TD **:** LA ROTATION DANS LE PLAN AVEC CORRECTIONS

PROF: ATMANI NAJIB 1BAC BIOF

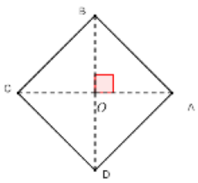
TD :LA ROTATION DANS LE PLAN AVEC CORRECTIONS

Exercice1 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ positif. Soit r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_O une rotation de centre O et d'angle α .

1) Déterminer $r_A(A)$; $r_A(B)$; $r_A(D)$,

2) Comment choisir α pour avoir $r_O(A)=B$?

Comment choisir α pour avoir $r_O(A)=C$?



Solution : $r_A\left(A;\frac{\pi}{2}\right)$ et $r_O(O;\alpha)$

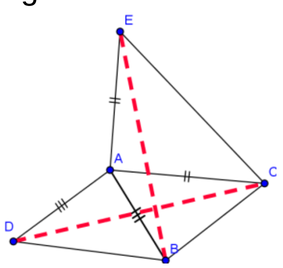
- $r_A(A)=A$ Car le centre est le seul point invariant.
- $r_A(B)=D$ Car $\begin{cases} AB=AD \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$
- $r_A(D)=B'$ avec B' le symétrique de B par rapport a A

2) $r_O(A)=B \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}$

$r_O(A)=C \Leftrightarrow \alpha=\pi$

Exercice2 : ABC est un triangle. On construit à l'extérieur deux triangles ABD et ACE isocèles et rectangles en A

1)Montrer que : $BE=CD$ 2)Montrer que : $(BE)\perp(CD)$



Solution :

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

On a : $\begin{cases} AD=AB \\ \left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(D)=B$ ❶

On a : $\begin{cases} AC=AE \\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc :❷ $r(C)=E$

Et puisque la rotation conserve les distances

Alors de❶ et ❷ en déduit que $BE=CD$

2)on a $r(D)=B$ et $r(C)=E$

Donc : $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{EB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}$ par suite : $(BE)\perp(CD)$

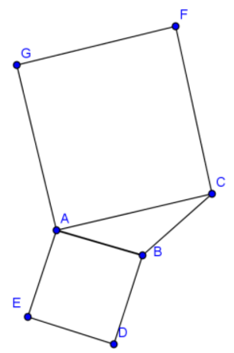
Exercice3 : ABC est un triangle tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ positif. On construit à l'extérieur les carrés $ABDE$ et $ACFG$

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

déterminer : $r(E)$ et $r(C)$

Et Montrer que : $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}\right)\equiv\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)[2\pi]$

Solution :



on a : $\begin{cases} AE=AB \\ \left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : $r(E)=B$ ❶

Et on a : $\begin{cases} AC=AG \\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AG}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : ❷ $r(C)=G$

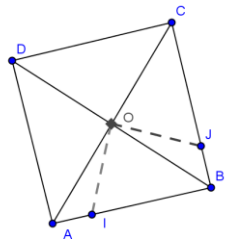
Et on a : $r(A)=A$ ❸ car A le centre de la rotation

De : ❶et❷ et❸ en déduit que $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}\right)\equiv\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)[2\pi]$

Exercice4 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{0A},\overrightarrow{0B}\right)$ positif.

I et J deux points tels que : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

Montrer que $(OI)\perp(OJ)$ et $OI=OJ$



Solution : il suffit de montrer que **:** $r(I)=J$????

On pose : $r(I)=I'$

On a : $\begin{cases} OA=OB \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc $r(A)=B$

Et on a : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{BI'}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ❶ car la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Et on sait que : $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ❷

De ❶ et ❷ en déduit que $\overrightarrow{BI'}=\overrightarrow{BJ}$ donc $I'=J$

Donc $r(I)=J$ par suite : $\begin{cases} OI=OJ \\ \left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Exercice5 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{0A},\overrightarrow{0B}\right)$ positif. Soit (D) la droite parallèle a (BD) et coupe (AD) en M et coupe (AB) en N et Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. E et F les images M et N respectivement Par la rotation r

1)Faire une figure et Montrer que $(EF)\perp(MN)$

2)Déterminer l'image de la droite (BD) par la rotation r

3)Montrer que $DN=FA$ et $(EF)\parallel(AC)$

Solution :1)

on a :❶ $r(M)=E$

et : $r(N)=F$ ❷

de ❶ et ❷ en deduit que:

$\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{EF}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

donc : $(EF)\perp(MN)$

2) on a: $\begin{cases} 0B=0C \\ \left(\overrightarrow{0B},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : $r(B)=C$ ❶

Et on a : $\begin{cases} 0D=0A \\ \left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc $r(D)=A$❷

de ❶ et ❷ en deduit que: $r((BD))=(AC)$

3) $DN=FA$???

on a: ❶ $r(D)=A$ et ❷ $r(N)=F$

donc : $DN=FA$

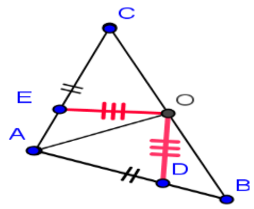
$(EF)\parallel(AC)$???

On a : $(MN)\parallel(BD)$ et $r((BD))=(AC)$ et $r((MN))=(EF)$

Donc : $(EF)\parallel(AC)$ car la rotation conserve le parallélisme

Exercice6 : ABC est un triangle isocèles et rectangles en A tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ positif et O le milieu du segment $[BC]$.D et E deux points tels que : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$

Montrer que ODE est un triangle isocèles et rectangles en O



Solution : il suffit de montrer que **:** $r(E)=D$????

