mathbb{R}-\{3\}\Leftrightarrow x\neq 3\Leftrightarrow -x\neq -3\Leftrightarrow 6-x\neq 3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6-x\in\mathbb{R}-\{3\}$

b) Montrons que : $f(6-x)+f(x)=8=2b$ ?

$f(6-x)+f(x)=6-x+1+\frac{1}{6-x-3}+x+1+\frac{1}{x-3}$

$=8+\frac{1}{-x+3}+\frac{1}{x-3}=8-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-3}=8$

Donc : $\Omega(3;4)$ est un centre de symétrie de $(C_f)$

6) étudie la concavité de la courbe de $f$ ?

$\forall x\in D_f$ : $f'(x)=1-\frac{4}{(x-3)^2}$

Donc : $f''(x)=\frac{2(x-3)4}{(x-3)^4}=\frac{8(x-3)}{(x-3)^4}$

Le signe de $f''(x)$ est celui de $x-3$

Si $x\succ 3$ $(C_f)$ est convexe

Si $x\prec 3$ $(C_f)$ est concave

7) $f(x)-(x+1)=\frac{4}{x-3}$

Si $x\succ 3$ alors $f(x)-(x+1)\succ 0$

Donc la courbe $C_f$ est au- dessus de (Δ

Si $x\succ 3$ alors $f(x)-(x+1)\prec 0$

Donc la courbe $C_f$ est au-dessous de (Δ

8) a) intersections avec l'axe des abscisses

$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^2-2x+1}{x-3}=0\quad\forall x\in\mathbb{R}-\{3\}$ :

$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\qquad \Delta=b^2-4ac=4-4\times1\times1=0$

$x=\frac{-b}{2a}=1$ **donc** le point d'intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des abscisses est $A(1;0)$

a) intersections avec l'axe des ordonnées

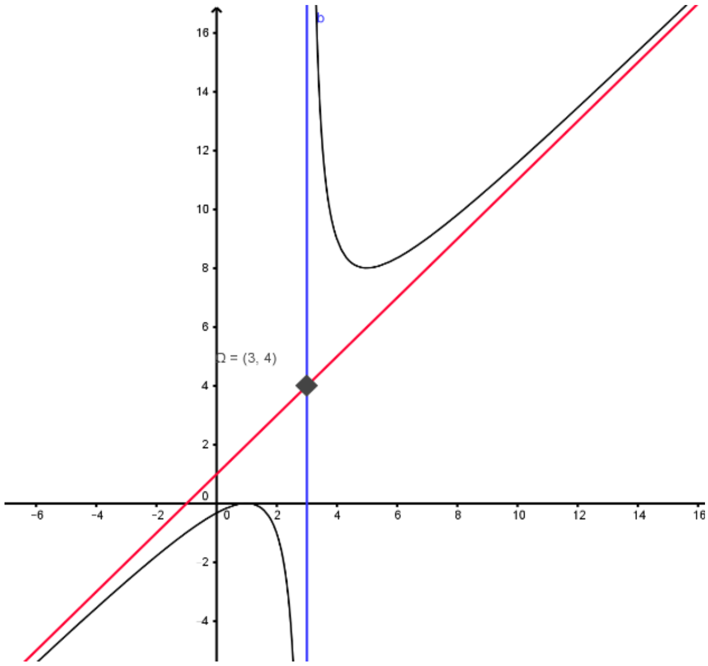
$f(0)=-\frac{1}{3}$ **donc** le point d'intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des ordonnées est $C\left(0;-\frac{1}{3}\right)$

9) l'équation de la tangente $(T)$ a la courbe $(C_f)$ en $x_0=2$ est $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$f'(2)=\frac{(2-5)(2-1)}{(2-3)^2}=\frac{-3}{1}=-3$ et $f(2)=\frac{2^2-2\times2+1}{2-3}=-1$

$y=f(2)+f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=-1-3(x-2)\Leftrightarrow y=-3x+5$

9)La courbe $(C_f)$ :




**Exercice 10:** Soit $f$ la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$

1)Déterminer $D_f$

2) Déterminer les limites aux bornes de $D_f$

3) étudier les branches infinies de la courbe $(C_f)$

4) étudier la dérivabilité de $f$ adroite de 2 et à gauche de -1

5) étudier les variations de $f$ et dresser le tableaux de variation de $f$

6) tracer la courbe $(C_f)$

**Solution :**1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2-x-2\geq$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times2\times(-1)=1+8=9=(3)^2>0$

