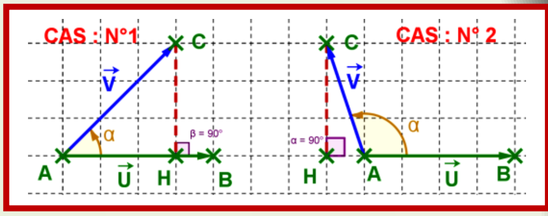
I. RAPPEL :

01. Définition :

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tel que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u}.\vec{v}$ tel que :



- Si $\vec{v}=\vec{0}$ ou $\vec{u}=\vec{0}$ on a : $\vec{u}.\vec{v}=0$.
- Si $\vec{v}\neq\vec{0}$ et $\vec{u}\neq\vec{0}$ et H la projection orthogonale de C sur la droite (AB) ($A\neq B$ car $\vec{u}\neq\vec{0}$) alors
  - $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens .
  - $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AB\times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont les sens opposés.

2. $\vec{u}.\vec{u}=\vec{u}^2=\overrightarrow{AB}^2$ est appelé le carré scalaire de $\overrightarrow{AB}$ ou de $\vec{u}$.

3. Le nombre réel positif $\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$ est appelé la norme du vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et on note $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}$ ou $\|\overrightarrow{AB}\|=AB$ (remarque $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$) .

02. Propriétés

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.

1. La forme trigonométrique du produit scalaire (avec $\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ et $\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$) tel que $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\alpha\ (2\pi)$ est : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\cos\alpha$ ou encore $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos\alpha$.

2. Symétrie du produit scalaire : $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$.

3. Linéarité du produit scalaire : $\begin{cases}\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\vec{w}=\vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w}\\ \vec{w}.\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\vec{w}.\vec{u}+\vec{w}.\vec{v}\\ \left(\alpha\vec{u}\right).\vec{v}=\vec{u}.\left(\alpha\vec{v}\right)=\alpha\times\left(\vec{u}.\vec{v}\right)\end{cases}$.

4. Positivité du produit scalaire : $\vec{u}^2\geq 0$.

5. produit scalaire est non dégénéré : $\vec{u}.\vec{u}=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$.

6. orthogonalité de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$

03. Base et repère (orthonormé direct)

Définitions :

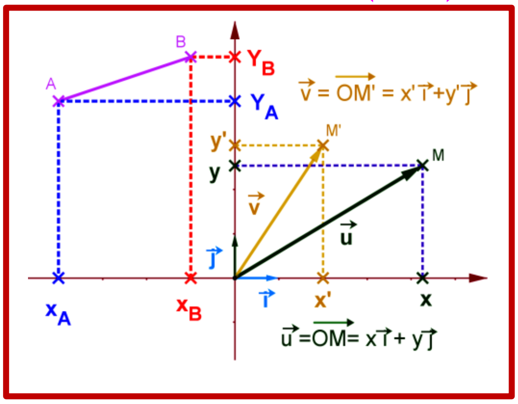
- $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires du plan (P) . le couple $B=\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ s'appelle base du plan . on dit que le plan (P) est rapporté à la base $B=\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ (ou encore le plan (P) est muni à la base $B=\left(\vec{i},\vec{j}\right)$)
- O est un point de (P) et $B=\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est une base de (P) le triplet $R=\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ s'appelle repère de (P) . on dit que le plan est rapporté au repère $R=\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (ou encore le plan est muni au repère R)

- $B=\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est une base orthonormée si et seulement si $\vec{i}.\vec{j}=0$ et $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=1$. Dans ce cas le repère $R=\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est appelé repère orthonormé .
- $B=\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est une base orthonormée directe si et seulement si $B=\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est une base orthonormée et $\overline{\left(\vec{i},\vec{j}\right)}\equiv\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$. $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=1$. Dans ce cas le repère $R=\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est appelé repère orthonormé direct .

