

BARYCENTRE

I) ACTIVITES

Activité 1 : Sur une barre rigide de poids négligeable et de longueur $1m$ on considère deux boules métalliques de $500g$ en A et de $350g$ en B . M un point sur la barre. Déterminer la position de M sachant que le système est en équilibre.



Activité 2 : Soit ABC un triangle rectangle en A et $AC = 2AB$.

1- Montrer qu'il existe un et un seul point G tel que : $2\vec{AG} - 2\vec{BG} + 2\vec{CG} = \vec{0}$

2- Tracer le point G .

3- Si le plan est rapporté au repère $(A; \vec{AB}; \vec{AI})$

où I est milieu de $[AC]$, quels seront les coordonnées du point G .

II) DEFINITIONS ET PROPRIETES :

1) Vocabulaires

Définitions : Soit A un point et α un réel non nul ; le couple (A, α) s'appelle un point pondéré. Plusieurs points pondérés constituent un système pondéré

2) Barycentre de deux points pondérés.

2.1 Définitions.

Propriété : Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$

l'application $f_2 : P \rightarrow V_2$ tel que :

$f_2(M) = \alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB}$ est une bijection et il existe

un et un seul point G qui vérifie $f_2(G) = \vec{0}$

Définition : Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré

tel que $\alpha + \beta \neq 0$; le barycentre du système pondéré Σ est le point G qui vérifie :

$$\alpha \vec{AG} + \beta \vec{BG} = \vec{0}$$

On écrit : $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

2.2 Propriétés de barycentre de deux points pondérés.

Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$

et $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ On a donc :

$$\alpha \vec{AG} + \beta \vec{BG} = \vec{0}$$

et par suite : pour tout réel k non nul on a :

$$k\alpha \vec{AG} + k\beta \vec{BG} = \vec{0}$$

et donc $G = \text{Bar}\{(A, k\alpha); (B, k\beta)\}$.

Propriété :

a) Le barycentre d'un système pondéré de deux points ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul

b) Si $\alpha = \beta$ le barycentre du système pondéré $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ s'appelle l'isobarycentre de A et B qui n'est que le milieu du segment $[AB]$.

Construction :

• **Exemple1 :** Construire $G = \text{Bar}\{(A, 4); (B, -5)\}$

$G = \text{Bar}\{(A, 4); (B, -5)\}$ donc : $4\vec{AG} - 5\vec{BG} = \vec{0}$

$$4\vec{AG} + 5(\vec{GA} + \vec{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow -4\vec{GA} + 5\vec{GA} + 5\vec{AB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{GA} + 5\vec{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AG} = 5\vec{AB}$$

Donc le point $G \in (AB)$



Exemple2 :

Construire $G = \text{Bar}\{(A, \sqrt{8}); (B, -\sqrt{2})\}$

$$G = \text{Bar}\{(A, \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{8}); (B, \frac{1}{\sqrt{2}} \times (-\sqrt{2}))\}$$

donc : $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -1)\}$

• Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$

et $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ On a donc par suite :

$$\alpha \vec{AG} + \beta \vec{BG} = \vec{0}$$

soit M est un point quelconque dans le plan (P)

on a donc :

$$\alpha(\vec{AM} + \vec{MG}) + \beta(\vec{BM} + \vec{MG}) = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha + \beta)\vec{MG} + \alpha\vec{AM} + \beta\vec{BM} = \vec{0}$$

$$\text{d'où : on conclut que : } \vec{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \vec{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{MB}$$

Propriété : Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$

et $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$. Pour tout point M du

$$\text{plan } (P) \text{ on a : } \vec{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \vec{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{MB}$$

$$\text{ou } (\alpha + \beta)\vec{MG} = \alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB}$$

Cette propriété s'appelle la propriété caractéristique du barycentre.

Propriété : Si $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ alors les points A, B et G sont alignés.

Preuve : Il suffit d'utiliser la propriété précédente en posant $A = M$ dans la propriété :

On aura : $\overrightarrow{AG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$

donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$

D'où les vecteurs \overrightarrow{AG} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires et par suite : les points A , B et G sont alignés.