$x_1=-1$ **et** $x_2=2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-x-2$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Donc : $D_f=]-\infty;-1]\cup[2;+\infty[$

2) on a : $\forall x\in D_f-\{0\}$

$f(x)=\sqrt{x^2-x-2}=|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}$

Et puisque : $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=1$ et $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=1$

Alors : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

3) étude des branches infinies de la courbe $\left(C_f\right)$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x-2}+x\right)\left(\sqrt{x^2-x-2}-x\right)}{\sqrt{x^2-x-2}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-2}{\sqrt{x^2-x-2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2}$$

Donc : la droite $y=x-\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe $C_f$ au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x-2}+x\right)\left(\sqrt{x^2-x-2}-x\right)}{\sqrt{x^2-x-2}-x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x-2}{\sqrt{x^2-x-2}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1-\frac{2}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-1}=\frac{1}{2}$$

Donc : la droite $y=-x+\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe $C_f$ au voisinage de $-\infty$

4) étudie de la dérivabilité de $f$ adroite de 2 et à gauche de -1

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-x-2}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to-1^-}\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x-2}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x-2}}=+\infty$$

Donc $f$ n'est pas dérivable à droite de 2 et à gauche de -1

Alors la courbe $Cf$ admet une demi-tangente verticale aux points $A(-1.0)$ et $B(2.0)$

5) étude des variations de $f$ et le tableaux de variation de $f$ ?

$x^2-x-2\succ 0 \Leftrightarrow \forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]2;+\infty\right[$

Donc :

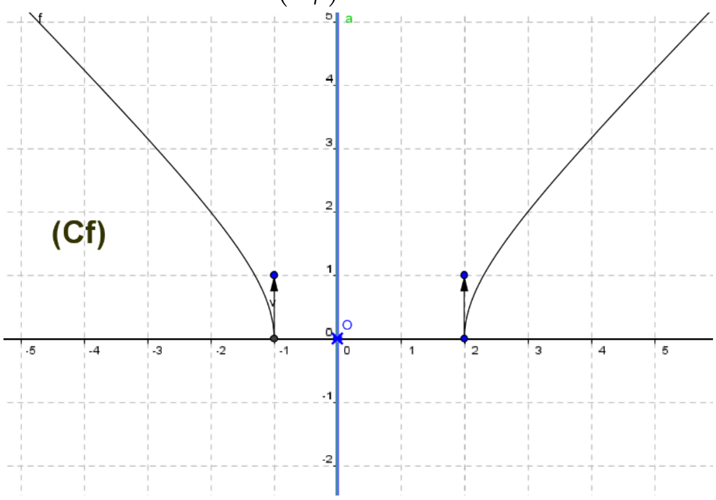
$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)'=\frac{\left(x^2-x-2\right)'}{2\sqrt{x^2-x-2}}=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$$

$$f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}\quad\forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de : $2x-1$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | | | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

6) tracer la courbe $\left(C_f\right)$




**Exercice11:** soit $f$ une fonction définie par :

$$f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

1) déterminer $D_f$ ensemble de définition de $f$

2) montrer que $f$ est périodique de période $T=\pi$ et en déduire le domaine d'étude de $f$

3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de variation de $f$

4) tracer la courbe $\left(C_f\right)$ sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$

**Solution :**

1) $D_f=\mathbb{R}$

2)a)si $x\in\mathbb{R}$ alors $\pi+x\in\mathbb{R}$

b)

$$f(\pi+x)=2\cos\left(2(\pi+x)+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(2x+2\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(\pi+x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=f(x)$$

Donc : $f$ est périodique de période $T=\pi$

Remarque : la fonction : $x\to\cos(ax+b)$ est périodique de période $T=\frac{2\pi}{|a|}$ si $a\neq0$

Un domaine d'étude de $f$

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T=\pi$

donc par exemple : $D_E=[0;\pi]$

3) $f'(x)$ et le tableaux de variation de $f$ ?