II. L'expression analytique du produit scalaire et la norme d'un vecteur dans un repère orthonormé :

Remarque : dans toute la suite du chapitre le plan (P) est rapporté à un repère $R=\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ orthonormé direct

A. L'expression analytique de : $\vec{u}.\vec{v}$ et $\left\|\vec{u}\right\|$ et AB



01. Activité :

$\vec{u}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}(x',y')=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs du plan (P).

1. Calculer : $\vec{u}.\vec{v}$ en fonction de x et y et x' et y' puis $\left\|\vec{u}\right\|$ $\vec{u}.\vec{v}$ en fonction de x et y .
2. Donner une condition nécessaire et suffisante en fonction de x et y et x' et y' tel que $\vec{u}\perp\vec{v}$.
3. Calculer la distance AB en fonction des cordonnées de $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$.
4. Donner la propriété .

02. Propriété :

$\vec{u}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}(x',y')=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs du plan (P) . on a :

- $\vec{u}.\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=(x,y).(x',y')=xx'+yy'$.
- . $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{x^2+y^2}$.
- $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{\left(x_B^2-x_A^2\right)+\left(y_B^2-y_A^2\right)}$ avec $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$.
- $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow xx'+yy'=0$.

03. Exemple :

On donne : $\vec{u}(2,-4)$ et $\vec{v}(-1,2)$ et $A(1,0)$ et $B(-1,0)$.

1. Calculer : $\vec{u}.\vec{v}$ et $\left\|\vec{u}\right\|$ et AB .
2. Déterminer le vecteur $\vec{v}(x,y)$ unitaire et colinéaire à $\vec{v}$ (c.à.d. $\left\|\vec{v}\right\|=1$) .
3. Montrer que : le triangle ABC est rectangle en A tel que : $A(1,3)$ et $B(3,1)$ et $C(-3,-1)$.
4. Déterminer un vecteur directeur de la hauteur issue du sommet A.

- triangulaire) .

III. Formules de : $\sin\overline{\left(\vec{u};\vec{v}\right)}$ et $\cos\overline{\left(\vec{u};\vec{v}\right)}$:

A. Formules de : $\sin\overline{\left(\vec{u};\vec{v}\right)}$ et $\cos\overline{\left(\vec{u};\vec{v}\right)}$:

01. Activité :

$\vec{u}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}(x',y')=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs non nuls de (P) . on pose $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv\alpha\ (2\pi)$ et le vecteur $\vec{w}(-y;x)$. (voir la figure)

1. Donner : $\cos\overline{(\vec{u};\vec{v})}$ en fonction de x et y et x' et y' .
2. Calculer $\vec{v}.\vec{w}$ et $\det(\vec{u},\vec{v})$ et $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{w}\|$; quelle remarque peut-on tirer ?
3. Montrer que : $\overline{(\vec{v},\vec{w})}\equiv\frac{\pi}{2}-\alpha\ (2\pi)$ (on peut utiliser $\overline{(\vec{u};\vec{w})}\equiv\overline{(\vec{u};\vec{v})}+\overline{(\vec{v};\vec{w})}:(2\pi)$) .
4. Donner l'expression trigonométrique de $\vec{v}.\vec{w}$ et on déduit que : $\sin\alpha$ (réponse : $\left(\sin\alpha=\frac{\vec{v}.\vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}=\frac{\vec{v}.\vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|}\right)$) .
5. on déduit $\sin\alpha$: en fonction de $\det(\vec{u};\vec{v})$ et $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{w}\|$; puis en fonction de x et y et x' et y' (réponse $\left(\sin\alpha=\frac{\det(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}\right)$) .

02. propriété :

$\vec{u}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}(x',y')=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs non nuls de (P) avec $\overline{(\vec{u},\vec{v})}\equiv\alpha\ (2\pi)$.

on a : $\cos\theta=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$ et $\sin\theta=\frac{\det(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}=\frac{xy'-yx'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$.

B. l'aire (ou surface) d'un triangle et d'un parallélogramme :

01. Activité :

Dans le plan (P) on considère un triangle ABC non aplati et H la projection orthogonale de C sur la droite (AB) .