Propriété : Le plan (P) et rapporté à un repère

$R(O; \vec{i}; \vec{j})$ Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ des points du plan et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ on a :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{OB}$$

et donc on a les coordonnées de G :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \end{cases}$$

Preuve : (Il suffit d'utiliser la propriété caractéristique du barycentre en posant $A = O$)

Exemples : 1) Dans le plan (P) rapporté à un repère $R(O; \vec{i}; \vec{j})$ Soient $A(3; 2)$ et $B(4; 1)$

Et soit $G = Bar\{(A, 1); (B, -5)\}$

Solution : on a : $\begin{cases} x_G = \frac{-x_A + 5x_B}{4} \\ y_G = \frac{-y_A + 5y_B}{4} \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_G = \frac{17}{4} \\ y_G = \frac{3}{4} \end{cases}$

Donc : $G\left(\frac{17}{4}; \frac{3}{4}\right)$

Exercice1 : soit ABC un triangle et soit :

$$I = Bar\{(B, 4); (C, -3)\}$$

Déterminer les coordonnées du point I dans le repère $R(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

Solution : on a : donc $(4 + (-3))\overrightarrow{AI} = 4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

donc $\overrightarrow{AI} = 4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ donc dans le repère

$$R(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \quad I(4; -3)$$

Exercice2 : E et F deux points du plan tels que : $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EF}$ et $E \notin (AB)$ et G est le barycentre des points $(A; 2)$ et $(B; -3)$

1) Montrer que G est le barycentre des points $(E; -1)$ et $(F; 2)$

2) en déduire que les droites (EF) et (AB) se coupent et déterminer le point d'intersection

solution : $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \overrightarrow{EG} = 2(\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF})$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EG} + 2\overrightarrow{GF} \Leftrightarrow -\overrightarrow{EG} - 2\overrightarrow{GF} = \vec{0}$$

$-\overrightarrow{GE} + 2\overrightarrow{GF} = \vec{0}$ donc G est le barycentre des points $(E; -1)$ et $(F; 2)$

2) on a G le barycentre des points $(E; -1)$ et $(F; 2)$ donc $G \in (EF)$ et on a G est le barycentre des points $(A; 2)$ et $(B; -3)$ donc $G \in (AB)$

Donc les droites (EF) et (AB) se coupent en G

Exercice3 : Dans le plan (P) rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ Soient $A(0; 5)$ et $B(3; 2)$

Et soit $G = Bar\{(A, 1); (B, 2)\}$

1) Déterminer les coordonnées de G

2) Déterminer et dessiner l'ensemble suivant :

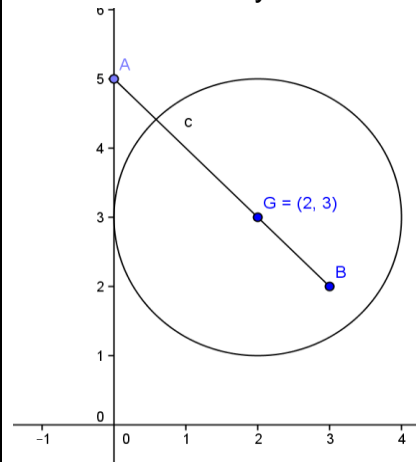
$$(C) = \{M \in (P) / \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = 6\}$$

Solution : $\begin{cases} x_G = \frac{0+6}{3} = 2 \\ y_G = \frac{5+4}{3} = 3 \end{cases}$ donc $G(2; 3)$

D'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = 6cm \Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MG}\| = 6cm$

$$\Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MG}\| = 6cm \Leftrightarrow 3MG = 6cm \Leftrightarrow MG = 2cm$$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon $r = 2cm$



3) Barycentre de trois points pondérés

Propriété :

Soit $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ l'application :

$$f_3 : P \rightarrow V_2 \text{ tel que : } f_3(M) = \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC}$$

est une bijection. Il existe un et un seul point G qui vérifie $f_3(G) = \vec{0}$

$$\text{c'est à dire : } \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Preuve : f_3 est l'application de Leibniz pour trois points

Propriété : Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

et $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

si M est un point quelconque dans le plan (P)

$$\text{on a : } \overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{MB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{MC}$$

$$\text{donc : } (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG} = \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC}$$

Preuve : Même démonstration que dans le cas précédent.