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = 2\times -2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = -4\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E = [0;\pi]$

$$x \in [0;\pi] \Leftrightarrow 0 \le x \le \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \le 2x+\frac{\pi}{4} \le \frac{9\pi}{4}$$

On utilisant le cercle trigo en deduit le signe de $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

Le tableau de signe de $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ est :

| $2x+\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{4}$ | | $\pi$ | | $2\pi$ | | $\frac{9\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

le tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $0$ | | $\frac{3\pi}{4}$ | | $\frac{7\pi}{8}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $\sqrt{2}$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $\sqrt{2}$ |

4) du tableau de variation de $f$ :on deduit que Que $f$ change de signe en sur les intervalles $\left[0;\frac{3\pi}{8}\right]$ et $\left[\frac{3\pi}{8};\frac{7\pi}{8}\right]$ cad $(C_f)$ coupe l'axe des abscisses

On va résoudre dans $I = \left[0;\frac{7\pi}{8}\right]$ l'équation :

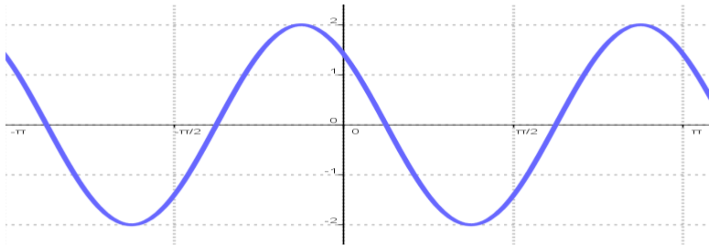
$f(x) = 0$

On a : $\begin{cases} f(x)=0 \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \\ \frac{\pi}{4} \le 2x+\frac{\pi}{4} \le \frac{9\pi}{4} \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2} ou 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2} \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8} ou. x=\frac{5\pi}{8}$$

On trace la courbe $(C_f)$ sur l'intervalle $D_E = [0;\pi]$

Et on deduit le reste par les translations de vecteurs $k\pi\vec{i}$ $k \in \mathbb{Z}$



**Exercice12:** soit $f$ une fonction définie par :

$f(x) = 4\sin x + \cos 2x$

1) déterminer $D_f$ ensemble de définition de $f$

2) montrer que $f$ est périodique de période $T = 2\pi$ et en déduire le domaine d'étude de $f$

3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de variation de $f$

4)donner l'équation de la tangente $(T)$ a la courbe de $f$ en en $x_0 = 0$

5) calculer $f''(x)$ en fonction de $\sin x$

6)déterminer les points d'inflexions de la courbe $(C_f)$

7) tracer la courbe $(C_f)$ sur l'intervalle $[-2\pi;4\pi]$

**Solution :**1) $D_f = \mathbb{R}$

2)a)si $x \in \mathbb{R}$ alors $2\pi + x \in \mathbb{R}$

b) $f(2\pi + x) = 4\sin(x+2\pi) + \cos(2(x+2\pi))$

$f(2\pi + x) = 4\sin x + \cos(2x) = f(x)$

Donc : $f$ est périodique de période $T = 2\pi$

<u>Un domaine d'étude de $f$</u>

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T = 2\pi$

donc par exemple : $D_E = [0;2\pi]$

$f$ est dérivable sur $D_E = [0;2\pi]$ et $\forall x \in D_E$

on a :

$f'(x) = 4\cos x - 2\sin(2x) = 4\cos x - 4\cos x \sin x$

$f'(x) = 4\cos x(1-\sin x)$

Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E = [0;2\pi]$

On a : $1 - \sin x \ge 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x(1-\sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0.ou.1-\sin x = 0$

$1-\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ Donc :

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{3\pi}{2}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-5$ | $\nearrow$ | $1$ |

4) l'équation de la tangente $(T)$ a la courbe de $f$ en en $x_0=0$ est : $y=f(0)+f'(0)(x-0)$

Avec : $f'(0)=4$ et $f(0)=1$ donc : $y=4x+1$

5) calcule de $f''(x)$ en fonction de $\sin x$ :

On a $f'(x)=4\cos x-2\sin(2x)$

**Donc :** $\forall x\in\mathbb{R}$

$$f''(x)=-4\sin x-4\cos(2x)=-4\sin x-4\left(1-2\sin^2 x\right)$$

$$f''(x)=8\sin^2 x-4\sin x-4=4\left(\sin^2 x-\sin x-1\right)$$

Etude du signe de $f''(x)$ sur $D_E=[0;2\pi]$

On pose : $X=\sin x$ donc : $X\in[-1;1]$ et l'équation $\sin^2 x-\sin x-1=0$ devient : $X^2-X-1=0$