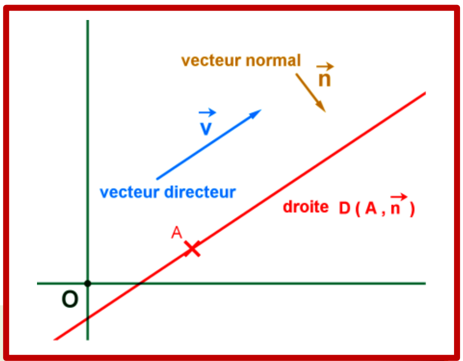
1. Donner la surface S de ABC.
2. Exprimer S en fonction de $\left|\sin\left(\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}\right)\right|$.
3. Exprimer S en fonction de $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
4. On déduit la surface du parallélogramme $ABCD$.

02. Propriété :

ABC est un triangle dans le plan (P) .

- La surface S_{ABC} du tringle ABC est : $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right|$.
- La surface S_{ABCD} du tringle ABC est : $S_{ABCD}=\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right|$.

IV. La droite dans le plan (étude analytique) :



A. vecteur normal :

01. Activité :

$D(A,\vec{u})$ est une droite dans le plan (P) . Que remarquez-vous ?

02. Définition :

> $D(A,\vec{u})$ est une droite dans le plan (P) .
> Tout vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal au vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $D(A,\vec{u})$ s'appelle vecteur normal à la droite $D(A,\vec{u})$.

03. remarque :

- Les vecteurs $\alpha\vec{n}$ (avec $\alpha \neq 0$) sont normaux à la droite $D(A,\vec{u})$.
- $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont normaux à la droite $D(A,\vec{u})$ donc $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires .
- $\vec{n}(a,b)$ normal à la droite (D) équivaut $\vec{u}(-b,a)$ est un vecteur directeur à la droite (D) .

B. Ensemble des points M tel que $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$

01. Activité :

A est un point de (P) et $\vec{n}$ est un vecteur non nul de (P) .

1. Déterminer l'ensemble des points $M(x,y)$ de (P) tel que $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$.

02. Propriété :

> l'ensemble des points $M(x,y)$ de (P) tel que $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ est la droite $D(A,\vec{n})$ passant par A dont le vecteur normal est $\vec{n}$.

C. Equation cartésienne de la droite $D(A,\vec{n})$:

01. Activité :

$D(A,\vec{u})$ est une droite dans le plan (P) tel que $A(x_A,y_A)$ et $\vec{n}(a,b)$ est un vecteur normal de $D(A,\vec{u})$; $M(x,y)$ est un point de (P) .

1. Montrer que : $M(x,y)\in D(A,\vec{n}) \Rightarrow ax+by+c=0$; on détermine c .
2. On étudier la réciproque : E est l'ensemble des points $M(x,y)$ de (P) tel que $ax+by+c=0$ avec $(a,b)\neq(0,0)$ montrer que l'ensemble E est la droite $D(A,\vec{n})$.

02. Propriété et définition :

> - $M(x,y)$ est un point de (P) appartient à la droite $D(A(x_A,v) ; \vec{n}(a,b))$ si et seulement si $ax+by+c=0$ et $(a,b)\neq(0,0)$ et $c=-ax_A-by_A$.
> - $ax+by+c=0$ s'appelle l'équation cartésienne de la droite $D(A,\vec{n})$

03. Remarque :

Pour l'équation cartésienne $(D) : ax+by+c=0$ on a :

- $\vec{n}(a,b)$ vecteur normal à la droite (D) .
- $\vec{u}(-b,a)$ vecteur directeur à la droite (D) .

04. Application :

1. Donner l'équation cartésienne de la droite $D\left(A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix};\vec{n}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}\right)$.
2. On considère le triangle ABC tel que $A(2,1)$ et $B(0,1)$ et $C(-2,3)$.
   a. Déterminer les équations cartésiennes du la médiatrice de $[AB]$ et $[AC]$.
   b. Déterminer Ω le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

Correction :

1. Equation cartésienne de la droite $D\left(A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix};\vec{n}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}\right)$. On a :

- $\vec{n}(1,5)$ est un vecteur normal à la droite (D) donc une équation est de le forme $(D):1x+5y+c=0$.
- Le point $A\in(D)$ donc : $A(2,0)\in(D):1\times2+5\times0+c=0$ d'où $c=-2$.

