Cours *LIMITE D'UNE FONCTION Avec* **Exercices et exemples avec solutions**

PROF : ATMANI NAJIB 1BAC BIOF

LIMITE D'UNE FONCTION

1)Introduction et activités

La limite d'une fonction, c'est en gros « vers quoi tend » la fonction.

Le plus simple est de prendre un exemple : la fonction inverse : $f : x \to \frac{1}{x}$

On voit bien que quand x tend vers +∞, la fonction « tend » vers 0, c'est-à-dire qu'elle se rapproche de plus en plus de 0 par valeur supérieure sans jamais la toucher.et bien on appelle cela une limite, puisque la fonction « tend vers » quelque chose. on note cette limite de la façon suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^{+}$

Et on prononce cela « limite quand x tend vers plus l'infini de $\frac{1}{x}$ est égal 0 plus».

Pour l'instant retiens juste la notation et cette notion de « tendre vers », de toute façon au fur et à mesure de la leçon tu assimileras de mieux en mieux le concept de limite avec les exemples.

2) LIMITE FINIE EN a.

Propriété : $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in\mathbb{R}^*$

Les fonctions : $x\mapsto x^2$; $x\mapsto x^3$; $x\mapsto x^n$; $x\mapsto k|x|$; $x\mapsto k\sqrt{|x|}$; $x\mapsto k|x|^n$

Tendent vers 0 quand x rend vers 0.

Exemple : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0}x^8$ 2) $\lim\limits_{x\to0}5|x|$ 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2}|x|^3$

Solutions:1) $\lim\limits_{x\to0}x^8=0$ 2) $\lim\limits_{x\to0}5|x|=0$ 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2}|x|^3=0$

Propriété : Si P est une fonction polynôme alors $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$ Une fonction polynôme P c'est une fonction qui s'écrit de la forme : $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2.+...+a_nx^n$

Exemple : $\lim\limits_{x\to-1}5x^2+2x-8=5\times(-1)^2+2\times(-1)-8=-5$

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre a et l un réel. On dit que la fonction f tend vers l quand x tend vers a si : $\lim\limits_{x\to a}f(x)-l=0$.

Propriété: Si sur un intervalle pointé de centre a on a : $|f(x) - l| \le u(x)$ et $\lim\limits_{x\to a}u(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$

Exemple1 :1)monter que : $\lim\limits_{x\to0}x^2\cos\left(\frac{2}{x}\right)=0$

2)a)monter que : $\forall x\in]-1;1[$: $|x^2+5x|\le6|x|$

b)Calculer $\lim\limits_{x\to0}x^2+5x$

Solution : 1) $x\in\mathbb{R}^*$ $\left|\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right|\le1$

donc $\left|x^2\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right|\le x^2$ et on a $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to0}x^2\cos\left(\frac{2}{x}\right)=0$

2)a) on a : $|x^2+5x|=|x(x+5)|=|x||x+5|$

Et puisque : $x\in]-1;1[$ alors : $4\prec x+5\prec6$

alors : $|x+5|\prec6$ donc $|x^2+5x|\le6|x|$

b) puisque : $\lim\limits_{x\to0}6|x|=0$ alors : $\lim\limits_{x\to0}x^2+5x$

Exemple2 : monter que: $\lim\limits_{x\to0}2+x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=2$

Solution : $x\in\mathbb{R}^*$ $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le1$ donc :

$|f(x)-2|=x^2\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le x^2$ et on a $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$

Alors : $\lim\limits_{x\to0}f(x)=2$

Exemple3 : monter que: $\lim_{x\to4}\sqrt{2x+1}=3$

Solution : $\forall x\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

$$\left|f(x)-3\right|=\left|\sqrt{2x+1}-3\right|=\frac{2|x-4|}{\sqrt{2x+1}+3}$$

et on a $\sqrt{2x+1}+3\geq3$ donc : $\left|f(x)-3\right|\leq\frac{2}{3}|x-4|$

et puisque : $\lim_{x\to4}|x-4|=0$ Alors : $\lim_{x\to4}f(x)=3$

Exemple4 : On se propose d'étudier la limite de la fonction : $f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ en 0.

