

FONCTIONS - Généralités

1) Définitions d'une fonction et Domaine de définitions

1-1) Définition :

Une **fonction** est un procédé qui à un nombre x appartenant à un ensemble D associe un nombre y .

On note : $f : x \mapsto y$ ou encore $y = f(x)$

- On dit que y est l'image de x par la fonction f
- On dit aussi que x est un antécédent de y par la fonction f

1-3) Domaine de définitions : Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image par cette fonction est appelé ensemble de définition de la fonction f que l'on notera D_f

2) Fonctions paires et Fonctions impaires

2.1. Fonction paire : On dit qu'une fonction f est paire si et seulement si : a) Pour tout réel x , si $x \in D_f$ alors $-x \in D_f$
b) Pour tout réel x de D_f , on a : $f(-x) = f(x)$

2.3. Fonction impaire : On dit qu'une fonction f est impaire si et seulement si :

- a) Pour tout réel x , si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$
- b) Pour tout réel x de D_f , on a : $f(-x) = -f(x)$

2.4 le graphe et la parité de la fonction

- la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par l'axe des ordonnées.
- la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

3) Les variations d'une fonction numérique

3-1) Sens de variation d'une fonction : fonction croissante -décroissante -fonction constantes

Soit f une fonction et D_f son domaine de définition et soit I un intervalle inclus dans D_f

- Dire f que est strictement croissante sur I (croissante sur I) signifie que : Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \leq f(x_2)$)

Rq : Une fonction croissante « conserve l'ordre ».

- Dire f que est strictement décroissante sur I (décroissante sur I) signifie que :
Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$)

Rq : Une fonction décroissante « inverse l'ordre ».

- Dire f que est constante sur I signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 < x_2$
alors $f(x_1) = f(x_2)$

- Une fonction définie sur un intervalle I est monotone sur cet intervalle si elle est : soit croissante sur I soit décroissante sur I

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I . On dit que f est constante sur I ssi il existe un réel k tq : $f(x) = k$ pour tout $x \in I$

3-2) Le taux d'accroissement d'une fonction et les variations :

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

- On dit que f est strictement croissante(croissante) sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \quad \left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0 \right)$$

- On dit que f est strictement décroissante(décroissante) sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \quad \left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0 \right)$$

- On dit que f est constante sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 0$

3-3) les variations et la parité :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}^+$ et soit I' le symétrique de l'intervalle I
Si f est paire alors :

- f est croissante sur I ssi f est décroissante sur I'
 - f est décroissante sur I ssi f est croissante sur I'
- Si f est impaire alors :
- f est croissante sur I ssi f est croissante sur I'
 - f est décroissante sur I ssi f est décroissante sur I'

Conséquences :

Si f est paire ou impaire alors il suffit d'étudier ses variations sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ et en déduire ses variations sur D_f

4) Les variations des deux fonctions : αf et $f + \alpha$

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et $\alpha \in \mathbb{R}^*$

- Si $\alpha \in \mathbb{R}^{++}$ alors les fonctions f et αf ont les mêmes variations sur I
- Si $\alpha \in \mathbb{R}^{*-}$ alors les fonctions f et αf ont des variations opposées sur I
- f et $f + \alpha$ ont les mêmes variations sur I

5) comparaison deux fonctions (fonctions positives et négatives) et Fonctions majorées ; minorées et bornée

6-1) Comparaison de fonctions

Définition 1 : On dit que deux fonction f et g sont égales si et seulement

si : Elles ont même ensemble de définition : $D_f = D_g = \mathbb{R}$

et Pour tout $x \in D_f$: $f(x) = g(x)$ et On écrit : $f = g$

6-2) Définitions : Soit I un intervalle et soient f et g deux fonctions définies Sur I . On dit que :

1) f est inférieure à g sur I lorsque : $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$. On note : $f \leq g$ Sur I .

2) f est positive sur I lorsque : $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

On note : $f \geq 0$ sur I .