Conclusion : Equation cartésienne est $(D):1x+5y-2=0$.

2. les équations cartésiennes du la médiatrice de $[AB]$ et $[AC]$.

a. Equation cartésienne de (D_1) la médiatrice de $[AB]$.

- (D_1) médiatrice de $[AB]$ donc $(AB)\perp(D_1)$ d'où $\overrightarrow{AB}$ est normal à la droite (D_1) .
- $I(1,1)$ est le milieu de $[AB]$ donc (D_1) passe par I .

D'où : $M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0$$

Donc : $(D_1):x-1=0$

b. Equation cartésienne de (D_1) la médiatrice de $[AC]$.

- (D_2) médiatrice de $[AC]$ donc $(AC)\perp(D_1)$ d'où $\overrightarrow{AC}$ est normal à la droite (D_2) .
- $J(-1,2)$ est le milieu de $[AC]$ donc (D_2) passe par J .

D'où : $M(x;y)\in(D')\Leftrightarrow \overrightarrow{JM}.\overrightarrow{BC}=0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+1\\y-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow -2(x+1)+2(y-2)=0$$

$$\Leftrightarrow -2x+2y-6=0$$

Donc : $(D_2): -x+y-3=0$

b. On détermine Ω le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .
On sait que l'intersection des médiatrices est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

Donc : $\Omega(x,y)\in(D)\cap(D') \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ -x+y-3=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$

D'où : $\Omega(1,4)$.

Conclusion : $\Omega(1,4)$ est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

D. Orthogonalité de deux droites (D) et (D') :

01. Activité :

1. $D(A,\vec{u})$ et $D'(B,\vec{u'})$ deux droites de (P) dont-on a les vecteurs directeur .

Déterminer une condition nécessaire et suffisante tel que $(D')\perp(D)$.

2. $D(A,\vec{n})$ et $D'(B,\vec{n'})$ deux droites de (P) dont-on a les vecteurs normaux .

Déterminer une condition nécessaire et suffisante tel que $(D')\perp(D)$.

02. Propriété :

On considère les droites (D) et (D') d'équations cartésiennes : (D) : $ax+by+c=0$ et (D') : $a'x+b'y+c'=0$ tel que $\vec{n}(a,b)$ et $\vec{n'}(a',b')$ sont les vecteurs normaux respectivement à (D) et (D') . on a : $(D')\perp(D) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow aa'+bb'=0$.

03. Application :

Déterminer une équation cartésienne d'une droite (D') orthogonale à (D) tel que :

(D) : $2x+y-3=0$.

E. Distance d'un point à une droite (D) .

01. Activité :

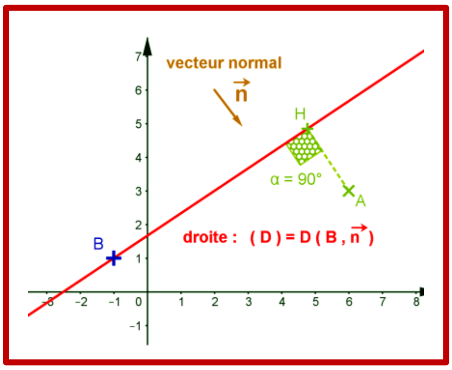
Comment on détermine la plus proche distance du point A à la droite (D) .

02. Définition :

$D(A,\vec{u})$ est une droite du plan (P) et A est un point de (P) et H sa projection orthogonale sur (D) . la distance AH est appelée la distance de A à (D) et on note $d(A,(D))=d=AH$.

03. Activité :

$D(A,\vec{u})$ est une droite du plan (P) tel que son équation cartésienne est $(D): ax+by+c=0$ et $A(x_A,y_A)$ est un point de (P) et $H(x_H,y_H)$ sa projection orthogonale sur (D) .