On remarque que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$:

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\frac{1+x^2-1}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}$$

(on a multiplié par le conjugué)

$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$ D'autre part :

$(\forall x\in\mathbb{R}^*)(|f(x)|\leq|x|)$ et puisque $\lim_{x\to0}|x|=0$ alors

$\lim_{x\to0}f(x)=0$

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre a

on a : $\lim_{x\to a}\left|f(x)\right|=0\Leftrightarrow\lim_{x\to a}f(x)=0$

Remarque :

$\lim_{x\to a}\left|f(x)\right|=l\Leftrightarrow\lim_{x\to a}f(x)=l$ ou $\lim_{x\to a}f(x)=-l$

Propriété : Si f admet une limite l en a alors cette limite est **unique.**

Exercice : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to2}3x^2+2x+1$

2) $\lim_{x\to1}\frac{3x^2-x}{2x^3+3x-4}$ 3) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{4x+1}+3}{x^2+3x+2}$

Solutions : 1) $\lim_{x\to2}3x^2+2x+1=3\times2^2+2\times2+1=17$

2) $\lim_{x\to1}\frac{3x^2-x}{2x^3+3x-4}=\frac{3\times1^2-1}{2\times1^3+3\times1-4}=\frac{2}{1}=2$

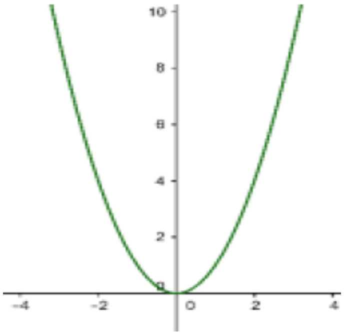
3) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{4x+1}+3}{x^2+3x+2}=\frac{\sqrt{4\times2+1}+3}{2^2+3\times2+2}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

3) Limite infinies en ±∞

Activité : Considérons la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto x^2$

La courbe représentative de f est la parabole de centre $O(0,0)$



1- Compléter le tableau suivant :

x	1	10^3	10^5	10^6	10^{12}
$f(x)$					

Que remarquer-vous ?

On voit bien que quand x tend vers +∞, la fonction « tend » vers +∞, c'est-à-dire qu'elle se rapproche de plus en plus grand

on écrit : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2- Compléter le tableau suivant :

x	-10^{12}	-10^5	-10^3	-10	-2
$f(x)$					

Que remarquer-vous ?

On voit bien que quand x tend vers $-\infty$, la fonction « tend » vers +∞, c'est-à-dire qu'elle se rapproche de plus en plus grand

on écrit : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

Propriété : Les fonctions :

$x\mapsto x^2$; $x\mapsto x^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$; $x\mapsto\sqrt{x}$; $x\mapsto|x|$

Tendent vers +∞ quand x tend vers +∞

Exercice : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to+\infty}x^6$ 2) $\lim_{x\to-\infty}x^{2014}$ 3) $\lim_{x\to-\infty}-7x^9$

Solutions :

1) $\lim_{x\to+\infty}x^6=+\infty$ 2) $\lim_{x\to-\infty}x^{2014}=+\infty$ car 2014 pair

3) $\lim_{x\to-\infty}-7x^9=+\infty$ car 2014 impair

4) Limite finie en ±∞

Activité : Soit la fonction : $f:x\to\frac{1}{x}$

1)Compléter le tableau suivant :

x	1	10^3	10^5	10^6	10^{12}
$f(x)$					

On remarque que quand x tend vers +∞, la fonction « tend » vers 0, c'est-à-dire qu'elle se rapproche de plus en plus de 0 par valeur supérieure. On note cette limite de la façon suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+$