Construction :

• **Exemple :**

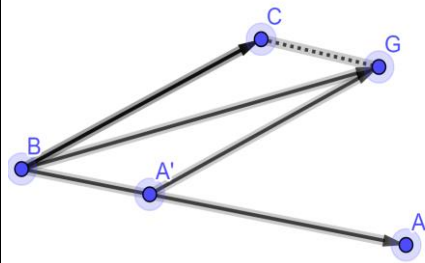
1° Construire $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 3)\}$

$G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 3)\}$ donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$$(1 + (-1) + 3) \overrightarrow{MG} = 1 \overrightarrow{MA} + (-1) \overrightarrow{MB} + 3 \overrightarrow{MC}$$

On pose : $M = B$ on aura :

$$3 \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + 3 \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$$



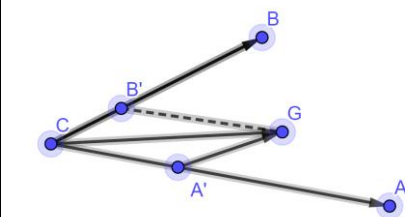
2° Construire $G = \text{Bar}\{(A, 4); (B, 1/2); (C, -3)\}$

Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$$(4 + 1/2 - 3) \overrightarrow{MG} = 4 \overrightarrow{MA} + 1/2 \overrightarrow{MB} - 3 \overrightarrow{MC}$$

On pose : $M = C$ on aura :

$$\frac{3}{2} \overrightarrow{CG} = 4 \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CG} = \frac{8}{3} \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{CB}$$



Exercice 4 : Soit ABC un triangle et G point tel que : $2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{GB}$

1) montrer que G le barycentre de :

$\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$ et construire le point G

$$\text{Solution : } 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{GB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

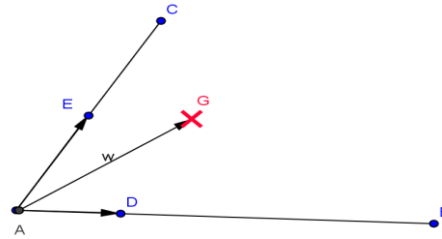
$$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}) - 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Donc G le barycentre de : $\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$

$$\text{On a : } \textcircled{R} \quad \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c} \overrightarrow{AC}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{4} \overrightarrow{AC}$$



Propriété : Le plan (P) et rapporté à un repère

$R(O; \vec{i}; \vec{j})$ Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$

des points du plan

et $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

$$\text{on a : } \overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{OB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{OC}$$

et donc on a les coordonnées de G :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \end{cases}$$

Propriété :

Le barycentre d'un système pondéré de trois points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre non nul :

$$\text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma) =$$

$$\text{Bar}\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\} \text{ pour } k \neq 0$$

Exercice :

Soit $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ où $\alpha + \beta \neq 0$ et

$$G' = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$$

Montrer que $G = \text{Bar}\{(G', (\alpha + \beta)); (C, \gamma)\}$

Propriété :

Si $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$

et $G' = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

Alors : $G = \text{Bar}\{(G', (\alpha + \beta)); (C, \gamma)\}$

Remarque : La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de trois points pondérés.

Exercice 5 : on utilisant La propriété d'associativité Construire le barycentre G du système pondéré $\{(A, 2); (B, -3); (C, 5)\}$

Solution : soit $E = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -3)\}$

d'après la propriété caractéristique du barycentre

$$\text{on a : } -\overrightarrow{ME} = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$$

$$\text{On pose : } M = A \text{ on aura : } -\overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{AB}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$$

d'après la Propriété d'associativité on a :

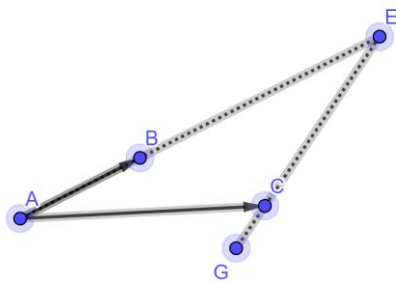
$$G = \text{Bar}\{(E, -1); (C, 5)\}$$

d'après la propriété caractéristique du barycentre

$$\text{on a : } 4\overrightarrow{MG} = -\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MC}$$

On pose : $M = E$ on aura :

$$4\overrightarrow{EG} = 5\overrightarrow{EC} \Leftrightarrow \overrightarrow{EG} = \frac{5}{4}\overrightarrow{EC}$$



Cas particulier

Si les poids α ; β et γ sont égaux le barycentre de $\{(A, \alpha); (B, \alpha); (C, \alpha)\}$ S'appelle le **centre de gravité** du triangle ABC .