3) f est **majorée** sur I lorsqu'il existe un réel M tel que : $f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$

4) f est **minorée** sur I lorsqu'il existe un réel m tel que : $m \leq f(x)$ pour tout $x \in I$

5) f est **bornée** sur I lorsqu'il existe des réels M et m tels que : $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in I$.

(f est majorée et minorée)

Interprétation graphique :

1) $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$ ssi La courbe (C_g) de la fonction g est au-dessus de La courbe (C_f) de f sur l'intervalle I

2) $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ ssi La courbe (C_f) de la fonction f est au-dessus de l'axe des abscisse sur l'intervalle I

6) Les extremums d'une fonction numérique

7-1)) Définitions : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$

➤ Dire que $f(a)$ est une valeur maximale de f sur I (ou $f(a)$ est un maximum de f sur I) ssi pour tout que $\forall x \in I : f(x) \leq f(a)$

➤ Dire que $f(a)$ est une valeur minimale de f sur I (ou $f(a)$ est un minimum de f sur I) ssi pour tout $\forall x \in I : f(x) \geq f(a)$

7) Etude et représentation graphique des fonctions

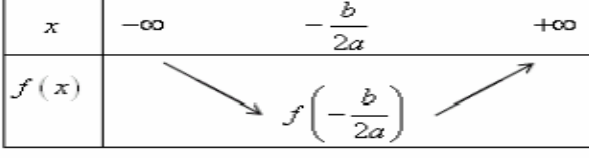
$x \xrightarrow{f} ax^2 + bx + c$

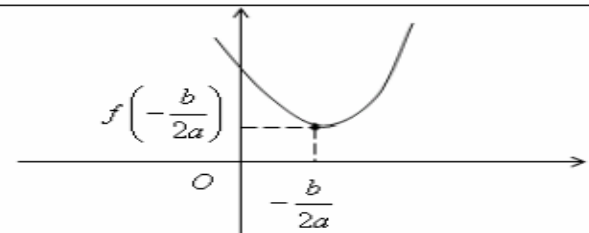
7-1)Résumé : $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $a \neq 0$

1° Dans le repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha; \beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x = \alpha$

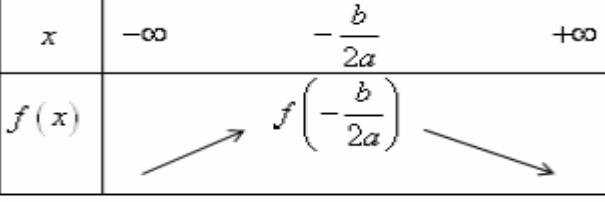
2° Les variations de f

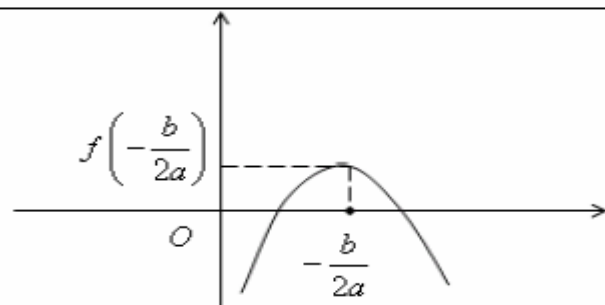
Si $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$			



Si $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$			



7-2) Exemple :

1° Soit f une fonction numérique

$$tq : f(x) = 2x^2 - 4x - 2$$

on a f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

On a $a = 2$ et $b = -4$ et $c = -2$ ($f(x) = ax^2 + bx + c$)

$$\text{Donc } -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2 \times 2} = 1 \text{ et } (f(1) = 2 - 4 - 2 = -4)$$

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme :

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 2(x - 1)^2 - 4$$

Soit $W(1; -4)$ Donc dans le repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$ 1