2)Compléter le tableau suivant :

x	-10^{12}	-10^{6}	-10^{5}	-10	-1
$f(x)$					

On remarque que quand x tend vers $-\infty$, la fonction « tend » vers 0, c'est-à-dire qu'elle se rapproche de plus en plus de 0 par valeur inférieure. On note cette limite de la façon suivante : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0^-$

Propriétés : les fonctions $x\mapsto\frac{k}{x}$; $x\mapsto\frac{k}{x^2}$; $x\mapsto\frac{k}{x^n}$: $x\mapsto\frac{k}{|x|}$; $x\mapsto\frac{k}{\sqrt{|x|}}$; $x\mapsto\frac{k}{|x|^n}$ où $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in\mathbb{R}^*$ Tendent vers 0 quand x tend vers +∞.

Exemple : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}$ **2)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^5}$ **3)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x^7}$ **4)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4}{x^5}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{12}{x^{2021}}$ **6)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-5}{x^{2023}}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0^+$ **2)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^5}=0^-$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x^7}=0^-$ **4)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-4}{x^5}=0^+$ **5)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{12}{x^{2021}}=0^+$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-5}{x^{2023}}=0^+$

5) Limite infinies en un point

Activité : Soit la fonction : $f:x\to\frac{1}{x}$

1)Compléter le tableau suivant :

x	10^{12}	10^{6}	10^{2}	10	1
$f(x)$					

On remarque que quand x tend vers 0 par valeur supérieure la fonction f « tend » vers $+\infty$ c'est-à-dire qu'elle devient de plus en plus grand On note cette limite de la façon suivante :

$$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

2)Compléter le tableau suivant :

x	-1	-10	-10^{2}	-10^{6}	-10^{12}
$f(x)$					

On remarque que quand x tend vers 0 par valeur inferieur la fonction f « tend » vers $-\infty$ c'est-à-dire qu'elle devient de plus en plus petit On note cette limite de la façon suivante :

$$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

Exemple : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^3}$ **2)** $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-5}{x^3}$ **3)** $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{9}{x^5}$ **4)** $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-12}{x^4}$

5) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-1}{\sqrt{x}}$ **6)** $\lim\limits_{x\to0^+}3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^3}=+\infty$ **2)** $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-5}{x^3}=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{9}{x^5}+\infty$ **4)** $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-12}{x^4}=-\infty$

5) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-1}{\sqrt{x}}=-\infty$ **6)** $\lim\limits_{x\to0^+}3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}=0+7+\infty=+\infty$

6) LIMITE A DROITE, LIMITE A GAUCHE.

Exemple : Soit la fonction $f:x\mapsto\frac{|x-1|x}{x^2-1}$

Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}}f(x)$

Solution : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

Si : $x\succ1$: $f(x)=\frac{(x-1)x}{(x-1)(x+1)}=\frac{x}{x+1}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$

Si : $x\prec1$: $f(x)=\frac{-(x-1)x}{(x-1)(x+1)}=-\frac{x}{x+1}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}}-\frac{x}{x+1}=-\frac{1}{2}$

Remarque : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}f(x)\neq\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}}f(x)$

Théorème : Une fonction f admet une limite l en a si et seulement si elle admet une limite à droite de a égale à sa limite à gauche de a égale à l.

$$\lim\limits_{x\to a}f(x)=l\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\succ a}}f(x)=l \text{ et } \lim\limits_{\substack{x\to a\\x\prec a}}f(x)=l$$

Exemple : Soit la fonction $f:x\mapsto\frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de f en $x_0=-1$

Solution : Déterminons $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\prec -1}} f(x)$?

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}-\{-1;1\}$

Si : $-1 \prec x \prec 1$: $f(x)=\frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|}=-\frac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} -\frac{x+1}{x-1}=0$

Si : $x \prec -1$: $f(x)=\frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|}=\frac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\prec -1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\prec -1}} \frac{x+1}{x-1}=0$

donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\prec -1}} f(x)=0$ donc : $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$

Exercice : Soit la fonction g définie par :

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 2x^2 - x + 3 \; si \; x \geq 1$

$x \mapsto -x^2 + x + \alpha \; si \; x < 1$

Déterminer α pour que la fonction g admet une limite en 1.