Exercice 6 : Soit ABC un triangle et G le centre de gravité du triangle ABC et I le milieu du segment $[BC]$. Montrer que G est le centre de gravité de $(A;1)$ et $(I;2)$

Solution : G le centre de gravité du triangle ABC Donc G est le barycentre de :

$$\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$$

I le milieu du segment $[BC]$ Donc I est le

barycentre de : $\{(B, 1); (C, 1)\}$

D'après la Propriété d'associativité on a :

G est le barycentre de : $\{(I, 2); (A, 1)\}$

Exercice 7 : Soit ABC un triangle. Pour tout point M on pose : $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$

1) Réduire l'écriture de \vec{V} et montrer que \vec{V} ne dépend pas du point M

2) soit $K = \text{Bar}\{(C, -3); (B, 1)\}$ montrer que : $\vec{V} = 2\overrightarrow{KA}$

3) soit $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -1); (C, -3)\}$ montrer que : Pour tout point M on a :

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{GM}$$

4) en déduire l'ensemble des points M tel que $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\|$

Solution : 1)

$$\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})$$

$$\vec{V} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} \text{ donc } \vec{V} \text{ ne dépend pas du point } M$$

2) on a : $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ Pour tout point M donc si $M = K$ on aura :

$$2\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} - 3\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$$

Et on a : $K = \text{Bar}\{(C, -3); (B, 1)\}$ donc : $\overrightarrow{KB} - 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$

$$\text{Donc : } 2\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} \text{ donc : } 2\overrightarrow{KA} = \vec{V}$$

3) d'après la propriété caractéristique du

barycentre on a :

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = (2 + (-1) + (-3))\overrightarrow{MG} = -2\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{GM}$$

$$4)\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\|$$

$$\Leftrightarrow \|2\overrightarrow{GM}\| = \|2\overrightarrow{KA}\| \Leftrightarrow 2GM = 2KA \Leftrightarrow GM = KA$$

Donc l'ensemble des points est le cercle (C) de centre G et de rayon $r = KA$

Exercice 8 : Soit ABC un triangle tel que :

$AC = 6\text{cm}$ et $AB = 5\text{cm}$ et $BC = 4\text{cm}$

a) Construire G le barycentre de :

$$\{(A, 1); (B, 2); (C, 1)\}$$

b) Déterminer et Construire l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = AC$

c) Déterminer et Construire l'ensemble (F) des points M du plan tel que :

$$\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC}\|$$

Solution : G est le barycentre de :

$\{(A, 1); (B, 2); (C, 1)\}$ donc G est le barycentre de : $\{(B, 2); (I, 2)\}$ d'après La propriété d'associativité du barycentre

Donc G est le milieu du segment $[BI]$

b) D'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $\|4\overrightarrow{MG}\| = AC \Leftrightarrow GM = \frac{AC}{4} = 1.5$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon $r = 1.5\text{cm}$

b) Soit G' est le barycentre de :

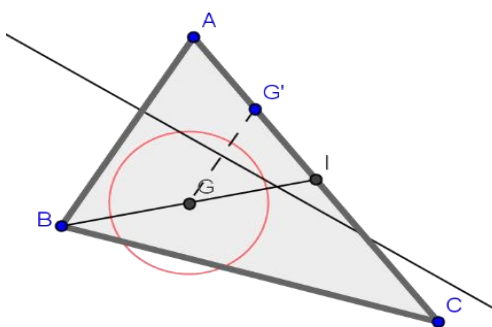
$\{(A, 3); (C, 1)\}$ Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $\forall M \in (P)$

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG} \text{ et } 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG'}$$

$$\text{Donc : } M \in (F) \Leftrightarrow 4MG = 4MG' \Leftrightarrow MG = MG'$$

Donc : (F) est la médiatrice du segment $[GG']$

Et pour construire le point G' on a : $\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$



5) Barycentre de quatre points pondérés

Propriété :