1. Montrer que $c = -ax_H - by_H$ puis $\left|\vec{n}.\overrightarrow{AH}\right| = \left|ax_A + by_A + c\right|$.
2. Montrer que $\left|\vec{n}.\overrightarrow{AH}\right| = \left|ax_A + by_A + c\right|$.
3. On déduit AH en fonction de a et b et x_A et y_A .

04. Propriété :

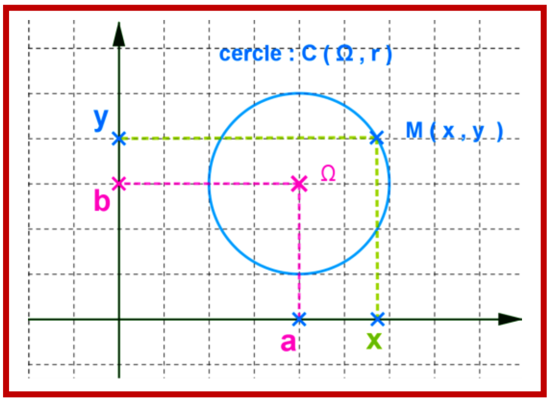
La distance du point $A(x_A, y_A)$ de (P) à une droite d'équation cartésienne $(D) : ax + by + c = 0$ est : $d(A;D) = \dfrac{\left|ax_A + by_A + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

05. Exemple :

$(D') : -x + y - 3 = 0$ et $A(2,5)$ on a $d(A;D) = \dfrac{\left|-2+5-3\right|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = 0$ donc $A \in (D)$.

V. Le cercle étude analytique :

A. Equation cartésienne du cercle $C(\Omega(a,b);r)$.



01. Activité :

$\Omega(a,b)$ est un point de $(\mathcal{P})$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$, $(r > 0)$.

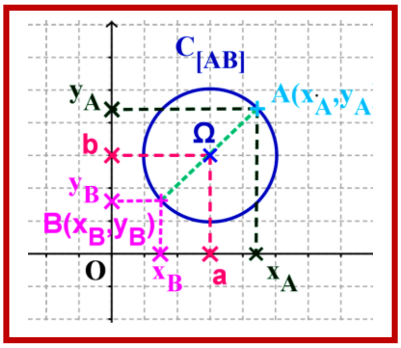
1. Compléter l'équivalence suivant on utilise a et b et x et y

$M(x,y) \in C(\Omega(a,b);r) \Leftrightarrow \cdots\cdots\cdots$

02. Propriété :

Tout cercle $C(\Omega(a,b);r)$ du plan (P) a pour équation cartésienne de la forme $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ou encore : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ avec $c = a^2 + b^2 - r^2$.

03. Exemple :



- Donner équation cartésienne du cercle $C(\Omega(0,0);1)$.
- Donner équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$

  avec : $A(1;0)$ et $B(-1;0)$.

B. Equation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$.

01. Activité :

$M(x;y)$ est un point de (P) ; $C_{[AB]}$ est cercle de diamètre $[AB]$ avec $A \neq B$.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante de $M(x;y) \in C_{[AB]}$

02. Propriété :

Equation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$ est : $M(x;y) \in C[A;B] \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.

03. Exemple :

$A(1;0)$ et $B(-1;0)$ deux points de (P) . trouver équation cartésienne de $C_{[AB]}$.

Correction : On trouve équation cartésienne de $C_{[AB]}$.

On a : $M(x;y) \in C_{[A;B]} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y-0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Conclusion : $C_{[AB]} : x^2 + y^2 - 1 = 0$.

C. Le cercle passant par trois points :

Le cercle passant par trois A et B et C non alignés c'est le cercle circonscrit au triangle ABC tel que son centre Ω est l'intersections des médiatrices et son rayon est $r = \Omega A$.

D. Présentation paramétrique d'un cercle :

01. Activité :

$C(\Omega(a,b);r)$ est un cercle du plan (P) rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $\theta \in \mathbb{R}$; $\overline{(\vec{i},\overrightarrow{\Omega M})} \equiv \theta : (2\pi)$.