7) OPERATIONS SUR LES LIMITES.

1)Opérations sur les limites finies.

Propriété : Soient f et g deux fonctions tels que : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l'$ on a :

$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=l+l'$ et $\lim\limits_{x\to a}(f\times g)(x)=l\times l'$ et

$\lim\limits_{x\to a}|f|(x)=|l|$ et $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x)=\frac{1}{l'}$ si $l'\neq 0$

et $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{l}{l'}$ si $l'\neq 0$ et $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f}(x)=\sqrt{l}$ si $l \succ 0$

Ces propriétés sont vraies à droite et à gauche d'un réel a.

Exemple : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1}=\frac{3}{1}=3$

2) Opérations sur les limites

Toutes les propriétés qui seront citées dans ce paragraphe sous forme de tableau sont admises

a) Limite de la somme

$\lim f$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme ind

Ces propriétés sont vraies si x tend vers : $a+$; $a-$; $+\infty$ ou $-\infty$

Formes indéterminées : Veut dire qu'on ne peut pas calculer la limite directement, il faut faire d'autres calcules car il y a plusieurs cas.

Exemple1 : 1) $f(x) = 2 + x^2$, $g(x) = 5 - x^2$ on a

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$

et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)+g(x)=-7$

2) $f(x) = 2 + x^2$, $g(x) = 5 - x$ on a

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=-\infty$

et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)+g(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} x^2-x+7=\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}\right)=+\infty$

Dans les deux exemples on a le même cas que dans la dernière colonne du tableau mais on a deux résultats différents

Exemple2 : déterminer : $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2-\sqrt{x}$

on a $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} -\sqrt{x}=-\infty$

Donc Formes indéterminée : "$+\infty-\infty$"

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2-\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(1-\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(1-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$

puisque : $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}=0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2=+\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2-\sqrt{x}=+\infty$

b) Limites des produits

$\lim f$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f\times g$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme ind	Forme ind	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

c)Limites des inverses

$\lim f$	$\ell\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

4) Limites des quotients

$\lim f$	ℓ	ℓ	$\ell\neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim g$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	0	ℓ	0	$\pm\infty$
$\lim\frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	?	?

Exemple3 : déterminer : $\lim\limits_{x\to 0} x^2+x+2+\frac{1}{x^2}$

Solution : on a : $\lim\limits_{x\to 0} x^2+x+2=2$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} x^2+x+2+\frac{1}{x^2}=+\infty$

Exemple4 : déterminer :

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}$ 2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}$

3) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} 2x^3+x^2-x+4$

Solution : 1)on a : $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0^+$ et

$\lim\limits_{x\to 1}x^3+1=2$ Donc : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}=+\infty$

2)on a : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}x\dfrac{1+\dfrac{1}{x^3}}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2}$

et on a : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}1+\dfrac{1}{x^3}=1$

et $\lim\limits_{x\to +\infty}1-\dfrac{1}{x}=1$ Donc : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to +\infty}x=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}2x^3+x^2-x+4=\lim\limits_{x\to +\infty}2x^3\left(1+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)$

on a : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2}{x^3}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{2x}=0$ et

$\lim\limits_{x\to +\infty}x^3=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty}2x^3+x^2-x+4=+\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty}2x^3+x^2-x+4=\lim\limits_{x\to -\infty}2x^3\left(1+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)$

on a : $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2}{x^3}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{2x}=0$ et

$\lim\limits_{x\to -\infty}x^3=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty}2x^3+x^2-x+4=-\infty$

Exemple5 : On veut déterminer

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x+1}{x^2+x-2}$

on a : $\lim\limits_{x\to 1^+}3x+1=4$

on a : $\lim\limits_{x\to 1^+}x^2+x-2=0^+$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x+1}{x^2+x-2}=+\infty$

Remarque :1) Eviter d'écrire ces expressions qui n'ont pas de sens mathématique : $\dfrac{?}{0^+}$ et $\dfrac{?}{0^-}$