Soit $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$ l'application :

$f_4 : P \rightarrow V_2$ tel que :

$$f_4(M) = \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} + \delta \overrightarrow{MD}$$

Est une bijection. Il existe un et un seul point G qui vérifie $f_4(G) = \vec{0}$

c'est à dire : $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} + \delta \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

Preuve : f_4 est l'application de Leibniz pour quatre points

Propriété :

Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$ et

$G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$

si M est un point quelconque dans le plan (P)

$$\text{on a : } \overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{s} \overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{s} \overrightarrow{MB} + \frac{\gamma}{s} \overrightarrow{MC} + \frac{\delta}{s} \overrightarrow{MD}$$

où $s = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

Preuve : Même démonstration que dans les cas précédents.

Propriété : Le plan (P) et rapporté à un repère

$R(O; \vec{i}; \vec{j})$ Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$

et $D(x_D; y_D)$ des points du plan

$G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$

$$\text{on a : } \overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{s} \overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{s} \overrightarrow{OB} + \frac{\gamma}{s} \overrightarrow{OC} + \frac{\delta}{s} \overrightarrow{OD}$$

Et donc on a les coordonnées de G :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C + \delta x_D}{s} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C + \delta y_D}{s} \end{cases}$$

où $s = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

Propriété : Le barycentre d'un système pondéré de quatre points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre

Non nul : $\text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\} =$

$\text{Bar}\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma); (D, k\delta)\}$

pour $k \neq 0$

Propriété : Si $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$

avec $\alpha + \beta \neq 0$ et $\gamma + \delta \neq 0$

Si $G' = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

et $G'' = \text{Bar}\{(C, \gamma); (D, \delta)\}$

Alors $G = \text{Bar}\{(G', (\alpha + \beta)); (G'', (\gamma + \delta))\}$

Remarque : La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de quatre points pondérés.

Exercice9 : Dans le plan (P) rapporté à un

repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ Soient $A(-1;1)$ et $B(0;2)$ et $C(1;-1)$

et $D(1;0)$ Et soit $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$

1) Déterminer les coordonnées de

$K = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 3)\}$

2) Déterminer les coordonnées de L le centre de gravité du triangle ABC

3) Déterminer les coordonnées de Barycentre des points $(A;2)$ et $(B;3)$ et $(C;1)$ et $(D;-1)$

Solution :1)
$$\begin{cases} x_K = \frac{-2+0}{5} = -\frac{2}{5} \\ y_K = \frac{2+6}{5} = \frac{8}{5} \end{cases} \text{ donc } K\left(-\frac{2}{5}; \frac{8}{5}\right)$$

2) les coordonnées de L sont :

$$\begin{cases} x_L = \frac{1x_A + 1x_B + 1x_C}{1+1+1} \\ y_L = \frac{1y_A + 1y_B + 1y_C}{1+1+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L = \frac{1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1}{1+1+1} = 0 \\ y_L = \frac{1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times (-1)}{1+1+1} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Donc $L\left(0; \frac{2}{3}\right)$

$$\begin{cases} x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C + dx_D}{a+b+c+d} \\ y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C + dy_D}{a+b+c+d} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{2 \times x_A + 3 \times x_B + 1 \times x_C + (-1) \times x_D}{5} = -\frac{2}{5} \\ y_G = \frac{2 \times y_A + 3 \times y_B + 1 \times y_C + (-1) \times y_D}{5} = \frac{7}{5} \end{cases}$$

$G\left(-\frac{2}{5}; \frac{7}{5}\right)$

Application : $ABCD$ un rectangle tel que :

$AB = 2BC$ Construire le barycentre du système pondéré $\{(A, -2); (B, 3); (C, 1); (D, 1)\}$

Cas particulier : Si les poids $\alpha; \beta$ et γ sont égaux le barycentre de :

$\{(A, \alpha); (B, \alpha); (C, \alpha); (D, \delta)\}$ s'appelle le **centre de gravité** du quadrilatère convexe $ABCD$

Exercice10 : soit $ABCD$ un quadrilatère convexe

Soit H le barycentre du système pondéré

$\{(A, 2); (B, 5); (C, -1)\}$

Soit K le barycentre du système pondéré

$\{(B, 5); (C, -1); (D, 6)\}$

Soit $E = \text{Bar}\{(C, -1); (B, 5)\}$

1) Montrer que $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$ et Construire E

