

TD CALCUL TRIGONOMETRIQUE

EXERCICES D'APPLICATIONS ET DE REFLEXIONS

PROF : ATMANI NAJIB

1BAC SM BIOF

TD-CALCUL TRIGONOMETRIQUE

Exercice1 : 1) Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

2) Calculer $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$

3) montrer que : $\cos x = \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$

4) montrer que : $\sin \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) + \sin \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) + \sin x = 0$

Exercice2 :

Soient : $0 < a < \frac{\pi}{2}$ et $0 < b < \frac{\pi}{2}$ et $\cos a = \sin b = \frac{1}{2}$

1) Calculer : $\sin a$ et $\cos b$

2) Calculer : $\sin(a+b)$

Exercice3 : Calculer $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$

Exercice4 : calculer $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$

Exercice5 : Sachant que $\sin x = \frac{1}{2}$ et $0 < x < \frac{\pi}{2}$

calculer : $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$

Exercice6 : Montrer que : $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2 \quad \forall x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$

Exercice7 : Montrer que :

1) $1 - \cos x + \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)$

2) si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\sin \alpha \neq -1$ alors

$$\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$$

Exercice8 : Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$

1) $\sin^2 2x - \cos 2x - 1 = -2 \cos^2 x \times \cos 2x$

2) $2 \sin^2 x + 12 \cos^2 x = 5 \cos 2x + 7$

Exercice10 : Calculer $\tan \frac{11\pi}{12}$

Exercice11 :

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 2x - 1 = 0$

2- En déduire $\tan \left(\frac{\pi}{8} \right)$

Exercice12 : soit $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\tan \frac{a}{2} = \sqrt{2}$

Calculer $\cos a$ et $\sin a$ et $\tan a$

Exercice13 : 1- Montrer que $\tan \left(\frac{\pi}{12} \right) = 2 - \sqrt{3}$

2- Considérons l'équation :

$$(E): 2 \cos x - 2 \sin x - 1 - \sqrt{3} = 0$$

a) Vérifier que $\pi + 2k\pi$ n'est pas une solution de l'équation (E)

b) en posant : $t = \tan \left(\frac{x}{2} \right)$, résoudre l'équation (E)

(remarquer que $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$)

3- Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice14 : Transformer en produits les expressions suivantes :

1) $A(x) = \sin 2x + \sin 4x$

2) $B(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$

Exercice15 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 0$$

Exercice16 : écrire sous la forme d'une somme

1) $\cos 2x \times \sin 4x$ 2) $\sin x \times \sin 3x$ 3) $\cos 4x \times \cos 6x$

Exercice17 : calculer

1) $\cos \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12}$ 2) $\sin \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12}$

Exercice18 : Montrer que

$$1) \sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11} = 2 \sin \left(\frac{5\pi}{11} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{11} \right)$$

$$2) \sin \frac{3\pi}{11} - \sin \frac{7\pi}{11} = -2 \cos \left(\frac{5\pi}{11} \right) \sin \left(\frac{2\pi}{11} \right)$$

$$3) \text{ en déduire que : } \frac{\sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11}}{\sin \frac{3\pi}{11} - \sin \frac{7\pi}{11}} = -\frac{\tan \left(\frac{5\pi}{11} \right)}{\tan \left(\frac{2\pi}{11} \right)}$$

Exercice19 : Montrer que $\frac{\cos 2x - \cos 4x}{\cos 2x + \cos 4x} = \tan 3x \times \tan x$

Exercice20 : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos^2 \frac{5x}{2} - \cos^2 \frac{3x}{2} = -\sin 4x \times \sin x$$

Exercice21 : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$

1) $\sin 3x = \sin x (3 - 4\sin^2 x)$

2) $\cos 3x = \cos x (4\cos^2 x - 3)$

3) $\cos(4x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

4) $\sin(4x) = 4\sin x (2\cos^2 x - \cos x)$

5) $\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$

Exercice22 : $P(x) = \sin 2x - \sin x$ et $Q(x) = 1 + \cos x + \cos 2x$

Montrer que : $P(x) = \sin x (2\cos x - 1)$ et

$Q(x) = \cos x (2\cos x + 1)$

Exercice23 : 1- Linéariser : $2\cos^2 x \cdot \sin(2x)$

2- Linéariser : $\cos^3 x$

Exercice24 : 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Déterminer les solutions dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$

Exercice25 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$-\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Déterminer les solutions dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$

Exercice26 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$

Exercice27 :1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations

suivantes : $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

2) Résoudre dans $[0; \pi]$ l'équations suivantes :

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

3) Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ l'équations suivantes :

$$\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$$

Exercice28 : $\cos x - \sin x \quad a=1 \text{ et } b=-1$

calculons : $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

Exercice29 : Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation :

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{3}$$

Exercice30 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\sqrt{3}\cos(3x) + \sin(3x) + 2 = 0$$

Exercice31 : Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'inéquation

$$\cos x \geq \frac{1}{2}$$

Exercice32 : Résoudre dans $[0, 3\pi]$ l'inéquation :

$$2\cos x + \sqrt{3} \leq 0$$

Exercice33 : Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'inéquation

$$\sin x \geq \frac{1}{2}$$

Exercice34 : Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation

$$\text{suivante : } \tan x - 1 \geq 0$$

Exercice35 : Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'inéquation

$$\text{suivante : } 3\tan x - \sqrt{3} \geq 0$$

Exercice36 : 1) Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'équation :

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$$

2) Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'inéquation :

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x \geq 1$$

Exercice37 : 1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations

suivantes : $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 = 0$ et en déduire les solutions dans $[0; 2\pi]$

b) résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation suivante :

$$2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$$

2) Résoudre dans $[0; \pi]$ l'inéquation suivante :

$$(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$$

Exercice38 : 1. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation :

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{1}{2}$$

2. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation :

$$4\cos^2 x - 2(1 + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} \leq 0$$

3. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation : $\frac{1 + \tan x}{\sin 2x} \geq 0$

Exercice39 :

Résoudre dans $[-\frac{11\pi}{5}, \frac{14\pi}{5}]$ l'équation $\sin 3x \geq \frac{1}{2}$

Exercice40 :: soit $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$A(x) = \cos 3x - 3 \sin x + 3\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

1) calculer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$

Et calculer $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

2) en déduire une écriture simple de $A(x)$

3)a) Résoudre dans $I = [-\pi; \pi]$ l'équations: $A(x) = \frac{1}{2}$

3)b) Résoudre dans I l'inéquations: $A(x) \leq \frac{1}{2}$

Exercice41 : on pose :

$$A = \sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{2\pi}{9} \times \sin \frac{3\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9}$$

1) monter que : $\sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{5\pi}{9} \right)$

2) monter que : $\cos \frac{5\pi}{9} \times \sin \frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{7\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

3) en déduire que : $A = \frac{3}{16}$

Exercice 42: soit : $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $3\sin \theta + 5\cos \theta = 5$

1) monter que : $5\sin \theta - 3\cos \theta = 3$

2) déduire la valeur de : $\cos \theta$ et $\sin \theta$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