2)Ne pas utiliser $+\infty$ ou $-\infty$ dans les opérations dans $\mathbb{R}$ ($+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des réels)

Exercices : Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x}{2x^3+2x-4}$ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$

3) Limites d'une fonction polynôme en $\pm\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=+\infty$

Soit f une fonction polynôme de degré n tel que :

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$

avec $a_n\neq 0$ On a :

$$f(x)=a_nx^n\left(\dfrac{a_0}{a_nx^n}+\dfrac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\dfrac{a_2}{a_nx^{n-2}}+...+\dfrac{a_{n-1}}{a_nx}+1\right)$$

puisque $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{a_0}{a_nx^n}+\dfrac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\dfrac{a_2}{a_nx^{n-2}}+...+\dfrac{a_{n-1}}{a_nx}+1=1$

alors $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}a_nx^n$

Même chose si x tend vers $-\infty$

Propriété : La limite d'une fonction polynôme en **$+\infty$ ($-\infty$)** est la limite de son plus grand terme En $+\infty$ ($-\infty$)

Exemple :

$\lim\limits_{x\to +\infty}2x^3+x^2-x+4=\lim\limits_{x\to +\infty}2x^3=+\infty$

4) Limites d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$

Une fonction rationnelle est le rapport de deux fonctions polynômes : $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ avec $an\neq 0$

$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx^m$ avec $b_m\neq 0$

$$h(x)=\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx}$$

$$h(x)=\dfrac{a_nx^n\left(\dfrac{a_0}{a_nx^n}+\dfrac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\dfrac{a_2}{a_nx^{n-2}}+...+\dfrac{a_{n-1}}{a_nx}+1\right)}{b_mx^m\left(\dfrac{b_0}{b_mx^m}+\dfrac{b_1}{b_mx^{m-1}}+\dfrac{b_2}{b_mx^{m-2}}+...+\dfrac{b_{m-1}}{b_mx}+1\right)}$$

et puisque : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\dfrac{a_0}{a_nx^n}+\dfrac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\dfrac{a_2}{a_nx^{n-2}}+...+\dfrac{a_{n-1}}{a_nx}+1}{\dfrac{b_0}{b_mx^m}+\dfrac{b_1}{b_mx^{m-1}}+\dfrac{b_2}{b_mx^{m-2}}+...+\dfrac{b_{m-1}}{b_mx}+1}=1$

$\lim\limits_{x\to +\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}$

Même chose si x tend vers $-\infty$

Propriété : La limite d'une fonction rationnelle en **+∞ (−∞)** est la limite du rapport des termes de plus grand degré en **+∞ (−∞)**

Exemples :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-7x^4}{14x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{2}=-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^5}{2x^6}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{1}{x}=0$

Remarque : La propriété précédente n'est vraie que si x tend vers +∞ ou −∞

8)Limites des fonctions trigonométriques.

Propriété : Soit a un réel on a :

1) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$

2) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$

3)si $a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ $\lim\limits_{x\to a}\tan x=\tan a$

Propriété : Soit $a\in\mathbb{R}^*$

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{ax}=1$ b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan ax}{ax}=1$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

Exemples : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ 2) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\dfrac{\pi}{6}}$

Solution : 1)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{3x}{\sin 3x}\times\frac{2}{3}=1\times1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

2) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$ directement on trouve une formes indéterminée : "$\dfrac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2}}\right)=\lim_{h\to0^+}-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos h}{\dfrac{h^2}{2}}\right)=-\frac{1}{2}\times1=-\frac{1}{2}$$

(On pose $\sqrt{x}=h$)

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\dfrac{\pi}{6}}$

On montre que : $\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\dfrac{\pi}{6}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{x-\dfrac{\pi}{6}}$$

On pose $x-\dfrac{\pi}{6}=h$) donc $x\to\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow h\to0$

Donc : $=2\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sin h}{h}=2\times1=2$

Exercice1 : Soient les fonctions tels que :