On pose : $r(E)=E'$

On a : $\begin{cases} OA=OC \\ \left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : $r(C)=A$ ❶

Et on a : $\begin{cases} OA=OB \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(A)=B$ ❷

Et on a : $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ ❸

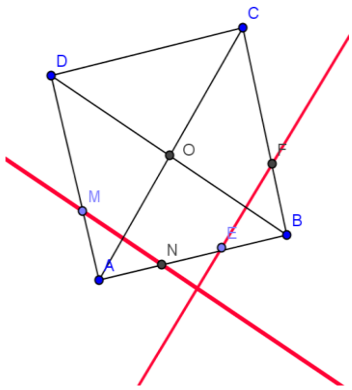
De ❶et❷et❸: en déduit que : $\overrightarrow{AE'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ❹ car la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Et on sait que : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ❺

De❹et ❺ en déduit que : $\overrightarrow{AE'}=\overrightarrow{AD}$ cad $E'=D$

Donc : $r(E)=D$ par suite : $\begin{cases} OE=OD \\ \left(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

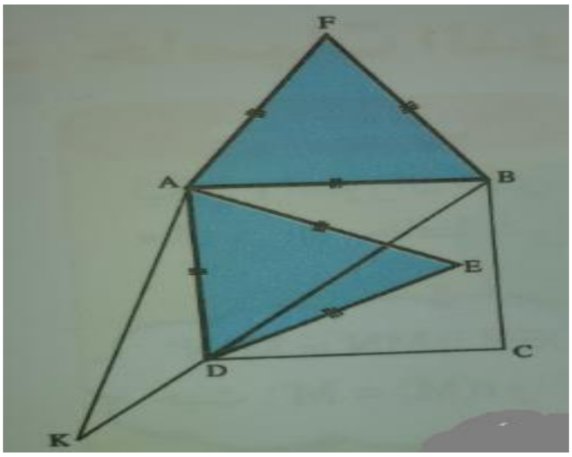
Donc ODE est un triangle isocèles et rectangles en O



Exercice7 : ABCD est un carré tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ positif. et AED et AFB deux triangles équilatéraux

Montrer que les points : E et C et F sont alignés

Solution : soit r la rotation de centre A et



d'angle $\frac{\pi}{3}$ **:** $r\left(A;\frac{\pi}{3}\right)$

et soit K l'antécédent de C par r

On a : $r(B)=F$

Car $\begin{cases} AB=AF \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Et on a : $r(D)=E$ Car $\begin{cases} AD=AE \\ \left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Et on a : $r(K)=C$

donc **:** $AK=AC$ et $\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

puisque : $AB=BC$ donc B appartient à la médiatrice du segment $[AC]$ et $AD=DC$ donc D appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

et on a : $AK=AC$ et $\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

donc : AKC est équilatéral donc K appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

Donc les points : K et B et D sont alignés

Et puisque la rotation conserve les alignement des points alors :les points : E et C et F sont alignés

Exercice8 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ négatif. Soient M, N, P et Q quatre points dans le plan tels que : $\overrightarrow{DQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

la droite (AN) coupe les droites (DM) et (BP) Respectivement en E et F

la droite (CQ) coupe les droites (DM) et (BP) Respectivement en H et G

Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\pi/2$

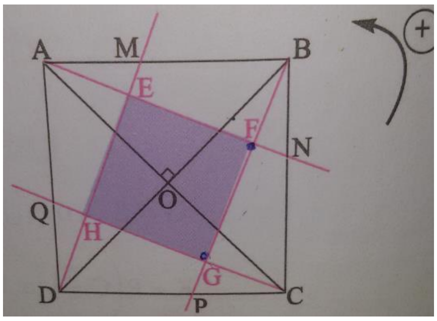
1)Faire une figure dans le cas ou : $AB=6cm$

2)Montrer que : $r(M)=N$ et $r(N)=P$ et $r(P)=Q$ et $r(Q)=M$

3) a)Montrer que : $r(F)=G$

b)en déduire que : le triangle FOG est isocèle et rectangle en O

Solution :1)



2) on a $\begin{cases} OA=OB \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(A)=B$

$\begin{cases} OB=OC \\ \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(B)=C$

Et puisque $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Alors : $\overrightarrow{r(A)r(M)}=\frac{1}{3}\overrightarrow{r(A)r(B)}$

cad : $\overrightarrow{Br(M)}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et on a : $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ donc : $r(M)=N$

de meme : on montre que : $r(N)=P$ et $r(P)=Q$ et $r(Q)=M$

3) a)Puisque : $r(N)=P$ et $r(A)=B$ alors : $r((AN))=(BP)$

Et Puisque : $r(P)=Q$ et $r(A)=B$ alors : $r((AN))=(BP)$

Et puisque : $r(P)=Q$ et $r(B)=C$ alors : $r((BP))=(QC)$

Donc : $r((AN)\cap(BP))=r((AN))\cap r((BP))$ car r est une application injective

Donc : $r(\{F\})=(BP)\cap(QC)=\{G\}$ par suite : $r(F)=G$

3)b)On a : $r(F)=G$ donc : $\begin{cases} OF=OG \\ \left(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OG}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : le triangle FOG est isocèle et rectangle en O

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien