1sex PROF : ATMANI NAJIB

1ere Sciences BIOF

EXERCICES AVEC SOLUTIONS FONCTIONS - *Généralités*

Exercice 1 : Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par

1) $f(x)=3x^2-x+1$. 2) $f(x)=\dfrac{x^3}{2x-4}$.

3) $f(x)=\dfrac{2x^4}{x^2-4}$. 4) $f(x)=\dfrac{7x-1}{x^3-2x}$.

5) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$. 6) $f(x)=\dfrac{x-5}{2x^2-5x-3}$.

7) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$. 8) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-3x+9}{x+1}}$.

9) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$. 10) $f(x)=\dfrac{|x-5|}{x^2+1}$.

11) $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|}}{x}$. 12) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$.

13) $f(x)=3x^2-\dfrac{1}{x}+\sqrt{-x}$.

14) $f(x)=\dfrac{x}{|2x-4|-|x-1|}$. 15) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{2\cos x-1}$.

16) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$.

17) $f(x)=\sqrt{x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}}$

18) $f(x)=\dfrac{|x-4|-|x-1|}{x^2+2|x|-3}$

19) $f(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3-5x}$.

Solutions

1) $f(x)=3x^2-x+1$

f Est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image. Donc $D_f=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\dfrac{x^3}{2x-4}$.

Pour les fonctions du type fractions rationnelles, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels le dénominateur est non nul.

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / 2x-4\neq 0\}$

$2x-4=0$ ssi $x=\dfrac{4}{2}=2$ Donc $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

On dira aussi que 2est une valeur interdite pour la fonction f

3) $f(x)=\dfrac{2x^4}{x^2-4}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / x^2-4\neq 0\}$

$x^2-4=0$ ssi $x^2-2^2=0$ ssi $(x-2)(x+2)=0$

ssi $x-2=0$ ou $x+2=0$ ssi $x=2$ ou $x=-2$

donc $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

4) $f(x)=\dfrac{7x-1}{x^3-2x}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / x^3-2x\neq 0\}$

$x^3-2x=0$ ssi $x\left(x^2-2\right)=0$ ssi $x=0$ ou

$x^2-2=0$ ssi $x=0$ ou $x^2=2$

ssi $x=0$ ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

donc $D_f=\mathbb{R}-\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\}$

5) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$.

Pour les fonctions du type racine carrée, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels l'intérieur de la racine est positif

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / -3x+6\geq 0\}$

$-3x+6\geq 0$ ssi $x\leq 2$ ssi $x\leq\dfrac{-6}{-3}$ ssi $-3x\geq -6$

Donc $D_f=]-\infty;2]$

6) $f(x)=\dfrac{x-5}{2x^2-5x-3}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / 2x^2-5x-3\neq 0\}$

$2x^2-5x-3=0$ $a=2$ et $b=-5$ et $c=-3$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times 2\times(-3)=25+24=49=(7)^2>0$

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times 2}=\dfrac{7+5}{4}=\dfrac{12}{4}=3$ et

$x_2=\dfrac{(-5)-\sqrt{49}}{2\times 2}=\dfrac{5-7}{4}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2};3\right\}$

7) $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+1}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / 2x^2-3x+1\geq 0\}$ soit Δ son discriminant

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=9-8=1>0$

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{4}{4}=1$ et $x_2=\frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $D_f=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

8) $f(x)=\sqrt{\frac{-9x+3}{x+1}}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{-9x+3}{x+1}\geq 0 et x+1\neq0\right\}$

$-9x+3=0$ ssi $x=\frac{1}{3}$ ssi $-9x=-3$

$x+1=0$ ssi $x=-1$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-9x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-9x+3}{x+1}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Donc $D_f=\left]-1,\frac{1}{3}\right]$

9) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/-2x^2+x+3>0\}$

$-2x^2+x+3=0$ $a=-2$ et $b=1$ et $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times(-2)\times3=1+24=25=(5)^2>0$

Donc on a deux racines

$x_1=\frac{-1+5}{2\times(-2)}=\frac{4}{-4}=-1$ et $x_2=\frac{-1-5}{2\times(-2)}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		-1		$3/2$		$+\infty$
$-2x^2+x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_f=\left[-1,\frac{3}{2}\right]$

10) $f(x)=\frac{|x-5|}{x^2+1}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq0\}$

$x^2+1=0$ ssi $x^2=-1$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc $D_f=\mathbb{R}$

11) $f(x)=\frac{\sqrt{|x|}}{x}$.

$f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $\sqrt{|x|}\in\mathbb{R}$ et $x\neq0$

Or on sait que $|x|\geq0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq0$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

12) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\geq0 et x-1\neq0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq-2 et x\neq1\}$

$D_f=[-2,1[\cup]1,+\infty[$

13) $f(x)=3x^2-\frac{1}{x}+\sqrt{-x}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/-x\geq0 et x\neq0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\leq0 et x\neq0\}$

$D_f=]-\infty,0[$

14) $f(x)=\frac{x}{|2x-4|-|x-1|}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/|2x-4|-|x-1|\neq0\}$

$|2x-4|-|x-1|=0$ ssi $|2x-4|=|x-1|$

ssi $2x-4=x-1$ ou $2x-4=-(x-1)$

ssi $2x-x=4-1$ ou $2x-4=-x+1$

ssi $x=3$ ou $2x+x=4+1$

ssi $x=3$ ou $3x=5$ ssi $x=3$ ou $x=\frac{5}{3}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{5}{3};3\right\}$

15) $f(x)=\frac{2\sin x}{2\cos x-1}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2\cos x-1\neq0\}$

$2\cos x-1=0$ ssi $\cos x=\frac{1}{2}$

$\cos x=\frac{1}{2}$ ssi $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Donc: $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{\pi}{3}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

16) $f(x)=\sqrt{\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}\geq0 et x^2-x-6\neq0\right\}$

- On détermine les racines du trinôme $-2x^2+2x+13$:

prof : atmani najib

Le discriminant est Δ' = 2² – 4 x (-2) x 13 = 108 et ses racines sont :

$x_1 = \frac{-2-\sqrt{108}}{2\times(-2)} = \frac{1+3\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{108}}{2\times(-2)} = \frac{1-3\sqrt{3}}{2}$

- On détermine les racines du trinôme x^2-x-6 :

Le discriminant est Δ = (-1) ² – 4 x (-6) x 1 =25 et ses racines sont :

$x_1' = \frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times1} = \frac{1-5}{2} = -2$ et

$x_2' = \frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times1} = \frac{1+5}{2} = 3$

- On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$		-2		3		$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+2x+13$		−	0	+	|	+	|	+	0	−	
x^2-x-6		+	|	+	0	−	0	+	|	+	
$\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$		−	0	+	||	−	||	+	0	−	

$D_f = \left[\frac{1-3\sqrt{3}}{2};-2\right[\cup \left]3;\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right]$.

17) $f(x) = \sqrt{x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}}$

$D_f = \left\{x\in\mathbb{R} / x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}\geq 0\right\}$

$\Delta = b^2-4ac = \left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2 - 4\times1\times2\sqrt{6}$

$\Delta = 12-4\sqrt{6}+2+8\sqrt{6} = 14+4\sqrt{6}$

$14+4\sqrt{6} = 14+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2} = \left(2\sqrt{3}\right)^2+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2$

$14+4\sqrt{6} = \left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

On a $\Delta = 14+4\sqrt{6} > 0$ donc

$x_1 = \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{14+4\sqrt{6}}}{2\times1} = \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$

et $x_2 = \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$

$x_1 = \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ et

$x_2 = \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\times1} = \frac{-4\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$		+	0	−	0	+	

On a donc : $D_f = \left]-\infty;-2\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{2};+\infty\right[$

18) $f(x) = \frac{|x-4|-|x-1|}{x^2+2|x|-3}$

$D_f = \left\{x\in\mathbb{R} / x^2+2|x|-3\neq 0\right\}$

$x^2+2|x|-3=0 \Leftrightarrow |x|^2+2|x|-3=0$ on pose $|x| = X$

donc l'équation devient :

$X^2+2X-3=0$

Le discriminant est Δ = 2² – 4 x 1 x (-3)= 16 et ses solutions sont :

$X_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times1} = -3$ et $X_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times1} = 1$

Donc on a : $|x| = -3$ et $|x| = 1$

$|x| = -3$ n'a pas de solution

$|x| = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$ donc $D_f = \mathbb{R}-\{-1;1\}$

19) $f(x) = \sqrt{2x-1}+\sqrt{3-5x}$.

$D_f = \left\{x\in\mathbb{R} / 2x-1\geq 0 et 3-5x\geq 0\right\}$

$D_f = \left\{x\in\mathbb{R} / x\geq\frac{1}{2} et x\leq\frac{3}{5}\right\}$

Donc $D_f = \left[\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right]$

Exercice 2 : Etudier la parité des fonctions suivantes définie par : 1) $f(x) = 3x^2-5$. 2) $f(x) = \frac{3}{x}$

3) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$. 2) $f(x) = x^2+\frac{1}{x}$.