$f(x)=\sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$ et $g(x)=\dfrac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$k(x)=\dfrac{-3x+1}{x(x-2)}$ et $h(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3}\sin x$

1)Déterminer : $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2)Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to3}g(x)$

3)Déterminer : $\lim\limits_{x\to0}h(x)$

4)Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

Solution :

1)Déterminer : $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ et $f(x)=\sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$

$\lim\limits_{x\to2}2x+1=5$ et $\lim\limits_{x\to2}-3x^2+x=-10$

Donc : $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\sqrt{5}\times(-10)=-10\sqrt{5}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}2x+1=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x+1}=+\infty$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}-3x^2+x=\lim\limits_{x\to+\infty}-3x^2=-\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

- 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$? et $g(x)=\dfrac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}+1=+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2+1}{(x-3)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2}{x^2}=-2$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

- 2) $\lim\limits_{x\to3}g(x)$? et $g(x)=\dfrac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$\lim\limits_{x\to3}\sqrt{x}+1=\sqrt{3}+1$ et $\lim\limits_{x\to3}-2x^2+1=-17$ et

$\lim\limits_{x\to3}(x-3)^2=0^+$ donc : $\lim\limits_{x\to3}g(x)=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to0}h(x)$?.

$$\lim_{x\to0}h(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2+1}{x^2}\frac{\sin x}{x}$$

Or $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ et puisque : $\lim\limits_{x\to0}x^2+1=1$ et

$\lim\limits_{x\to0}x^2=0^+$

et $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+1}{x^2}=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to0}h(x)=+\infty$

4) $k(x)=\frac{-3x+1}{x(x-2)}$ donc : $D_k=]-\infty;0[\cup]0;2[\cup]2;+\infty[$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x+1}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3x+1}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to0}-3x+1=1$ et $\lim\limits_{x\to0}x^2-2x=0$

Etude du signe de : x^2-2x

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $\lim\limits_{x\to0^+}x^2-2x=0^-$ et $\lim\limits_{x\to0^-}x^2-2x=0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to0^+}k(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-}k(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to2}-3x+1=-5$ et $\lim\limits_{x\to2^+}x^2-2x=0^+$ et $\lim\limits_{x\to2^-}x^2-2x=0^-$

Donc : $\lim\limits_{x\to2^+}k(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^-}k(x)=+\infty$

Exercice2 : calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10}$ 2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$ 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to2}\sqrt{2x}-2=0$ et $\lim\limits_{x\to2}x^2+3x-10=0$

on trouve une formes indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{2x}+2)}{(x^2+3x-10)(\sqrt{2x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(2x-4)}{(\sqrt{2x}+2)}\times\frac{1}{(x-2)(x+5)}=\lim_{x\to2}\frac{2}{(\sqrt{2x}+2)}\times\frac{1}{(x+5)}=\frac{2}{14}$$

2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}$?

On a : $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

Et $2x^3+3x^2-4x-1=(x-1)(2x^2+5x+1)$

Donc :

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x^2+5x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+5x+1}{x^2+x+1}=\frac{8}{3}$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$?

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+x=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}=+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$

on trouve une formes indéterminée : "$+\infty-\infty$"

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$ or $x\to+\infty$ donc $|x|=x$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1}=\frac{1}{2}$$

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$ On pose $x-\frac{\pi}{4}=h$ donc $x\to\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow h\to0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{h\to0}\frac{\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)}{h}$$

or : $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan h+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan h\times\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan h+1}{1-\tan h}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{h\to0}\frac{2}{1-\tan h}\times\frac{\tan h}{h}=\frac{2}{1}\times1=2$$

9) Limites et ordres.

Propriété : Si sur un intervalle pointé de centre a on a : $|f(x) - l| \leq u(x)$ et $\lim_{x\to a} u(x) = 0$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = l$

(On peut citer les mêmes propriétés à gauche et adroites de a ou $+\infty$ ou $-\infty$.)