1. Calculer : $\vec{J}.\overrightarrow{\Omega M}$; $\vec{i}.\overrightarrow{\Omega M}$.
2. Déterminer les cordonnées du point M par rapport au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
3. D'après $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$, montrer que : $\begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ y = b + R\sin\theta \end{cases}$.

02. Propriété :

$C(\Omega(a,b);r)$ est un cercle du plan (P) rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $\theta \in \mathbb{R}$; $\overline{(\vec{i},\overrightarrow{\Omega M})} \equiv \theta : (2\pi)$; pour tout $M(x,y)$ du plan (P) on a : $\begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ y = b + R\sin\theta \end{cases}$.

On l'appelle présentation paramétrique d'un cercle $C(\Omega(a,b);r)$.

03. Exemple :

Donner présentation paramétrique d'un cercle trigonométrique lié au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ ($C(O(0,0);1)$)

E. Etude l'ensemble des points : $\{M(x,y) / x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\}$. avec a et b et c de $\mathbb{R}$

01. Activité :

1. Trouver l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan (P) qui vérifie $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.
2. Donner la propriété

02. Propriété :

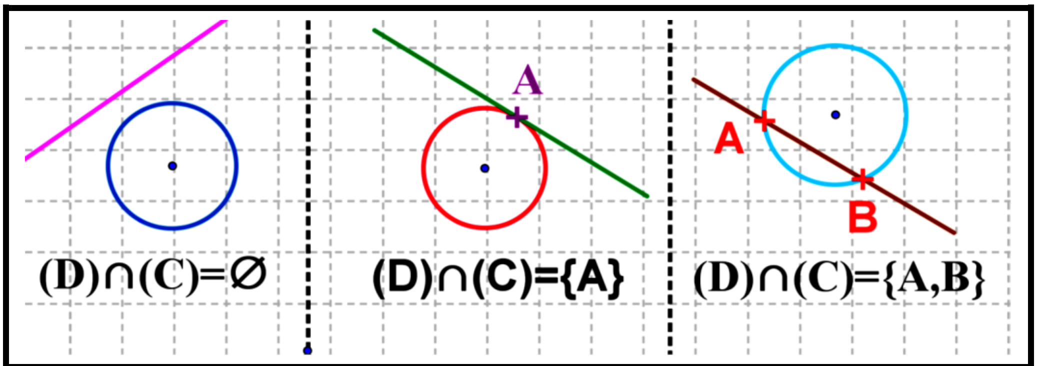
l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan (P) qui vérifie $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ est :

- Si $A = a^2 + b^2 - 4c < 0$ on a : $S = \varnothing$.
- Si $A = a^2 + b^2 - 4c = 0$ on a : $S = \left\{\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)\right\}$ (un point et un seul qui est $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$)
- Si $A = a^2 + b^2 - 4c > 0$ on a : $S = (C) = C\left(\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right) ; r = \frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}\right)$ (un cercle) .

F. Etude les positions relatives d'un cercle et une droite .

01. Activité :

Tracer les positions relatives d'une droites (D) et un cercle (C) , puis donner les définitions et les propriétés .

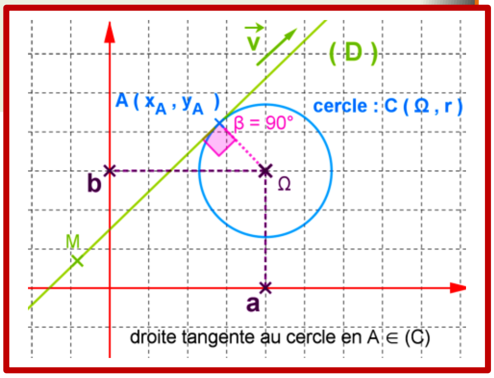


La droite (D) et le cercle (C) sont disjoints	La droite (D) est tangente au cercle (C) en $A \in (C)$	La droite (D) coupe le cercle en 2 points A et B

02. Définitions et propriétés :

(D) est une droite du plan (P) et (C) est un cercle du plan (P) de centre Ω et de rayon r .