3) $f(x) = \frac{|x|}{x^2-1}$. 4) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

5) $f(x) = \frac{2x^3}{x^2+5}$. 6) $f(x) = |x|-\sqrt{2x^2+4}$.

7) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$. 8) $f(x) = \frac{x}{x-2}$

Solutions :

1) Soit f une fonction tq : $f(x) = 3x^2-5$

Donc $D_f = \mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x) = 3(-x)^2-5 = 3x^2-5$
  $f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire,

2) $f(x) = \frac{3}{x}$

on a $g(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$

donc $D_f = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$

prof : atmani najib

- $f(-x)=\dfrac{3}{-x}=-\dfrac{3}{x}$

  $f(-x)=-f(x)$

 Donc f est une fonction impaire,

3) $f(x)=2x^3+x^2$

h est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image. Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=2(-x)^3+(-x)^2=-2x^3+x^2$

  $f(-x)=-(2x^3-x^2)\neq -f(x)$

Donc f est une fonction ni paire ni impaire,

3) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$

on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$ donc $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=\dfrac{(-x)^2-1}{-x}=-\dfrac{x^2-1}{x}$

  $f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

4) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$

 donc $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=(-x)^2+\dfrac{1}{-x}=x^2-\dfrac{1}{x}=\left(-x^2+\dfrac{1}{x}\right)$

  $f(-x)\neq -f(x)$

Donc f est une fonction ni paire ni impaire,

5) $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2-1}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x^2-1\neq 0$

 $x^2-1=0$ ssi $x^2=1$ ssi $x=1$ ou $x=-1$

 donc $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$, alors $-x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$
- $f(-x)=\dfrac{|-x|}{(-x)^2-1}=\dfrac{|x|}{x^2-1}$

  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

6) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/1-x^2\geq 0\}$

$1-x^2=0$ ssi $x^2=1$ ssi $x=1$ ou $x=-1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc $D_f=[-1,1]$

- Pour tout réel x, si $x\in[-1,1]$, alors $-x\in[-1,1]$
- $f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}$

  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

7) $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+5}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+5\neq 0\}$

$x^2+5=0$ ssi $x^2=-5$ pas de solutions

Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=\dfrac{2(-x)^3}{(-x)^2+5}=\dfrac{-2x^3}{x^2+5}$

  $f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire

8) $f(x)=|x|-\sqrt{2x^2+4}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2+4\geq 0\}$

Or on sait que $2x^2\geq 0$ Pour tout réel x, donc $2x^2+4\geq 0+4$ donc $2x^2+4\geq 4\geq 0$

Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=|-x|-\sqrt{2(-x)^2+4}=|x|-\sqrt{2x^2+4}$

  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

9) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}$ Donc

$D_f=\mathbb{R}^+=[0;+\infty[$

On a $2\in\mathbb{R}^+$ mais $-2\notin\mathbb{R}^+$ Donc f est une fonction ni paire ni impaire

8) $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$

on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x-2\neq 0$ ssi $x\neq 2$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

on a $-2\in D_f$ mais $-(-2)=2\notin D_f$

Donc D_f n'est pas symétrique par rapport a O

Donc f est une fonction ni paire ni impaire

prof : atmani najib

Exercice 3 : Soit la fonction définie par :

$5f(x)+f(-x)=2x^3-3x$ Pour tout réel x

1)montrer que f est une fonction impaire

2)donner une expression de $f(x)$ Pour tout réel x

Solution : soit $x\in\mathbb{R}$

On a $5f(x)+f(-x)=2x^3-3x$ (1)

Pour tout réel x

On remplaçant x par –x on trouve :

$5f(-x)+f(x)=2(-x)^3-3(-x)$

Donc : $5f(-x)+f(x)=-2x^3+3x$ (2)

(1)+ (2) donne : $6\left(f(-x)+f(x)\right)=0$ donc :

$f(-x)+f(x)=0$

donc : $f(-x)=-f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc f est une fonction impaire

2)on a : $5f(x)+f(-x)=2x^3-3x$

Et puisque f est une fonction impaire donc :

$5f(x)-f(x)=2x^3-3x$

$4f(x)=2x^3-3x \Leftrightarrow \boxed{f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}}$

Exercice 4 : Soit la fonction définie par :

$f(x)=\frac{|x|+1}{2|x|-3}$ et (C_f) la courbe de f Dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé

Montrer que (C_f)symétrique par rapport à l'axe des ordonnée

Solution : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2|x|-3\neq 0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/|x|\neq\frac{3}{2}\right\}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$

Il suffit de montrer que f est une fonction paire

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$ alors $-x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$
- $f(-x)=\frac{|-x|+1}{2|-x|-3}=\frac{|x|+1}{2|x|-3}=f(x)$

Donc f est une fonction paire

Par suite la(C_f)symétrique par rapport à l'axe des ordonnée

Exercice 5 : étudier les variations des fonctions définies par : 1) $f(x)=7x-5$ 2) $g(x)=\frac{2}{x}$

prof : atmani najib

Solution :1) f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

Soit $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tq $x_1\prec x_2$

Donc $7x_1\prec 7x_2$ car $7\succ 0$

Donc $7x_1-5\prec 7x_2-5$

Alors $f(x_1)\prec f(x_2)$ d'où f que est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2) Soit g une fonction tq : $g(x)=\frac{2}{x}$

$g(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$ Donc $D_g=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

a)Soit $x_1\in[0;+\infty[$ et $x_2\in[0;+\infty[$ tq $x_1\prec x_2$

Donc $\frac{1}{x_1}\succ\frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1}\succ\frac{2}{x_2}$ car $2\succ 0$

Alors $f(x_1)\succ f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

b)Soit $x_1\in]-\infty;0]$ et $x_2\in]-\infty;0]$ tq $x_1\prec x_2$

Donc $\frac{1}{x_1}\succ\frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1}\succ\frac{2}{x_2}$ car $2\succ 0$

Alors $f(x_1)\succ f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

b)tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

Exercice 6 : étudier les variations de la fonction définie par: $f(x)=3x^2+2$

Solution : $D_f=\mathbb{R}$

soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tq $x_1\neq x_2$ on a :

$T(x_1;x_2)=3(x_1+x_2)$

a)Soit $x_1\in[0;+\infty[$ et $x_2\in[0;+\infty[$

Donc $x_1\geq 0$ et $x_2\geq 0$ Donc $x_1+x_2\geq 0$

Donc $3(x_1+x_2)\geq 0$ car $3\succ 0$

Donc $T(x_1;x_2)=3(x_1+x_2)\geq 0$

d'où f que est croissante sur $[0;+\infty[$

b)Soit $x_1\in]-\infty;0]$ et $x_2\in]-\infty;0]$

Donc $x_1\leq 0$ et $x_2\leq 0$ Donc $x_1+x_2\leq 0$

Donc $3(x_1+x_2)\leq 0$ car $3\succ 0$

Donc $T(x_1;x_2)=3(x_1+x_2)\le 0$

d'où f que est décroissante sur $]-\infty;0]$

b) résumé : **tableau de variation :**

$f(0)=3\times 0^2+2=2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

Exercice 7 : étudier les variations de la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$

Solution : $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$ on a $g(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x+1\neq 0$ ssi $x\neq -1$

Donc $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$

soient $x_1\in D_g$ et $x_2\in D_g$ tq $x_1\neq x_2$ on a :

$$T(x_1;x_2)=\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$$

$$g(x_1)-g(x_2)=\frac{x_1}{x_1+1}-\frac{x_2}{x_2+1}=\frac{x_1(x_2+1)-x_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

a)sur $I=]-\infty;-1[$

Soit $x_1\in]-\infty;-1[$ et $x_2\in]-\infty;-1[$ $x_1\neq x_2$

Donc $x_1\prec -1$ et $x_2\prec -1$ Donc $x_1+1\prec 0$ et $x_2+1\prec 0$ Donc $(x_1+1)(x_2+1)\succ 0$

Donc $T(x_1;x_2)=\dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}\succ 0$ sur $I=]-\infty;-1[$

d'où g que est strictement croissante sur $I=]-\infty;-1[$

b)sur $J=]-1;+\infty[$

Soit $x_1\in]-1;+\infty[$ et $x_2\in]-1;+\infty[$ $x_1\neq x_2$

Donc $x_1\succ -1$ et $x_2\succ -1$ Donc $x_1+1\succ 0$ et $x_2+1\succ 0$ Donc $(x_1+1)(x_2+1)\succ 0$

Donc $T(x_1;x_2)=\dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}\succ 0$

sur $J=]-1;+\infty[$

d'où g que est strictement croissante sur $J=]-1;+\infty[$ **tableau de variation :**