2) Montrer que H est le barycentre du système pondéré $\{(A, 1); (E, 2)\}$ et Construire H

3) Montrer que K est le barycentre du système pondéré $\{(D, -3); (E, 2)\}$

4) a) Montrer que D est le barycentre du système pondéré $\{(K, 1); (E, 2)\}$

b) en déduire que $(AK) \parallel (DH)$

Solution :

1) on sait que si M est un point quelconque dans le plan (P) on a :

$$\overrightarrow{ME} = \frac{1}{4}(5\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})$$

Pour : M=B on a : $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et on peut

Construire E

2) on a : E = Bar $\{(C, -1); (B, 5)\}$ et $5 + (-1) = 4$

D'après La propriété d'associativité on a H le barycentre du système pondéré $\{(A, 2); (E, 4)\}$ et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que H est le barycentre du système pondéré

$\{(A, 1); (E, 2)\}$

on sait que si M est un point quelconque dans le plan (P) on a :

$$\overrightarrow{MH} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MA})$$

Pour : M=A on a : $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ et on peut

Construire E

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que K le barycentre du système

Pondéré $\{(D, -6); (E, 4)\}$

Et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que K est le barycentre du système pondéré

$\{(D, -3); (E, 2)\}$

4) a) Montrons que D est le barycentre du système pondéré $\{(K, 1); (E, 2)\}$?

Puisque K est le barycentre du système pondéré $\{(D, -3); (E, 2)\}$

Pour tout point M du plan (P) on a :

$$-\overrightarrow{MK} = -3\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{ME}$$

$$\text{Donc : } 3\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MK} + 2\overrightarrow{ME}$$

Donc : D est le barycentre du système pondéré $\{(K, 1); (E, 2)\}$

4) b) Pour tout point M du plan (P) on a :

$$3\overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MA} \text{ et } 3\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MK}$$

$$\text{Donc : } 3\overrightarrow{DH} = 3\overrightarrow{MH} - 3\overrightarrow{MD}$$

$$3\overrightarrow{DH} = 3(\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{MD})$$

$$\text{Donc : } 3\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MK}$$

$$\text{Donc : } (AK) \parallel (DH) : \text{Donc } 3\overrightarrow{DH} = -\overrightarrow{AK}$$

Exercice11 : ABC un triangle

I et J et K points tels que : $2\overrightarrow{BI} = 3\overrightarrow{BC}$

Et $8\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CA}$ et $5\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB}$

1) Montrer que I est le barycentre des points

pondéré $\left(B; \frac{1}{2}\right)$ et $\left(C; \frac{-3}{2}\right)$

2) le plan (P) est rapporté au repère

$$R(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$$

a) Déterminer les coordonnées du point J

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (IK)

c) Montrer que les points I et J et K sont alignés.

Solution : 1)

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{BI} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BI} - \frac{3}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BI} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{BI} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

Donc : $\frac{1}{2}\overrightarrow{BI} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CI} = \vec{0}$ par suite : I est le

barycentre des points pondéré $\left(B; \frac{1}{2}\right)$ et $\left(C; \frac{-3}{2}\right)$

2) dans le repère $R(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ on a : A(0;0) et

B(1;0) et C(0;1)

a) on a : $8\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CA}$ donc : $8\overrightarrow{CA} + 8\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{CA}$

$$\text{donc : } 8\overrightarrow{AJ} = -7\overrightarrow{CA} \text{ donc : } \overrightarrow{AJ} = \frac{7}{8}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{donc : } J\left(0; \frac{7}{8}\right)$$

b) la droite (IK) passe par I et de vecteur directeur

\overrightarrow{IK} et on a : I est le barycentre de $\left(B; \frac{1}{2}\right)$ et

$$\left(C; \frac{-3}{2}\right) \text{ donc : } \begin{cases} x_I = \frac{\frac{1}{2} \times 1 - \frac{3}{2} \times 0}{-1} = -\frac{1}{2} \\ y_I = \frac{\frac{1}{2} \times 0 - \frac{3}{2} \times 1}{-1} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Donc : } I\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Et on a : } 5\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB} \text{ Donc : } \overrightarrow{AK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{Donc : } K\left(\frac{2}{5}; 0\right) \text{ Donc : } \overrightarrow{IK}\left(\frac{9}{10}; \frac{3}{2}\right)$$

