Cours LA ROTATION DANS LE PLAN avec exercices corrigés

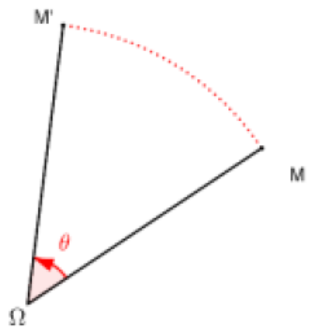
PROF: ATMANI NAJIB 1BAC BIOF

LA ROTATION DANS LE PLAN

I) LA ROTATION DANS LE PLAN

1) Définition :

Définition : Soit Ω un point dans le plan et θ un nombre réel, **la rotation de centre Ω et d'angle θ** est l'application qui transforme tout point M en M' tel que :

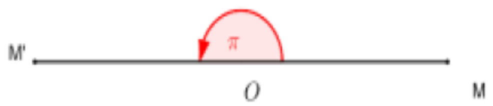


$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overline{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) \equiv \alpha [2\pi] \end{cases}$$

On la note par : $R\ (\Omega,\ \theta)$

Remarque : Si l'angle de la rotation est non nul, son centre est le seul point invariant.

Exemples : 1) La symétrie centrale S_O est la Rotation de centre O et d'angle π



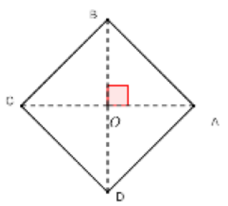
2)L'identité $\mathcal{I}dP$ est la rotation d'angle nul. (Tous les points de (P) sont centre de cette rotation)

Exercice1 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right)$ positif. Soit r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_O une rotation de centre O et d'angle α .

1) Déterminer $r_A(A)$; $r_A(B)$; $r_A(D)$,

2) Comment choisir α pour avoir $r_O(A) = B$?

Comment choisir α pour avoir $r_O(A) = C$?



Solution : $r_A\left(A;\frac{\pi}{2}\right)$ et $r_O(O;\alpha)$

- $r_A(A) = A$ Car le centre est le seul point invariant.
- $r_A(B) = D$ Car $\begin{cases} AB = AD \\ \left(\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$
- $r_A(D) = B'$ avec B' le symétrique de B par rapport a A

2) $r_O(A) = B \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

$r_O(A) = C \Leftrightarrow \alpha = \pi$

2) Propriétés de la rotation

Propriété : Soit R la rotation de centre O

On a les propriétés suivantes :

1)La rotation conserve les distances : si $R(A) = A'$ et $R(B) = B'$ Alors $A'B' = AB$

2) La rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs et par suite conserve la linéarité des points

3) La rotation conserve le milieu et le barycentre d'un système pondéré.

4) La rotation conserve les mesures des angles géométriques

5) La rotation conserve les mesures des angles

Applications :

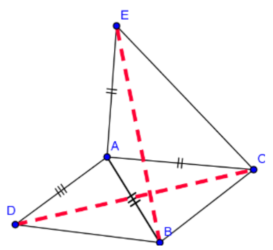
Exercice2 : ABC est un triangle.

On construit à l'extérieur deux triangles ABD et ACE isocèles et rectangles en A

1)Montrer que : $BE = CD$

2)Montrer que : $(BE) \perp (CD)$

Solution : Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$



On a : $\begin{cases} AD = AB \\ \left(\overline{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

donc : $r(D) = B$ ❶

On a : $\begin{cases} AC = AE \\ \left(\overline{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc :❷ $r(C) = E$

Et puisque la rotation conserve les distances

Alors de❶ et ❷ en déduit que $BE = CD$

2)on a $r(D) = B$ et $r(C) = E$

Donc : $\left(\overline{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$ par suite : $(BE) \perp (CD)$

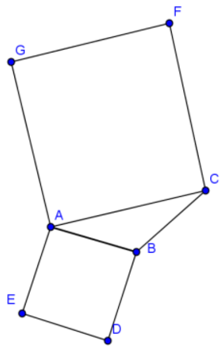
Exercice3 : ABC est un triangle tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ positif. On construit à l'extérieur les carrés $ABDE$ et $ACFG$

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

déterminer : $r(E)$ et $r(C)$

Et Montrer que : $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}\right)\equiv\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)[2\pi]$

Solution :



on a : $\begin{cases} AE = AB \\ \left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : $r(E)=B$ ❶

Et on a : $\begin{cases} AC = AG \\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AG}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : ❷ $r(C)=G$

Et on a : $r(A)=A$ ❸ car A le centre de la rotation

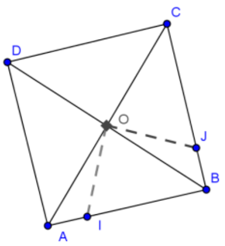
De : ❶et❷ et❸ en déduit que $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}\right)\equiv\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)[2\pi]$

Exercice4 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{0A},\overrightarrow{0B}\right)$ positif.