$\Delta=9$ les solutions sont : $X_1=-\frac{1}{2}$ et $X_2=1$

Donc : $f''(x)=8(\sin x-1)\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)$

On a : $\sin x-1\le 0\quad \forall x\in\mathbb{R}$

En utilisant le cercle trigo en deduit que :

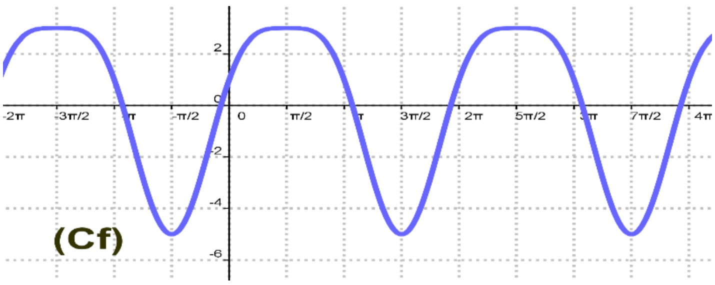
$$\sin x+\frac{1}{2}\le 0\Leftrightarrow \sin x\le -\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\in\left[\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right]$$

| $x$ | $0$ | | $\frac{7\pi}{6}$ | | $\frac{11\pi}{6}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Donc : $(C_f)$ est convexe sur $\left[\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right]$

$(C_f)$ est concave sur $\left[0,\frac{7\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{11\pi}{6};2\pi\right]$ et $A\left(\frac{7\pi}{6},-\frac{3}{2}\right)$ et $B\left(\frac{11\pi}{6},-\frac{3}{2}\right)$ sont les points d'inflexions de $(C_f)$

7) La courbe $(C_f)$ sur l'intervalle $[-2\pi;4\pi]$




**Exercice13:** soit $f$ une fonction définie par :

$$f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}$$

1) déterminer $D_f$ ensemble de définition de $f$

2) montrer qu'il suffit d'étudier $f$ sur $[0;\pi]$

3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de variation de $f$

4) tracer la courbe $(C_f)$ sur l'intervalle $[-2\pi;2\pi]$

**Solution :** 1) $D_f=\mathbb{R}$ car $2+\cos x\ne 0\quad \forall x\in\mathbb{R}$

2) <u>Un domaine d'étude de</u> $f$

a) si $x\in\mathbb{R}$ alors $2\pi+x\in\mathbb{R}$

) $f(2\pi+x)=\frac{\sin(2\pi+x)}{2+\cos(2\pi+x)}=\frac{\sin x}{2+\cos x}=f(x)$

Donc : $f$ est périodique de période $T=2\pi$

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T=2\pi$ donc par exemple : $D=[-\pi;\pi]$

Etudions la parité de $f$ ?

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)}=-\frac{\sin x}{2+\cos x}=-f(x)$$

Donc $f$ est impair

Donc il suffit d'étudier f sur $D_E=[0;\pi]$

3) $f$ est dérivable sur $D_E=[0;\pi]$ et $\forall x\in D_E$ on a :

$$f'(x)=\frac{\cos x(2+\cos x)+\sin x\times\sin x}{(2+\cos x)^2}=\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$$

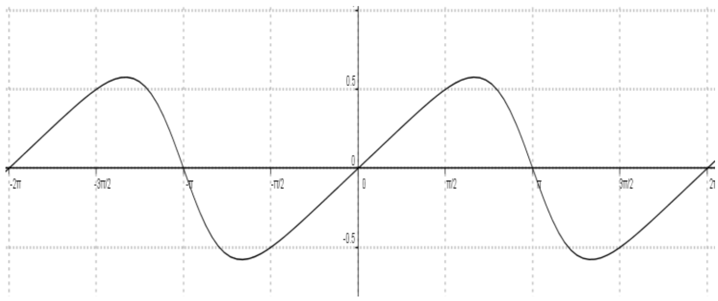
Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E=[0;\pi]$

Le signe de $f'(x)$ est celui de : $2\cos x+1$

$2\cos x+1\ge 0\Leftrightarrow \cos x\ge -\frac{1}{2}$ Et $x\in[0;\pi]$ Donc :

$$2\cos x+1\ge 0\Leftrightarrow x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$$

| $x$ | $0$ | | $\frac{2\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\searrow$ | $0$ |



**C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.**

**C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices**

**Que l'on devient un mathématicien**