L'équation cartésienne de la droite (IK) est :

$$\frac{3}{2}x - \frac{9}{10}y + c = 0$$

$$I \in (IK): \text{donc} : \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{9}{10}\left(\frac{3}{2}\right) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4} - \frac{27}{20} + c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{21}{10}$$

$$\text{donc} : (IK): \frac{3}{2}x - \frac{9}{10}y + \frac{21}{10} = 0$$

$$(IK): 15x - 9y + 21 = 0$$

c) pour Montrer que les points I et J et K sont alignés il suffit de montrer que $J \in (IK)$

$$\text{on a} : (IK): 15x - 9y + 21 = 0 \text{ et } J\left(0; \frac{7}{8}\right)$$

$$\text{et on a} : 15 \times 0 - 9 \times \frac{7}{8} + 21 = -21 + 21 = 0$$

par suite : $J \in (IK)$ donc les points I et J et K sont alignés.

Exercice12 : ABC un triangle et I un point tel que : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et K le symétrique de A par rapport à C et J le milieu du segment $[BC]$

1) exprimer I et J et K comme le barycentre de points pondérés à déterminer

2)quelle est le barycentre des points pondérés $(A;1); (B;2); (B;-2)$ et $(C;-2)$?

3)Monter que les points I et J et K sont alignés.

Solution :1)

• on a J le milieu du segment $[BC]$

Donc : J est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$

$$\bullet \text{ on a} : \overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{IB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \text{ Donc} : I \text{ est le barycentre des points pondéré } (A;1) \text{ et } (B;2)$$

• on a : K le symétrique de A par rapport à C

$$\text{Donc} : 2\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{KA}$$

$$\text{Donc} : \overrightarrow{KA} - 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$$

Donc : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(C;-2)$

2) on a : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(C;-2)$ donc :

$$1\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$$

Donc : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(B;2)$ et $(B;-2)$ et $(C;-2)$

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que K le barycentre des points pondéré $(J;-4)$ et

$(I;3)$ par suite : $K \in (IJ)$ donc les points I et J et K sont alignés.

Exercice13: ABCD un carré et I et J les milieux respectivement des segments $[BC]$ et $[CD]$ et M et

N deux points tel que : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

1)determiner le barycentre des points pondérés $\{(A, 3); (B, 1)\}$ et $\{(A, 3); (D, 1)\}$

2)soit G le barycentre des points pondérés $(A;3); (B;1); (C;1)$ et $(D;1)$

3)Monter que les droites (MJ) et (NI) et (AC) sont concourantes en G

Solution :1)on a : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$

$$\text{donc} : 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

Donc : M est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(B;1)$

$$\text{De même on a} : \overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{ND}$$

$$\text{donc} : 3\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$$

Donc : N est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(D;1)$

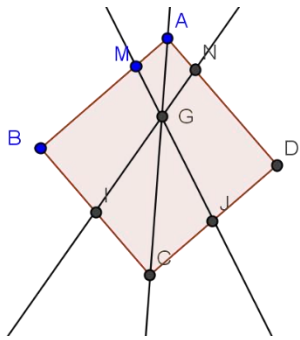
2) soit G le barycentre des points pondérés $(A;3); (B;1); (C;1)$ et $(D;1)$ et puisque J le milieu du segment $[DC]$ alors J est le barycentre des points pondéré $(C;1)$ et $(D;1)$

D'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(M;4)$ et $(J;2)$ par suite : $G \in (JM)$

De même on a : I le milieu du segment $[BC]$ alors I est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$ et d'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(N;4)$ et $(I;2)$ par suite : $G \in (NI)$

Soit H le centre de gravité du triangle BCD donc H est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$ et $(D;1)$ par suite D'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(H;3)$ donc : G le milieu du segment $[AH]$ et puisque ABCD est un carré alors : $H \in [AC]$ donc $G \in (AC)$

Conclusion : les droites (MJ) et (NI) et (AC) sont concourantes en G



Exercice14: A et B deux points tel que :
 $AB=4cm$ et soit (F) l'ensemble des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB} = 3$