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	||	$\nearrow$

Exercice 8 : Soit f une fonction :tq : $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

1)Déterminer D_f et étudier la parité de f

2)Calculer Le taux d'accroissement $T(x_1;x_2)$ de f entre x_1 et x_2 deux éléments de D_f tq $x_1\neq x_2$

3)Étudier les variations de f sur $I=]0;1]$ puis sur $J=[1;+\infty[$

4)En déduire les variations de f sur D_f

5)Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Réponses : 1) on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$ Donc $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=-x+\dfrac{1}{-x}=-x-\dfrac{1}{x}=-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

2) $f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1+\dfrac{1}{x_1}\right)-\left(x_2+\dfrac{1}{x_2}\right)=x_1+\dfrac{1}{x_1}-x_2-\dfrac{1}{x_2}$

$$=\frac{x^2{}_1\times x_2+x_2-x^2{}_2\times x_1-x_1}{x_1\times x_2}=\frac{x_1\times x_2(x_1-x_2)+x_2-x_1}{x_1\times x_2}$$

$$=\frac{(x_1-x_2)(x_1\times x_2-1)}{x_1\times x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{(x_1-x_2)(x_1\times x_2-1)}{x_1\times x_2}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}$$

a)sur $I=]0;1]$ Soit $x_1\in]0;1]$ et $x_2\in]0;1]$

Donc $0\prec x_1\le 1$ et $0\prec x_2\le 1$ $x_2+1\prec 0$

Donc $0\prec x_1x_2\le 1$ et $x_1\neq x_2$ Donc $x_1x_2-1\prec 0$

et on a $0\prec x_1x_2$ Donc $T(x_1;x_2)=\dfrac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}\prec 0$

d'où f que est strictement décroissante sur $I=]0;1]$

b)sur $J=[1;+\infty[$ Soit $x_1\in[1;+\infty[$ et $x_2\in[1;+\infty[$

Donc $x_1\ge 1$ et $x_2\ge 1$ Donc $x_1x_2\ge 1$ et $x_1\neq x_2$ Donc $x_1x_2\succ 1$ Donc $x_1x_2-1\succ 0$

prof : atmani najib

et on a $0 \prec x_1 x_2$ Donc $T(x_1;x_2)=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}\succ 0$

d'où f que est strictement croissante sur $J=[1;+\infty[$

3) f est impaire et le symétrique de $I=]0;1]$ est l'intervalle $I'=[-1;0[$ et le symétrique de $J=[1;+\infty[$ est l'intervalle $J'=]-\infty;-1]$

Donc : f est strictement décroissante sur I
Donc f est strictement décroissante sur I'
f est strictement croissante sur J Donc f est strictement croissante sur J'

5) le tableau de variations de f sur D_f

$f(x)=1+\frac{1}{1}=2$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
Variations de $f(x)$	↗	-2	↘	‖	↘	2	↗

$f(-1)=-1-\frac{1}{1}=-2$

Exercice 9 : étudier les variations des fonctions définies par: 1) $k(x)=\frac{6}{x}$ 2) $f(x)=x^2$ et $g(x)=-\frac{1}{2}x^2$ et $h(x)=-\frac{1}{2}x^2+5$

Réponses :

1)soit la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

On sait que la fonction $v: x\to \frac{1}{x}$ est décroissante sur $[0;+\infty[$ et puisque $6\succ 0$ donc la fonction $k=6v$ est aussi décroissante sur $[0;+\infty[$

2) $f(x)=x^2$ et $g(x)=-\frac{1}{2}x^2$ $D_f=D_g=\mathbb{R}$

On a $a=-\frac{1}{2}\prec 0$ Donc alors les fonctions f et g ont des variation opposées sur $\mathbb{R}$

g et h ont les mêmes variations sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		↗	0	↘	

Exercice 10 : Les fonction f et g définies respectivement par :

$f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$ et $g(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$

Sont-elles égales ?

Réponse :

Déterminons leur ensemble de définition :

Pour f , on doit avoir : $\frac{x-1}{x+3}\geq 0$ et $x-1\neq 0$ donc ce qui donne $D_f=]-\infty;-3[\cup[1;+\infty[$

Pour g, on doit avoir $x-1\geq 0$ et $x+3\succ 0$

ce qui donne $D_g=[1;+\infty[$

On a donc $D_f\neq D_g$. Les fonctions ne sont donc pas égales. On écrit : $f\neq g$

On remarquera cependant que sur $[1;+\infty[$ on a f (x) = g(x)

Exercice 11 : Soit f et g les fonctions numériques tel que: $f(x)=x+1$ et $g(x)=x^2+x+2$

Comparer les fonctions f et g

Solution : $D_f=D_g=\mathbb{R}$

$g(x)-f(x)=x^2+x+2-(x+1)=x^2+1\succ 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $f(x)\prec g(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ donc $f\prec g$

Exercice 12 : Soit f et g les fonctions numériques tel que: $f(x)=x$ et $g(x)=\frac{1}{x}$

Comparer les fonctions f et g

Exercice 13 : Soient les deux fonctions : $f(x)=\frac{3x^2+1}{\sqrt{x^2}}$ et $g(x)=\frac{1+3x^2}{|x|}$

Comparer les fonctions f et g

Solution :

- on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $\sqrt{x^2}\in\mathbb{R}$ et $x\neq 0$

or on sait que $x^2\geq 0$ donc $\sqrt{x^2}\in\mathbb{R}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

alors $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$ donc $D_f=\mathbb{R}^*$

- on a $g(x)\in\mathbb{R}$ ssi $|x|\neq 0$ ssi $x\neq 0$

donc $D_g=\mathbb{R}^*$

alors $D_f=D_g=\mathbb{R}^*$

on sait que $\sqrt{x^2}=|x|$ et $3x^2+1=1+3x^2$ donc f(x)=g(x)

donc finalement on a trouvé que : $D_f=D_g=\mathbb{R}^*$

et f(x)=g(x)

Donc : f=g.

Exercice 14 : Soient les deux fonctions : $h(x)=\dfrac{x^2-x}{x}$ et $t(x)=x-1$

Comparer les fonctions f et g

Solution :

- on a $h(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$ donc $D_h=\mathbb{R}^*$
- on a $t(x)$ est un polynôme donc $D_t=\mathbb{R}$

 donc $f\neq g$

Exercice 15 : Soit f la fonction numérique tel que: $f(x)=\dfrac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}$

Etudier le signe de le fonction f

Solution : $4x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -\dfrac{1}{2}$ et $x\neq \dfrac{1}{2}$

Donc : $D_I=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right\}$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$\frac{-1}{3}$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$3x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$f(x)\geq 0$ ssi $x\in\left]-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right]\cup\left]\dfrac{1}{2};2\right]$ donc $f\geq 0$ $\forall x\in\left]-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right]\cup\left]\dfrac{1}{2};2\right]$

$f(x)\leq 0$ ssi $x\in\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left[-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right[\cup[2;+\infty[$

Exercice 16 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x^2+x$

Démontrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.

Solution : On met la fonction sous la forme canonique :

$$f(x)=-x^2+x=-\left(x^2-x\right)=-\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

On a : $-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\leq 0$ donc $-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\leq\dfrac{1}{4}$

donc : $f(x)\leq\dfrac{1}{4}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

La fonction f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M=\dfrac{1}{4}$

Exercice 17 : Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=4\sin x-3$ est Bornée.

Solution : On a $\forall x\in\mathbb{R}$ $-1\leq\sin x\leq 1$ donc $-4\leq 4\sin x\leq 4$

donc $-4-3\leq 4\sin x-3\leq 4-3$

donc $-7\leq g(x)\leq 1$ g est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18 : Soit f une fonction numérique tq : $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

1)Déterminer D_f

2) Démontrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.

3) Démontrer que f est minorée sur $\mathbb{R}$. Conclure

Solution : 1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq 0\right\}$

$x^2+1=0\Leftrightarrow x^2=-1$ pas de solution dans $\mathbb{R}$

donc $D_f=\mathbb{R}$

2) On a $\forall x\in\mathbb{R}$ $x^2\geq 0$ donc $x^2+1\geq 0+1$

Donc $x^2+1\geq 1$ donc $\dfrac{1}{x^2+1}\leq 1$

donc $f(x)\leq 1$ par suite f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M=1$

2) On a $\forall x\in\mathbb{R}$ $x^2\geq 0$ donc $x^2+1\geq 0+1$

Donc $x^2+1\geq 1$ donc $x^2+1\succ 0$

Donc : $0\prec f(x)$

par suite f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m=0$

conclusion : $0\leq f(x)\leq 1$ $\forall x\in\mathbb{R}$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19 : Soit f une fonction numérique tq : $f(x)=\dfrac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$

1)Déterminer D_f

2) Démontrer que f est minorée par 1.