I et J deux points tels que : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

Montrer que $(OI)\perp(OJ)$ et $OI=OJ$

Solution : il suffit de montrer que **:** $r(I)=J$ ؟؟؟؟



On pose : $r(I)=I'$

On a : $\begin{cases} OA = OB \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc $r(A)=B$

Et on a : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{BI'}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ❶ car la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Et on sait que : $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ❷

De ❶ et ❷ en déduit que $\overrightarrow{BI'}=\overrightarrow{BJ}$ donc $I'=J$

Donc $r(I)=J$ par suite : $\begin{cases} OI = OJ \\ \left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

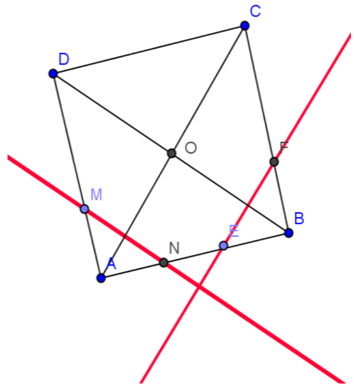
Exercice5 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{0A},\overrightarrow{0B}\right)$ positif. Soit (D) la droite parallèle a (BD) et coupe (AD) en M et coupe (AB) en N et Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. E et F les images M et N respectivement Par la rotation r

1)Faire une figure et Montrer que $(EF)\perp(MN)$

2)Déterminer l'image de la droite (BD) par la rotation r

3)Montrer que $DN=FA$ et $(EF)\parallel(AC)$

Solution :1)



on a :❶ $r(M)=E$

et : $r(N)=F$ ❷

de ❶ et ❷ en deduit que:

$\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{EF}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

donc : $(EF)\perp(MN)$

2) on a: $\begin{cases} 0B = 0C \\ \left(\overrightarrow{0B},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : $r(B)=C$ ❶

Et on a : $\begin{cases} 0D = 0A \\ \left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc $r(D)=A$❷

de ❶ et ❷ en deduit que: $r((BD))=(AC)$

3) $DN=FA$ ؟؟؟

on a: ❶ $r(D)=A$ et ❷ $r(N)=F$

donc : $DN=FA$

$(EF)\parallel(AC)$ ؟؟؟

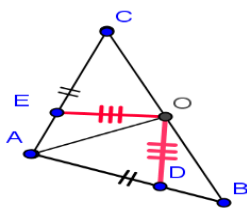
On a : $(MN)\parallel(BD)$ et $r((BD))=(AC)$ et $r((MN))=(EF)$

Donc : $(EF)\parallel(AC)$ car la rotation conserve le parallélisme

Exercice6 : ABC est un triangle isocèles et rectangles en A tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ positif et O le milieu du segment $[BC]$.D et E deux points tels que : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$

Montrer que ODE est un triangle isocèles et rectangles en O

Solution : il suffit de montrer que **:** $r(E)=D$ ؟؟؟؟



On pose : $r(E)=E'$

On a : $\begin{cases} OA = OC \\ \left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : $r(C)=A$ ❶

Et on a : $\begin{cases} OA=OB \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(A)=B$ ❷

Et on a : $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ ❸

De ❶et❷et❸: en déduit que : $\overrightarrow{AE'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ❹ car la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Et on sait que : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ❺

De❹et ❺ en déduit que : $\overrightarrow{AE'}=\overrightarrow{AD}$ cad $E'=D$

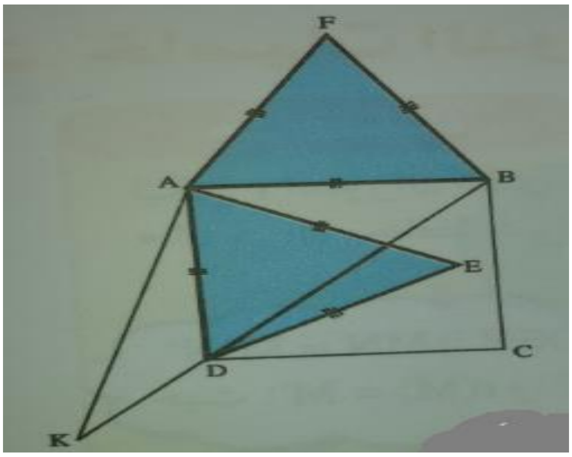
Donc : $r(E)=D$ par suite : $\begin{cases} OE=OD \\ \left(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc ODE est un triangle isocèles et rectangles en O