Propriété : 1) soit f est une fonction définit sur un intervalle de la forme $I =]a-r;a-r[-\{a\}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $r \succ 0$

Si f admet une limite en a et f positif sur I alors $\lim_{x\to a} f(x) \geq 0$

2) soit f est une fonction définit sur un intervalle de la forme $I =]a-r;a-r[-\{a\}$

avec $a \in \mathbb{R}$ et $r \succ 0$

Si f admet une limite en a et g admet une limite en a et $f \leq g$ sur I alors $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$

3)si on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim_{x\to a} g(x) = l$ et $\lim_{x\to a} h(x) = l$ alors $\lim_{\substack{x\to a \\ x\succ a}} f(x) = l$

Les propriétés précédentes sont vraies si x tend vers a à droite, ou a à gauche, ou $+\infty$ ou $-\infty$ en tenant compte des conditions pour chaque cas.

(On peut citer les mêmes propriétés à gauche de a.)

Propriété : 1)Si sur un intervalle de la forme $]a, a + r[$ on a : $u(x) \leq v(x)$ et $\lim_{x\to a^+} u(x) = +\infty$

alors : $\lim_{x\to a^+} v(x) = +\infty$

2)Si sur un intervalle de la forme $]a, a + r[$ on a : $u(x) \leq v(x)$ et $\lim_{x\to a^+} v(x) = -\infty$

alors : $\lim_{x\to a^+} u(x) = -\infty$

La propriété précédente est vraie si x tend vers a à gauche, ou $+\infty$ ou $-\infty$ en tenant compte des conditions pour chaque cas.

Exemple1: Soit la fonction : $f : x \mapsto 3x^2 + 5x + 1$

déterminer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}^+$ on a $3x^2 \leq 3x^2 + 5x + 1$ et et puisque : $\lim_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$ alors : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Exemple2 : Soit la fonction :

$f : x \mapsto (x^2 + x^4)\sin\frac{1}{x}$ déterminer : $\lim_{x\to 0} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ on a $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$ et

$x^2 + x^4 \geq 0$ donc $-x^2 - x^4 \leq (x^2 + x^4)\sin\frac{1}{x} \leq x^2 + x^4$

et puisque :

$\lim_{x\to 0} x^2 + x^4 = \lim_{x\to 0} -x^2 - x^4 = 0$ alors :

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

Exemple3 : Soit la fonction : $f : x \mapsto x + \sin x - 1$

déterminer : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc :

$x - 2 \leq f(x) \leq x$ et puisque :

$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ alors : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Exemple4 : Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{1+\sin x}{1+\sqrt{x}}$

déterminer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $1+\sqrt{x} \geq \sqrt{x}$ et

$0 \leq 1+\sin x \leq 2$ donc $\left|\frac{1+\sin x}{1+\sqrt{x}}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ donc

$|f(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ et on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ donc :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Exercice3 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$ 2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x^3}$ 3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}$

4) $\lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}$

Solution : 1)on pose : $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ donc : $|f(x)| \leq x^2$ et on a

$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ Alors : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x^3}$? on pose : $f(x) = \frac{\cos x}{x^3}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $|\cos x| \leq 1$ donc : $|f(x)| \leq \frac{1}{|x|^3}$ et on a $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{|x|^3} = 0$ Alors : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}$? on pose : $f(x) = \frac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc : $0 \leq \frac{1+\sin x}{2+\cos x} \leq 2$ donc $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x^2}$

Et puisque : $\lim_{x \to +\infty} 0 = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ Alors : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

4) $\lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}$? on pose : $f(x) = 1 + \frac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $2+\sqrt{x^4+1} \geq \sqrt{x^4}$ cad $2+\sqrt{x^4+1} \geq x^2$

donc : $\frac{1}{2+\sqrt{x^4+1}} \leq \frac{1}{x^2}$ donc : $|f(x)-1| \leq \frac{1}{|x|}$

Et puisque : $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{|x|} = 0$ Alors : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

« C’est en forgeant que l’on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l’on devient un mathématicien