3) Démontrer que f est majorée par $\dfrac{7}{3}$ .Conclure

Solution : 1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2+3x+3\neq 0\right\}$

$\Delta=-3\prec 0$ pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

2) soit $\forall x\in\mathbb{R}$

$$f(x)-1=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}-1=\frac{2x^2+7x+7-1\left(x^2+3x+3\right)}{x^2+3x+3}=\frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+3}$$

$f(x)-1=\dfrac{(x+2)^2}{x^2+3x+3}$ or $x^2+3x+3\succ 0$ car $\Delta=-3\prec 0$

(signe de a=1)

Et on a : $(x+2)^2\geq 0$ donc $f(x)\geq 1\quad\forall x\in\mathbb{R}$

f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m=1$

2) soit $\forall x\in\mathbb{R}$

$$f(x)-\frac{7}{3}=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}-\frac{7}{3}=\frac{-x^2}{3\left(x^2+3x+3\right)}\leq 0$$

par suite f est majorée par $\dfrac{7}{3}$.

conclusion : $1\prec f(x)\leq\dfrac{7}{3}\quad\forall x\in\mathbb{R}$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20 : Soit f une fonction numérique tq : $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x+m}$ avec $m\in\mathbb{R}$

1)déterminer les valeurs de m pour que $D_f=\mathbb{R}$

2) Soit g la fonction numérique tq : $g(x)=\dfrac{1}{x+2}$

déterminer les valeurs de m pour que $\forall x\in\{-2;1\}$ on a : $f(x)=g(x)$

Solution :

1) $D_f=\mathbb{R}\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}: x^2+x+m\neq 0$

$x^2+x+m\neq 0$ ssi $\Delta=b^2-4ac=1-4m\prec 0$

Ssi $m\succ\dfrac{1}{4}$

2) $f(x)=g(x)\ \forall x\in\{-2;1\}\Leftrightarrow$

$\dfrac{x-1}{x^2+x+m}=\dfrac{1}{x+2}$

$\Leftrightarrow(x-1)(x+2)=x^2+x+m\Leftrightarrow$

$x^2+x-2=x^2+x+m$

$f(x)=g(x)\ \forall x\in\{-2;1\}\Leftrightarrow -2=m$

Exercice 21 : Soit f une fonction numérique tq : $f(x)=5x^2+3$

Montrer que f admet un minimum absolue sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera

Solution : $D_f=\mathbb{R}$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $x^2\geq 0$ Donc $5x^2\geq 0$ car $5\succ 0$

Par suite $5x^2+3\geq 3$ et on a $f(0)=3$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f(x)\geq f(0)$

d'où $f(0)=3$ est un minimum absolue de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 22 : Soit g une fonction numérique tq : $g(x)=-4x^2+1$

Montrer que g admet un maximum absolue sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera

Solution : $D_g=\mathbb{R}$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $x^2\geq 0$ Donc $-4x^2\leq 0$ car $-4\prec 0$

Par suite $-4x^2+1\leq 1$ et on a $g(0)=1$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $g(x)\leq g(0)$

d'où $g(0)=1$ est un maximum absolue de g sur $\mathbb{R}$

Exercice 23 : Soit f une fonction numérique tq : $f(x)=-4x^2+4x+5$

1°a) montrer que $f(x)=6-(2x-1)^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) montrer que $f(x)\leq 6$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

2° calculer : $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et en déduire les extrémums de f sur $\mathbb{R}$

Réponses: 1°a) on a $D_f=\mathbb{R}$

$6-(2x-1)^2=6-\left(4x^2-4x+1\right)$

$=6-4x^2+4x-1=-4x^2+4x+5$

Donc : $f(x)=6-(2x-1)^2$

b) Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $(2x-1)^2\geq 0$

Par suite $-(2x-1)^2\leq 0$ donc $6-(2x-1)^2\leq 6$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f(x)\leq 6$

2° on a $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=6-\left(2\times\dfrac{1}{2}-1\right)^2=6-(1-1)^2=6$

on a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $6-(2x-1)^2\leq 6$ alors $f(x)\leq f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

Donc $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=6$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 24 : Du tableau de variation

x	-5		-2		2		5
$f(x)$	5	↘	$0,5$	↗	2	↘	-2

Déduire les extrémums de f

Solution :

Du tableau de variation on a :

Le nombre 2 est une valeur maximale de f au point $x_0 = 2$

Le nombre 0.5 est une valeur Minimale de f au point $x_0 = -2$

Exercice 25 : Soit f une fonction numérique tq :

$f(x) = -x^2 + 4x - 3$

Montrer que 1 est le maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Solution : $D_f = \mathbb{R}$

Montrons donc que : $f(x) \leq 1$ et que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

$f(x) - 1 = -x^2 + 4x - 3 - 1 = -x^2 + 4x - 4$

$f(x) - 1 = -(x^2 - 4x + 4) = -(x-2)^2 \leq 0$

Donc $f(x) \leq 1 \; \forall x \in \mathbb{R}$ et on a :

$f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow -(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Donc 'équation $f(x) = 1$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

Et on a : $f(2) = 1$ donc : $f(x) \leq f(2) \; \forall x \in \mathbb{R}$

que $f(2) = 1$ est le maximum absolue de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 26 : Soit f une fonction numérique tq :

$f(x) = \dfrac{2x^2 + 3}{x^2 + 1}$

1)Déterminer D_f

2) a) Démontrer que f est majorée par 3.

b) est ce que 3 est une valeur maximale de f ?

3) a) Démontrer que f est minorée par 2.

b) est ce que 2 est une valeur minimale de f. ?

Solution :

1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}$

$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$

2) a)soit $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - 3 = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} - 3 = \frac{2x^2 + 3 - 3(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 3 - 3x^2 - 3}{x^2 + 1}$$

Donc $f(x) - 3 = \dfrac{-x^2}{x^2 + 1} \leq 0$ par suite $f(x) \leq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M = 3$

b) on remarque que : $f(0) = 3$

donc $f(x) \leq f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc 3 est une valeur maximale de f

2) a)soit $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - 2 = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} - 2 = \frac{2x^2 + 3 - 2(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 3 - 2x^2 - 2}{x^2 + 1}$$

Donc $f(x) - 2 = \dfrac{1}{x^2 + 1} \succ 0$ par suite :

$0 \prec f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

par suite f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m = 2$

b) on remarque que : $f(x) \succ 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2 n'est pas donc une valeur minimale de f

conclusion : $2 \prec f(x) \leq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27 : Soit f une fonction numérique définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x - 1}$

1)étudier le signe de f

2) a)Démontrer que f est majorée par $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

b) est ce que $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ est une valeur maximale de f ?

Solution :1) soit $x \in]1; +\infty[$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x - 1} = \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{2}\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{2}\right)}$$

$$f(x) = \frac{x + 1 - 2}{(x-1)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{2}\right)} = \frac{x - 1}{(x-1)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{2}\right)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}} \succ 0$$

Donc $f(x) \succ 0$ si $x \in]1; +\infty[$

2) a) $x \in]1; +\infty[$ montrons que $f(x) \leq \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

soit $x \in]1; +\infty[$ donc $x \succ 1$ cad $x + 1 \succ 2$

donc $\sqrt{x+1} \succ \sqrt{2}$ donc $\sqrt{x+1} + \sqrt{2} \succ 2\sqrt{2}$

donc $\dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}} \prec \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

donc $f(x) \prec \dfrac{\sqrt{2}}{4} \; \forall x \in]1; +\infty[$

f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M = 3$

prof : atmani najib

conclusion : $2 \prec f(x) \leq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) on remarque que : $f(0)=3$

donc $f(x) \leq f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc 3 est une valeur maximale de f

f est donc bornée sur $]1;+\infty[$ par $\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) puisque $f(x) \neq \frac{\sqrt{2}}{4} \ \forall x \in]1;+\infty[$

$\frac{\sqrt{2}}{4}$ N'est pas une valeur maximale de f

Exercice 28 : Soit f une fonction numérique définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$

1))Déterminer D_f

2) Démontrer que -1 est la valeur minimal de f

3) Démontrer que f est majorée par 1 et est-ce que 1 est une valeur maximale de f ?