Exercice7 : ABCD est un carré tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ positif. et AED et AFB deux triangles équilatéraux

Montrer que les points : E et C et F sont alignés

Solution : soit r la rotation de centre A et



d'angle $\frac{\pi}{3}$: $r\left(A;\frac{\pi}{3}\right)$

et soit K l'antécédent de C par r

On a : $r(B)=F$

Car $\begin{cases} AB=AF \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Et on a : $r(D)=E$ Car $\begin{cases} AD=AE \\ \left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Et on a : $r(K)=C$

donc : $AK=AC$ et $\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

puisque : $AB=BC$ donc B appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

et $AD=DC$ donc D appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

et on a : $AK=AC$ et $\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

donc : AKC est équilatéral donc K appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

Donc les points : K et B et D sont alignés

Et puisque la rotation conserve les alignement des points alors :les points : E et C et F sont alignés

Propriété : La rotation $R\ (\Omega,\ \theta)$ est une bijection et sa bijection réciproque est la bijection $R\ (\Omega,\ -\ \theta)$

Preuve : $R\ (\Omega,\ \theta)\ (M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M=\Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)\equiv\theta[2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M'=\Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{\Omega M}\right)\equiv-\theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow R(\Omega,-\theta)(M') = M$

Propriété : (Propriété fondamentale de la rotation)

Soit $R\ (\Omega,\ \theta)$ la rotation de centre Ω et d'angle θ

si $R(M) = M'$ et $R(N) = N'$ alors $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'}\right)\equiv\theta[2\pi]$

Preuve : On a :

$\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{\Omega M}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{M'N'}\right)[2\pi]$

$\equiv\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)[2\pi]$car : $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{\Omega M}\right)\equiv\left(\overrightarrow{M'N'},\overrightarrow{\Omega M'}\right)[2\pi]$

(la rotation conserve la mesure des angles orientés)

D'où : $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{\Omega M}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{M'N'}\right)\equiv 0[2\pi]$

Exercice10 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ négatif. Soient M, N, P et Q quatre points dans le plan tels que : $\overrightarrow{DQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

la droite (AN) coupe les droites (DM) et (BP) Respectivement en E et F

la droite (CQ) coupe les droites (DM) et (BP) Respectivement en H et G

Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\pi/2$

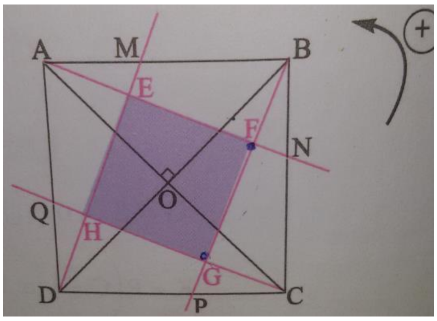
1)Faire une figure dans le cas ou : $AB=6cm$

2)Montrer que : $r(M)=N$ et $r(N)=P$ et $r(P)=Q$ et $r(Q)=M$

3) a)Montrer que : $r(F)=G$

b)en déduire que : le triangle FOG est isocèle et rectangle en O

Solution :1)



2) on a $\begin{cases} OA=OB \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(A)=B$

$\begin{cases} OB=OC \\ \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(B)=C$

Et puisque $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Alors : $\overrightarrow{r(A)r(M)}=\frac{1}{3}\overrightarrow{r(A)r(B)}$

cad : $\overrightarrow{Br(M)}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et on a : $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

donc : $r(M)=N$

de meme : on montre que : $r(N)=P$ et $r(P)=Q$ et $r(Q)=M$

3) a)on montre que : $r(F)=G$?

Puisque : $r(N)=P$ et $r(A)=B$ alors : $r((AN))=(BP)$

Et Puisque : $r(P)=Q$ et $r(A)=B$ alors : $r((AN))=(BP)$

Et puisque : $r(P)=Q$ et $r(B)=C$ alors : $r((BP))=(QC)$

Donc : $r((AN)\cap(BP))=r((AN))\cap r((BP))$ car r est une application injective

Donc : $r(\{F\})=(BP)\cap(QC)=\{G\}$ par suite : $r(F)=G$

3)b)On a : $r(F)=G$ donc : $\begin{cases} OF=OG \\ \left(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OG}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : le triangle FOG est isocèle et rectangle en O

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs
et exercices
Que l'on devient un mathématicien