- (D) est à l'extérieure du cercle (C) ((D) et (C) sont disjoints $(D)\cap(C)=\varnothing$) .
  (D) coupe le l'extérieure du cercle (C) si et seulement si $d(\Omega,(D))>r$
- (D) coupe le cercle (C) en deux points A et B ($(D)\cap(C)=\{A,B\}$) .
  (D) coupe le cercle (C) si et seulement si $d(\Omega,(D))<r$
- (D) est tangente au cercle (C) ($(D)\cap(C)=\{A\}$) .
  (D) est tangente au cercle (C) si et seulement si $d(\Omega,(D))=r$



G. Equation cartésienne d'une droite tangente à un cercle en un point A du cercle .

01. Activité :

$D(A,\vec{u})$ est une droite du plan (P) et A est un point d' un cercle $C(\Omega,r)$ tel que (D) est tangente à (C) .

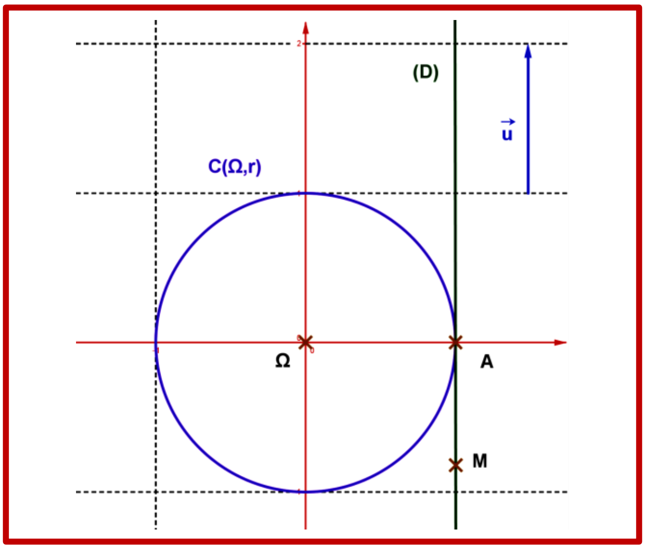
1. Trouver condition nécessaire et suffisante tel que $M(x,y)$ appartienne à (D) .
2. On déduit l'équation cartésienne de $D(A;\vec{u})$; puis donner la propriété .

02. Propriété :

l'équation cartésienne de la droite $D(A;\vec{u})$ tangente au cercle $C(\Omega,r)$ en un point $A(x_A,y_A)$ de $C(\Omega,r)$ est : $\overrightarrow{\Omega A}.\vec{u}=0$ ou encore $\begin{pmatrix} x_A-a \\ y_A-b \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}=0$.

03. Exemple :

Géométriquement donner l'équation cartésienne de la droite $D(A;\vec{u})$ qui tangente au cercle (C) .



VI. Ensemble des points M du plan (P) tel que : $MA^2 - MB^2 = k$; $MA^2 + MB^2 = k$; avec $k \in \mathbb{R}$.

A et B deux points de (P) tel que : $AB = 6$ et I est le milieu de $[AB]$.

1^er cas : $MA^2 + MB^2 = k$.

1. Déterminer (G_1) l'ensemble des points M de (P) tel que $MA^2 + MB^2 = 68$.
2. Déterminer (G_2) l'ensemble des points M de (P) tel que $MA^2 + MB^2 = 18$.
3. Déterminer (G_3) l'ensemble des points M de (P) tel que $MA^2 + MB^2 = 4$.

2^ième cas : $MA^2 - MB^2 = k$.

1. Déterminer (H_1) l'ensemble des points M de (P) tel que $MA^2 - MB^2 = 0$.
2. Déterminer (H_2) l'ensemble des points M de (P) tel que $MA^2 - MB^2 = 36$.

▲ **Remarque :**

On peut étudier les 2 cas précédents dans le cas général c.à.d. $k \in \mathbb{R}$ et AB et on discute avec disjonction des cas .