Solution :1)

$D_f=\left\{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x}+2 \neq 0 etx \geq 0\right\}=\left\{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x} \neq -2 etx \geq 0\right\}$

$D_f=[0;+\infty[$

2) Montrons donc que : $f(x) \geq -1$ et que l'équation $f(x)=-1$ admet une solution dans $\mathbb{R}^+$

$f(x)-(-1)=f(x)+1=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}+1=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \geq 0$

Donc $f(x) \geq -1 \ \forall x \in \mathbb{R}^+$ et on a :

$f(x)=-1 \Leftrightarrow f(x)+1=0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}=0 \Leftrightarrow x=0$

Donc l'équation $f(x)=-1$ admet une solution dans $\mathbb{R}^+$

Et on a : $f(0)=-1$ donc : $f(x) \geq f(0) \ \forall x \in \mathbb{R}$

Ont dit que $f(0)=-1$ est le minimum absolue de f sur $\mathbb{R}^+$

3) soit $x \in \mathbb{R}^+$ $\quad f(x)-1=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}-1=\frac{-4}{\sqrt{x}+2} \prec 0$

Donc $f(x) \prec 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Donc f est donc majorée sur $\mathbb{R}^+$ par $M=1$

Et puisque $f(x)=1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^+$

Donc 1 n'est pas une valeur maximale de f

f est donc bornée sur $]1;+\infty[$ par $\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) puisque $f(x) \neq \frac{\sqrt{2}}{4} \ \forall x \in]1;+\infty[$

$\frac{\sqrt{2}}{4}$ n'est pas une valeur maximale de f

Exercice 28 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2-2x+3$

1)a) Démontrer que f est minorée.
b) est ce que f admet une valeur minimale ?
2) Démontrer que f est non majorée.

Solution : $D_f=\mathbb{R}$

1)a) $f(x)=x^2-2x+3=(x^2-2x+1)+2=(x-1)^2+2$

Donc $f(x)-2=(x-1)^2 \geq 0$

donc : $f(x) \geq 2 \ \forall x \in \mathbb{R}$ donc que f est minorée par 2

et on a : $f(1)=2$ donc : $f(x) \geq f(1) \ \forall x \in \mathbb{R}$

Donc f admet une valeur minimale c'est 2

2) Démontrons que f est non majorée.

Supposons f majorée donc : $\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : (x-1)^2+2 \leq M$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 \leq M-2$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{(x-1)^2} \leq \sqrt{M-2}$ (on peut toujours supposer $M \geq 2$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq \sqrt{M-2}$

Donc on a : $-\sqrt{M-2} \leq x-1 \leq \sqrt{M-2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc on a : $-\sqrt{M-2}+1 \leq x \leq \sqrt{M-2}+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ absurde

Donc f est non majorée

Exercice 29 : Soit f une fonction numérique tq : $f(x)=2x^2-4x-2$

étudier les variations de f et dresser le tableau de variation et tracer la dans le repére $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) de f

Solution :on a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

On a $a=2$ et $b=-4$ et $c=-2$

$(f(x)=ax^2+bx+c)$

Donc $-\frac{b}{2a}=\frac{4}{2\times 2}=1$ et $(f(1)=2-4-2=-4)$

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme :

$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=2(x-1)^2-4$

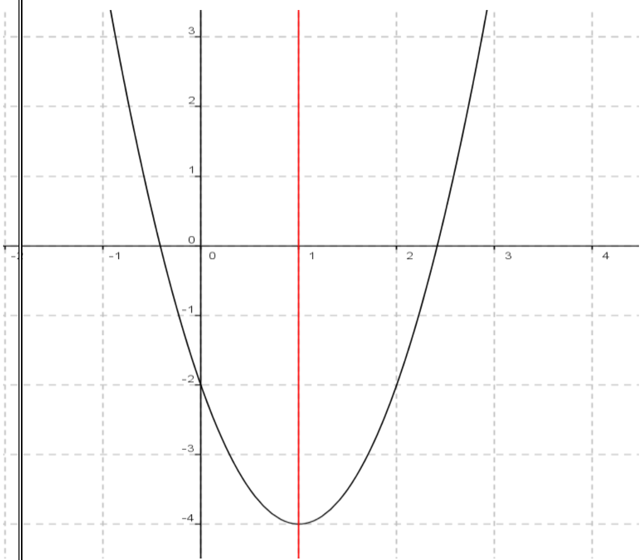
Soit $W(1;-4)$ Donc dans le repére $(0;\vec{i};\vec{j})$ l

a courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(1;-4)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

Tableau de variations de f

On a $a=2\succ 0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$



$W(1;-4)$

Exercice 30 : Soit g une fonction numérique tq : $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+1$

étudier les variations de g et dresser le tableau de variation et tracer la dans le repére $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_g) de g

Solution : $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+1$

on a g est une fonction polynôme donc $D_g=\mathbb{R}$

On a $a=-\frac{1}{2}$ et $b=2$ et $c=1$ $\left(g(x)=ax^2+bx+c\right)$

Donc $-\frac{b}{2a}=2$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{4+2}{-2}=3$

Donc pour tout réel $x\in\mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme : $g(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{1}{2}(x-2)^2+3$

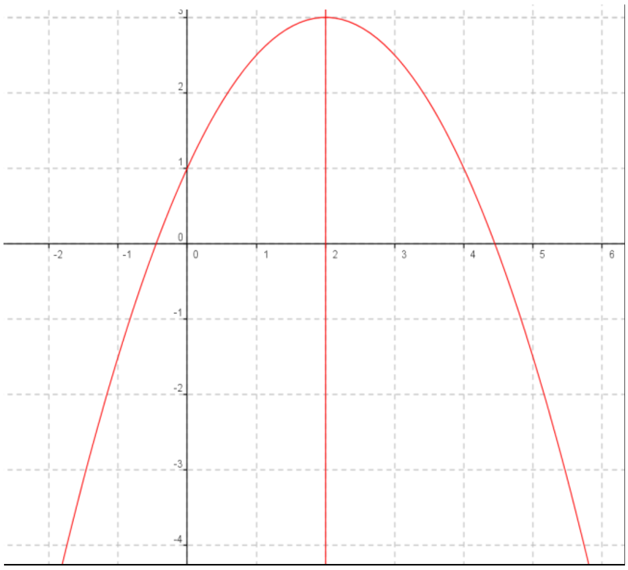
$\left(g(2)=-\frac{1}{2}(2-2)+3=3\right)$

Soit $W(2;3)$ Donc dans le repére $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_g) c'est une parabole de sommet $W(2;3)$ et d'axe de symétrie la droite $x=2$

Tableau de variations de f

On a $a=-\frac{1}{2}\prec 0$ donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$



Exercice 31 Soit f une fonction numérique tq : $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$

étudier les variations de f et dresser le tableau de variation et tracer la dans le repére $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) de f

Solution :

on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x-1\neq 0$ ssi $x\neq 1$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2-1=-3\prec 0$

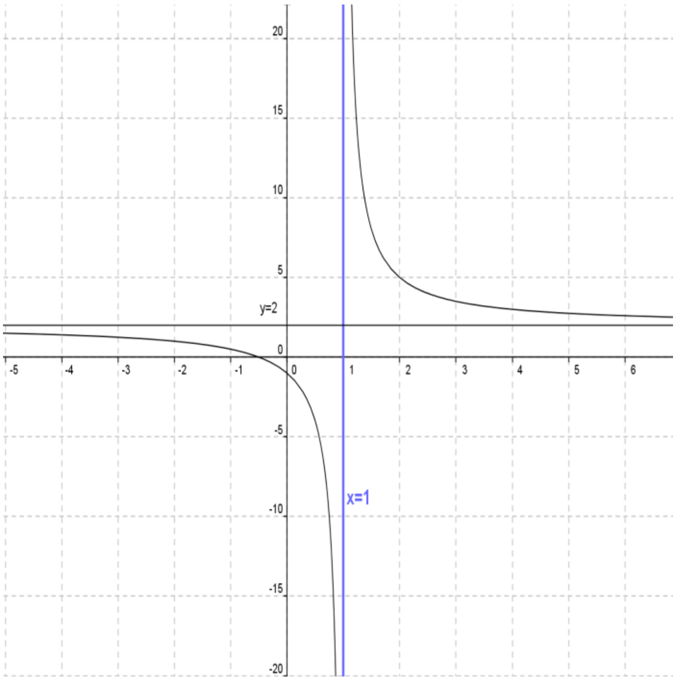
• Donc le tableau de variations de $x\longrightarrow\frac{2x+1}{x-1}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

- <u>Représentation graphique</u>

(C_f) est l'hyperbole de centre $W(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=1$ et $y=2$

-2	1-	0	1	2	3	4
1	$\frac{1}{2}$	-1		5	$\frac{7}{2}$	3



Exercice 32 : Soit f une fonction numérique tq : $g(x)=\frac{-x}{x-2}$ étudier les variations de g et dresser le tableau de variation et tracer la dans le repére $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_g) de g

Solution :on a $g(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x-2\neq 0$ ssi $x\neq 2$