1)montrer que : $M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0$

2)soit G le barycentre des points pondérés $(A;1) ; (B;3)$ et K le barycentre des points pondérés $(A;1) ; (B;-3)$

- a) Montrer que : $M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$
 b) En déduire l'ensemble (F) et le tracer

Solution : 1) $M \in (F) \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = 3 \Leftrightarrow MA = 3MB$

$$M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0$$

2)a)

$$M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) = 0$$

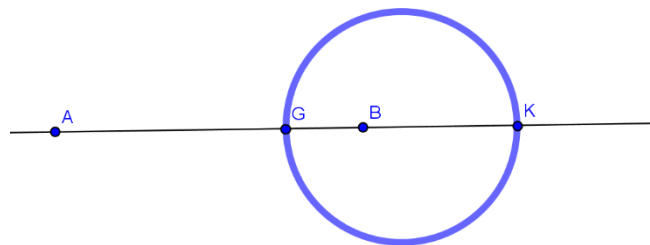
et d'après La propriété caractéristique du barycentre on aura :

$$\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MG} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MK}$$

$$\text{Donc : } M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow -8\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$$

$$\text{Donc : } M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$$

2)b) d'après a) en déduit que (F) est le cercle de dont un diamètre est $[GK]$



Exercice15: A et B deux points tel que :
 $AB=4cm$ et I le milieu du segment $[AB]$

1)soit (E) l'ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4$ et soit H le barycentre des points pondérés $(A;1) ; (B;3)$

a)montrer que : $H \in (E)$

b)vérifier que : $M \in (E) \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

c)déterminer la nature de l'ensemble (E)

2)soit (F) l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2 - MB^2 = 8$

a) Montrer que : $\forall M \in (P)$ on a :

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$$

b) En déduire que $(F) = (E)$ et le tracer

Solution : 1)on a : H le barycentre des points pondérés $(A;1) ; (B;3)$ donc : $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

$$\text{Et on a } \overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AH} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{IH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{donc } \overrightarrow{IH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \quad \text{par suite} \quad \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}AB^2 = 4$$

Donc $H \in (E)$

$$b) M \in (E) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IH}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

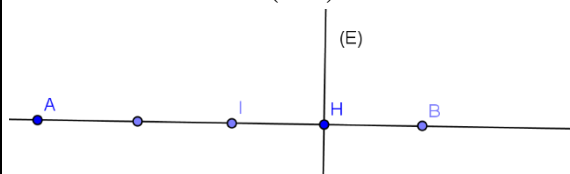
c)de b) on déduit que (E) est la droite perpendiculaire a (AB) en H

$$2)a) MA^2 - MB^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$$

car d'après La propriété caractéristique du barycentre on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

$$2)b) M \in (F) \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 8 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \Leftrightarrow M \in (E)$$

Donc $(F) = (E)$ par suite (F) est la droite perpendiculaire a (AB) en H



Solution16 : A et B deux points tel que :
 $AB=3cm$ et I le milieu du segment $[AB]$

1)soit (C) l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2 + MB^2 = 9$ et soit H le barycentre des points pondérés $(A;1) ; (B;3)$

a)monter que : $M \in (C) \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2}$

b)déterminer la nature et tracer l'ensemble (C)

2) soit : (C') l'ensemble des points M du plan tel

que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{-5}{4}$

a) Montrer que : $M \in (C') \Leftrightarrow MI = 1$

b) déterminer la nature et tracer l'ensemble (C')

Solution : 1) on a :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= 2MI^2 + 2IA^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} \end{aligned}$$

Car : $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$

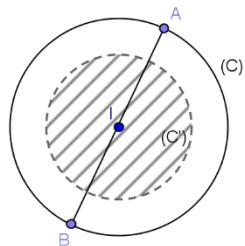
$$M \in (C) \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 9 \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2}$$

b) en déduit que (C) est le cercle de centre I et de rayon $r = \frac{3}{2}$

$$2) a) \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

Donc : $M \in (C') \Leftrightarrow MI = 1$

2) b) en déduit que (C') est le cercle de centre I et de rayon $r = 1$



C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

**C'est en s'entraînant régulièrement aux
calculs et exercices**

Que l'on devient un mathématicien