Donc $D_g=\mathbb{R}-\{2\}$

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix}=2\succ 0$$

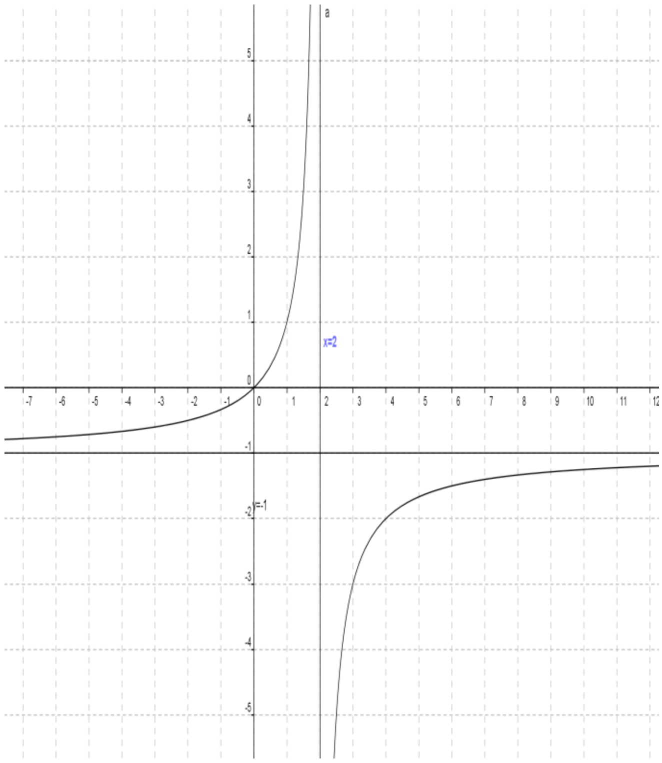
• <u>Donc le tableau de variations</u>

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$

- <u>Représentation graphique</u>

(C_f) est l'hyperbole de centre $W(2;-1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=2$ et $y=-1$

-1	0	1	2	3	4	5
-1/ 3	0	1		-3	-2	-5/ 3



Exercice 33 : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\frac{1}{4}x^3$

1) Déterminer D_f

2)étudier les variations de f et dresser le tableau de variation

3)tracer la dans le repére $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) de f

Solutions : 1) $D_f=x\in\mathbb{R}$

2)soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tq $x_1<x_2$

Donc : $x_1^3<x_2^3$ Donc : $\frac{1}{4}x_1^3<\frac{1}{4}x_2^3$

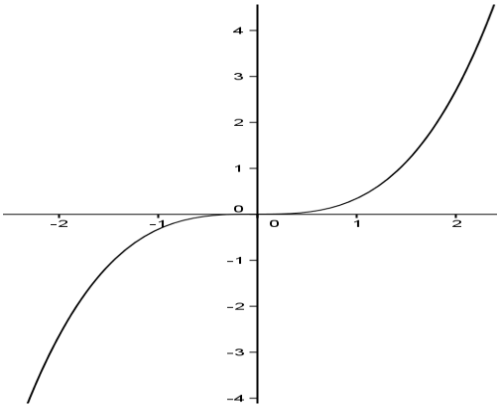
Donc : $f(x_1)<f(x_2)$

Donc f est strictement croissante

Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.5	-2	-1/4	0	1/4	2	6.5



Exercice 34 : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\sqrt{x+2}$

1) Déterminer D_f

2)étudier les variations de f et dresser le tableau de variation

3)tracer la dans le repére $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $\left(C_f\right)$ de f

Solutions : 1)

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2\}=[-2,+\infty[$

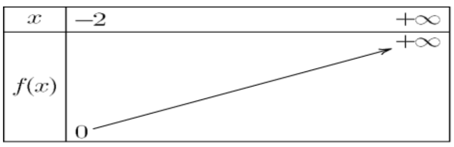
2)soient $x_1\in[-2;+\infty[$ et $x_2\in[-2;+\infty[$ tq $x_1<x_2$

Donc : $x_1+2<x_2+2$ Donc : $\sqrt{x_1+2}<\sqrt{x_2+2}$

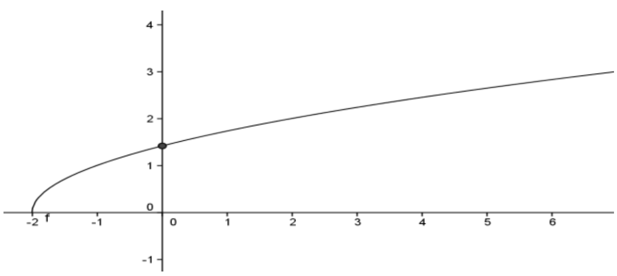
Donc : $f(x_1)<f(x_2)$

Donc f est strictement croissante

Tableau de variation :



x	-2	-1	0	2	7
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	2	3



Exercice 35 : Soit les fonctions f et g tel que : $f(x)=x^2-2x+3$ et $g(x)=2x+1$

Déterminer : $g\circ f$ et $f\circ g$

Solution : on a : $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}$ donc

$D_{g\circ f}=\mathbb{R}$ et $D_{f\circ g}=\mathbb{R}$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2-2x+3)=2(x^2-2x+3)+1$

$(g\circ f)(x)=2x^2-4x+7$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+1)=(2x+1)^2-2(2x+1)+3$

$(f\circ g)(x)=4x^2+4x+1-4x-2+3=4x^2+2$

Exercice 36 : Soit les fonctions f et g définies par : $f(x)=3x+4$ et $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$

1) Déterminer $D_{g\circ f}$

2) déterminer : $(g\circ f)(x)$

Solution : 1) $D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f etf(x)\in D_g\}$

On a $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$ donc

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R}etf(x)\neq -1\}$

$f(x)=-1\Leftrightarrow 3x+4=-1\Leftrightarrow 3x=-5\Leftrightarrow -\dfrac{5}{3}=x$

donc : $D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$

2)on a : $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$

et $D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x+4)=\dfrac{1}{3x+4+1}$

$(g\circ f)(x)=\dfrac{1}{3x+5}$

Exercice 37 : Soit les fonctions f et g définies par : $g(x)=\dfrac{x}{x+2}$ et $f(x)=\dfrac{x+3}{x+1}$

On pose : $h(x)=(g\circ f)(x)$

1) Déterminer D_h 2) déterminer : $h(x)$

3) Soit la fonctions k définie par : $k(x)=\dfrac{x+3}{3x+5}$

Les fonctions h et k sont-elles égales ?

Solution : 1)on a : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ et

$D_g=\mathbb{R}-\{-2\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f etf(x)\in D_g\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq -1etf(x)\neq -2\}$

prof : atmani najib

$f(x)=-2 \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{x+1}=-2$

$\Leftrightarrow -2(x+1)=x+3 \Leftrightarrow -3x=5 \Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{3}$

donc : $D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{5}{3};-1\right\}$

$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)$

$$h(x)=\dfrac{\dfrac{x+3}{x+1}}{\dfrac{x+3}{x+1}+2}=\dfrac{\dfrac{x+3}{x+1}}{\dfrac{x+3+2x+2}{x+1}}=\dfrac{\dfrac{x+3}{x+1}}{\dfrac{3x+5}{x+1}}=\dfrac{x+3}{3x+5}$$

Donc : $h(x)=\dfrac{x+3}{3x+5}$

3)Les fonctions h et k ne sont pas égales car ils n'ont pas le même ensemble de définition :

$D_h=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{5}{3};-1\right\}$ et $D_k=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$

Exercice 38 : exprimer les fonctions suivantes à l'aide de fonctions élémentaires :

1) $h_1(x)=\dfrac{1}{3x-1}$ 2) $h_2(x)=\sqrt{x+3}$

3) $h_3(x)=3\sqrt{x}+4$

Solution : 1) $h_1(x)=\dfrac{1}{3x-1}$ on a : $h_1(x)=(g\circ f)(x)$

avec $f(x)=3x-1$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$

2) $h_2(x)=\sqrt{x+3}$ on a : $h_2(x)=(g\circ f)(x)$

avec $f(x)=x+3$ et $g(x)=\sqrt{x}$

3) $h_3(x)=3\sqrt{x}+4$ on a : $h_3(x)=(g\circ f)(x)$

avec $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=3x+4$

Exercice 39 : Soit f la fonction f définie sur un intervalle $[0;+\infty[$ tel que : $f(x)=-5x^2+7$

Décomposer la fonction f en fonctions élémentaire et étudier les variations de f

Solution :

$v(x)=-5x+7$ et $u(x)=x^2$

La fonctions $f=v\circ u$

La fonction u est croissante sur $[0;+\infty[$ et $u(x)=x^2\in[0;+\infty[$ et v est décroissante sur $[0;+\infty[$ Donc d'après le théorème des fonctions composées, $f=v\circ u$ est décroissante sur $[0;+\infty[$

Exercice 40 : Soit la fonction h définie sur $]-\infty;1]$ par $h(x)=\sqrt{1-x}$

1) Décomposer h en deux fonctions élémentaires.

2) Déterminer les variations de h.

Solution :1) La fonction h se décompose de cette façon $h=g\circ f$

on a alors : $f(x)=1-x$ et $g(x)=\sqrt{x}$

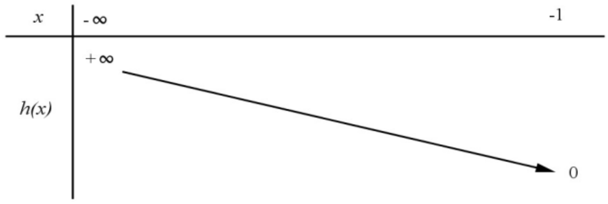
2) On sait que :

➪ f est décroissante sur $]-\infty;1]$

➪ g est croissante sur $f(]-\infty;1])=[0;+\infty[$

Donc La fonction h décroissante sur $]-\infty;1]$

On a alors le tableau de variation suivant



Exercice 41 :1) Quelle est la période des fonctions suivantes :

a) $f:x\to\sin(4x-1)$ b) $g:x\to\cos(5x)$

2) Trouver une fonction de période $T=\dfrac{3}{4}$

Solution :1)a) $T=\dfrac{2\pi}{a}=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ 1)b) $T=\dfrac{2\pi}{5}$

2)Une fonction est. $h:x\to\cos(\dfrac{8\pi}{3}x)$

Exercice 42 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T=2$

tel que : $f(x)=2x-x^2 \quad \forall x\in[0;2[$
1)Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-2;8]$ dans un repére $(0;\vec{i};\vec{j})$

2) calculer : $f(4.1)$; $f(-3.5)$; $f(265.11)$

3) donner l'expression de : $f(x)=2x-x^2$ sur les intervalles : $I_k=[2k;2(k+1)[\ k\in\mathbb{Z}$

Solution : dans l'intervalle $I_0=[0;2[$
on a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$
On a $a=-1$ et $b=2$ et $c=0$
$(f(x)=ax^2+bx+c)$

Donc $-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times(-1)}=1$ et $(f(1)=2-1=1)$

Donc la courbe (C_f) c'est une portion parabole de sommet $A(1;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-2;8]$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I_0=[0;2[$

et utiliser les translation $2k\vec{i}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

2) calculer :

$f(4.1)=f(2+2.1)=f(2.1)=f(2+0.1)=f(0.1)$

$f(4.1)=2(0.1)-(0.1)^2=0.19$

$f(-3.5)=f(-4+0.5)=f(0.5)$

$f(-3.5)=2(0.5)-(0.5)^2=0.75$

$f(265.11)=f(2\times132+1.11)=f(1.11)$

$f(1.11)=2(1.11)-(1.11)^2\approx 0.98$

3) l'expression de : $f(x)=2x-x^2$ sur les intervalles : $I_k=[2k;2(k+1)[\ k\in\mathbb{Z}$

$x\in I_k=[2k;2(k+1)[\Leftrightarrow 2k\le x\prec 2(k+1)$

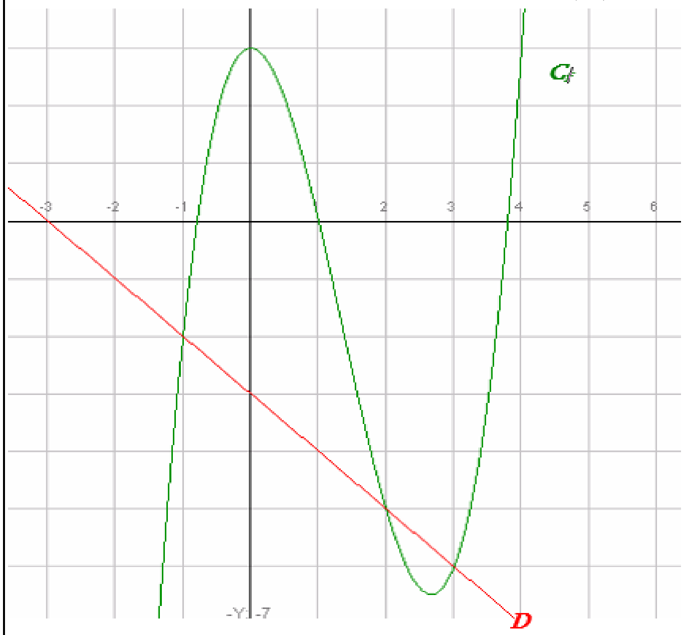
$x\in I_k \Leftrightarrow 0\le x-2k\prec 2 \Leftrightarrow f(x-2k)=f(x)$

$x\in I_k \Leftrightarrow f(x)=2(x-2k)-(x-2k)^2$ avec

$k\le \frac{x}{2}\prec k+1$ cad $k=E\left(\frac{x}{2}\right)$

Exercice 43 : Soit la courbe (C_f) représentative de f telle que $f(x)=x^3-4x^2+3$ et la droite (D) d'équation $y=-x-3$

1- Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=3$



puis l'inéquation $f(x)\prec 3$.

2- Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=0$ puis l'inéquation $f(x)\ge 0$

3- Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=-x-3$ puis l'inéquation $f(x)\le -x-3$

Réponses : 1) $f(x)=3$ La solution est l'ensemble des antécédents de 3 : $S=\{0;4\}$

2- $f(x)=0$ La solution est l'ensemble des antécédents de 0 : $S=\{a;1;b\}$ Avec $-1\prec a\prec -0.5$ et $3.5\prec b\prec 4$

$f(x)\ge 0 \quad S=[a;1]\cup[b;+\infty[$

3- $f(x)=-x-3$ La solution l'ensemble des abscisses des points d'intersection de (C_f) et de D : $y=-x-3$ donc $S=\{-1;2;3\}$

$f(x)\le -x-3 \quad S=]-\infty;-1]\cup[2;3]$

Exercice 44 : Soient f et g les deux fonctions définies sur R par : $f(x)=x^2-3x-4$ et $g(x)=3x+12$

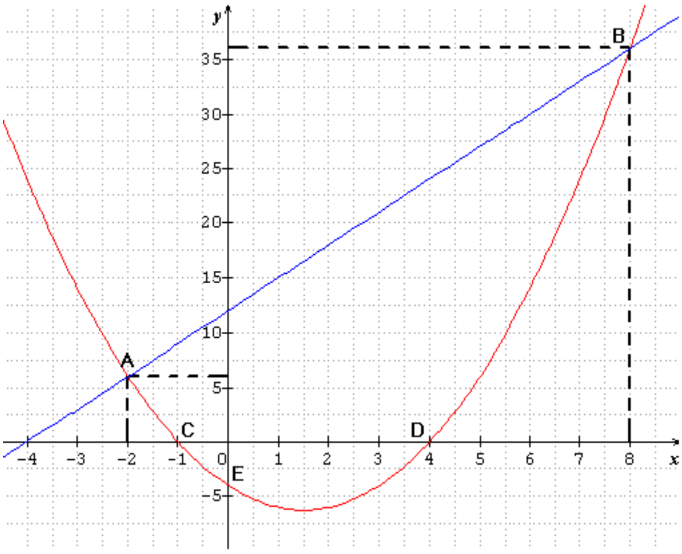
1) Tracer Les courbes (C_f) et (C_g)

2) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation $f(x)=g(x)$

3) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation $f(x)\ge g(x)$

4) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repére

Réponses : 1) Les courbes représentatives (C_f) (en rouge) et (C_g) (en bleu) sont données dans le repére ci-dessous



2) a) résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=-2$ et $x=8$ donc $S=\{-2;8\}$

b) résolution algébrique de l'équation $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ ssi $x^2-3x-4=3x+12$ ssi $x^2-6x-16=0$

$a=1$ et $b=-6$ et $c=-16$

$$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times1\times(-16)=36+64=100=(10)^2>0$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-(-6)+\sqrt{100}}{2\times1}=\frac{6+10}{2}=\frac{16}{2}=8 \text{ et}$$

$$x_2=\frac{-(-6)-\sqrt{100}}{2\times1}=\frac{6-10}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

donc $S=\{-2;8\}$

3) a) résolution graphique de l'inéquation $f(x)\succ g(x)$

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in]-\infty;-2[\cup]8;+\infty[$

Donc $S=]-\infty;-2[\cup]8;+\infty[$

b) résolution algébrique de l'inéquation $f(x)\succ g(x)$

$f(x)\succ g(x)$ ssi $x^2-3x-4\succ 3x+12$ ssi $x^2-6x-16\succ 0$

Les racines sont : $x_1=8$ et $x_2=-2$

x	$-\infty$		-2		8		$+\infty$
$x^2-6x-16$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S=]-\infty;-2[\cup]8;+\infty[$

5) a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$

$f(x)=0$ ssi $x^2-3x-4=0$

$a=1$ et $b=-3$ et $c=-4$

$$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(-4)=9+16=25=(5)^2>0$$

$$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times1}=\frac{3+5}{2}=\frac{8}{2}=4 \text{ et } x_2=\frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times1}=\frac{-2}{2}=-1$$

donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$C(-1;0)$ et $D(4;0)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

et on a $f(0)=0^2-3\times0-4=-4$

donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(-4;0)$

Exercice 45 : Soient f et g les deux fonctions définies sur R par : $f(x)=-x^2-2x+3$ et $g(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1) dresser le Tableau de variations de f et de g

2) a)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l' axes des abscisses

b)Trouver le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l' axes des abscisses

3) Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g)dans le même repère

4) a)Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$

b)Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geq g(x)$

Réponses : 1)a) $f(x)=-x^2-2x+3$

on a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

On a $a=-1$ et $b=-2$ et $c=3$

$\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

Donc $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-2}{2\times(-1)}=-1$ et $\left(f(-1)=4\right)$

Donc la courbe(C_f) c'est une parabole de sommet $A(-1;4)$

et d'axe de symétrie la droite $x=-1$

<u>Donc le tableau de variations de f</u>

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$

1)b) $g(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ on a $g(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x+2\neq 0$

ssi $x\neq -2$ Donc $D_g=\mathbb{R}-\{-2\}$

$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2+1=3\succ 0$

(C_g) est l'hyperbole de centre $W(-2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=-2$ et $y=1$

<u>Donc le tableau de variations de g</u>

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	||	$\nearrow$

2)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l''équation $f(x)=0$

$f(x)=0$ ssi $-x^2-2x+3=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times3\times(-1)=4+11=16>0$

$x_1=\dfrac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times(-1)}=\dfrac{2+4}{-2}=\dfrac{6}{-2}=-3$ et

$x_2=\dfrac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times(-1)}=1$donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$A(-3;0)$ et $B(1;0)$

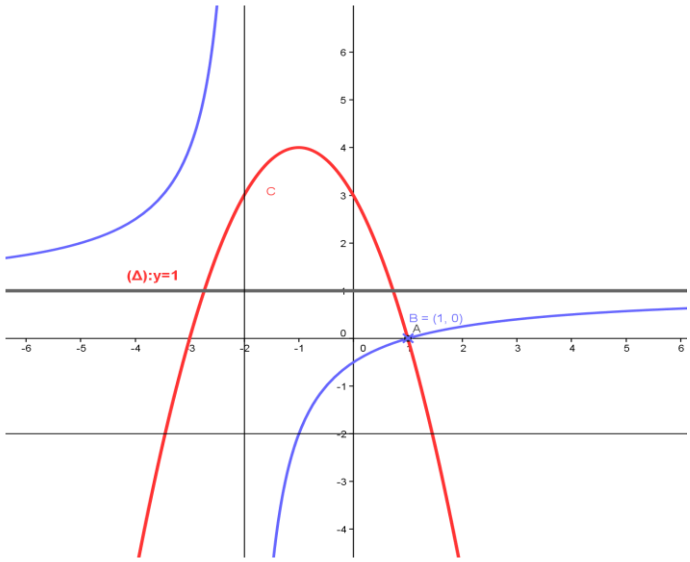
b) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

$g(x)=0$ ssi $\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{x+2}=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$

le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $C(1;0)$

<u>3)Représentation graphique</u>

Les courbes représentatives (C_f) (en rouge) et (C_g) (en bleu) sont données dans le repére ci-dessous



4) a) résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=1$ donc $S=\{1\}$

4)b) résolution graphique de l'inéquation $f(x)\geq g(x)$

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in\left]-2;1\right]$

prof : atmani najib

Donc $S=]-2;1]$

Exercice 46 : Soit f une fonction numérique tq :

$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

1)Déterminer D_f

2) Démontrer que f est minorée.

3) Démontrer que f est majorée par $\frac{1}{2}$ Conclure

Solution :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}=\mathbb{R}^+$

2) soit $x\in\mathbb{R}^+$ on a $x+\sqrt{x}\geq x$

Donc : $\sqrt{x+\sqrt{x}}\geq\sqrt{x}$ donc

$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\geq 0$

f est donc minorée sur $\mathbb{R}^+$ par $m=0$

2) soit $x\in\mathbb{R}^+$

$$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}\geq 0$$

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{x}-x}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}}+1\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}$$

Si $x\in\mathbb{R}^{*+}$: $\frac{1}{\sqrt{x}}\succ 0$ donc $1+\frac{1}{\sqrt{x}}\succ 1$

donc $\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\succ 1$ donc $\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\succ 2$

donc $\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}\prec\frac{1}{2}$ donc $f(x)\prec\frac{1}{2}$

et on a : $f(0)=0\prec\frac{1}{2}$ donc $\forall x\in\mathbb{R}^+$ $f(x)\prec\frac{1}{2}$

par suite f est majorée par $\frac{1}{2}$.

conclusion : $0\prec f(x)\prec\frac{1}{2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^+$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 47 : Soit f une fonction numérique tq :

$f(x)=x^2+2x\sqrt{x}+x-4$

1) Démontrer que f admet une valeur minimale

3) Démontrer que f n'est pas majorée

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}=\mathbb{R}^+$

soit $x\in\mathbb{R}^+$

$f(x)=x^2+2x\sqrt{x}+x-4=x^2+2x\sqrt{x}+\left(\sqrt{x}\right)^2-4$

$f(x)=\left(x+\sqrt{x}\right)^2-4$ donc

$f(x)+4=\left(x+\sqrt{x}\right)^2\geq 0$

donc $f(x)+4\geq 0$ donc $f(x)\geq -4$

et on a : $f(0)=-4$ donc $f(x)\geq f(0)$

donc $f(0)=-4$ est une valeur minimale de f au point $x_0=0$

2) Démontrons que f est non majorée.

Supposons f majorée donc : $\exists M\in\mathbb{R}: f(x)\leq M$ $\forall x\in\mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}^+:\left(x+\sqrt{x}\right)^2-4\leq M$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}^+:\left(x+\sqrt{x}\right)^2\leq M+4$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}^+: x+\sqrt{x}\leq\sqrt{M+4}$ (on peut toujours supposer $M\geq 0$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}^+:\left(\sqrt{x}\right)^2+2\times\frac{1}{2}\sqrt{x}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\leq\sqrt{M+4}$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}^+:\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)^2\leq\sqrt{M+4}+\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}^+:\sqrt{x}\leq\sqrt{\sqrt{M+4}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}^+: x\leq\left(\sqrt{\sqrt{M+4}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2$ Absurde

Donc f est non majorée

Exercice 48 : Soient f et g et h les trois fonctions définies par:

$f(x)=\frac{6x^2+8x+11}{(x-1)^2}$ et $g(x)=\frac{2x+3}{x-1}$ et

$h(x)=x^2+2$

1)a)Etudier les variations de g et de h

b)étudier le signe de la fonction g

2)montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}: f(x)=(h\circ g)(x)$

3)Etudier les variations de f dans les intervalles :

$]1;+\infty[$; $\left[-\frac{3}{2};1\right[$; $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$

Réponses :1)a) $g(x)=\frac{2x+3}{x-1}$

on a $g(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x-1\neq 0$ ssi $x\neq 1$

Donc $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$ $\quad \Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-5\prec 0$

(C_g) est l'hyperbole de centre $W(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=1$ et $y=2$

<u>Donc le tableau de variations de g</u>

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

1)a)on a h est une fonction polynôme donc $D_h=\mathbb{R}$

<u>Donc le tableau de variations de h</u>

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

b)étudions le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}-\{1\}$

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		1		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x+3}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f et f(x)\in D_g\}$

2)montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}: f(x)=(h\circ g)(x)$

$(h\circ g)(x)=h(g(x))=h\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)$

$(h\circ g)(x)=\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^2+2=\frac{4x^2+12x+9+2x^2-4x+2}{(x-1)^2}$

$(h\circ g)(x)=\frac{6x^2+8x+11}{(x-1)^2}$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}: f(x)=(h\circ g)(x)$

3)Etude des variations de f dans les intervalles :

a) sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$:

On a $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}: f(x)=(h\circ g)(x)$

Puisque g est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ et

$\forall x\in\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]: g(x)\in[0;+\infty[$ et h est croissante sur $[0;+\infty[$ alors $f=h\circ g$ est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$

b) sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$

Puisque g est décroissante sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$ et

$\forall x\in\left[-\frac{3}{2};1\right[: g(x)\in]-\infty;0]$ et h est décroissante sur $]-\infty;0]$ alors $f=h\circ g$ est croissante sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$

c) sur $]1;+\infty[$:

Puisque g est décroissante sur $]1;+\infty[$ et

$\forall x\in]1;+\infty[\ g(x)\in]0;+\infty[$ et h est croissante sur $]0;+\infty[$ alors $f=h\circ g$ est décroissante sur $]1;+\infty[$

<u>Donc le tableau de variations de f</u> :

x	$-\infty$	$-3/2$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$ $\Vert$	$\searrow$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien

Prof : Atmani najib

prof : atmani najib