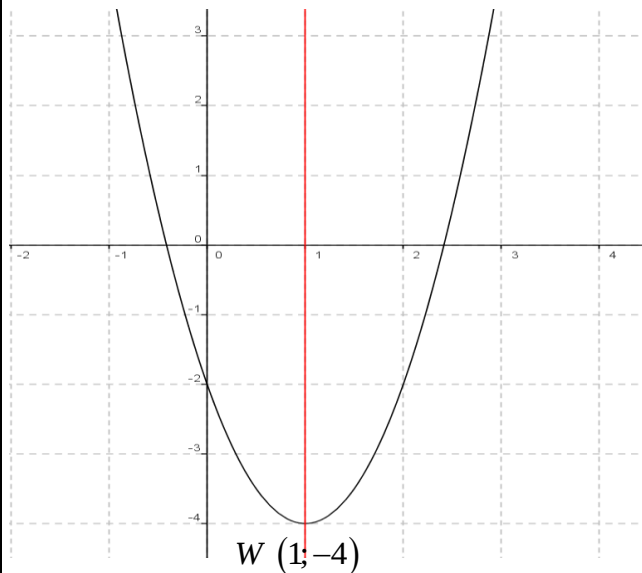
a courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(1; -4)$

et d'axe de symétrie la droite $x = 1$

Tableau de variations de f

On a $a = 2 > 0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	



8) Etude et représentation graphique des fonctions

homographique : $x \xrightarrow{f} \frac{ax+b}{cx+d}$ $a \neq 0$ et $c \neq 0$

8-1) Résumé et propriété : 1) Soit f une fonction tq :

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{on a } f(x) \in \mathbb{R} \text{ ssi } cx+d \neq 0 \text{ ssi}$$

$$x \neq -\frac{d}{c} \quad \text{donc : } D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$$

dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (C_f) est l'hyperbole de centre

$W\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations

respectives $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$

1^{er} cas : si $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc > 0$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

2^{er} cas : si $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc < 0$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

8-2) Exemples :

Exemple 1 : Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x-1 \neq 0$ ssi $x \neq 1$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R} - \{1\} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 < 0$$

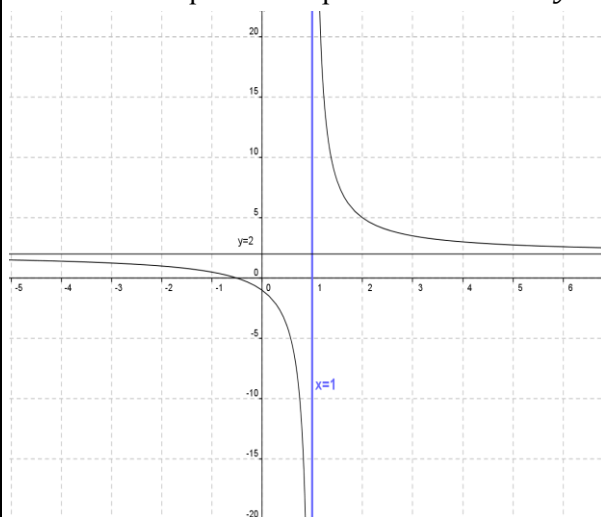
• Donc le tableau de variations de $x \xrightarrow{f} \frac{2x+1}{x-1}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

• Représentation graphique

-2	1-	0	1	2	3	4
1	$\frac{1}{2}$	-1		5	$\frac{7}{2}$	3

(C_f) est l'hyperbole de centre $W(1; 2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=1$ et $y=2$



9) Etude et représentation graphique de la fonction polynôme: $x \xrightarrow{f} ax^3$

Exemple : Soit f une fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3$$

1) Déterminer D_f

2) étudier les variations de f et dresser le tableau de variation

3) tracer la dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C_f) de f

Solutions : 1) $D_f = x \in \mathbb{R}$

2) soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 < x_2$

Donc : $x_1^3 < x_2^3$ Donc : $\frac{1}{4}x_1^3 < \frac{1}{4}x_2^3$

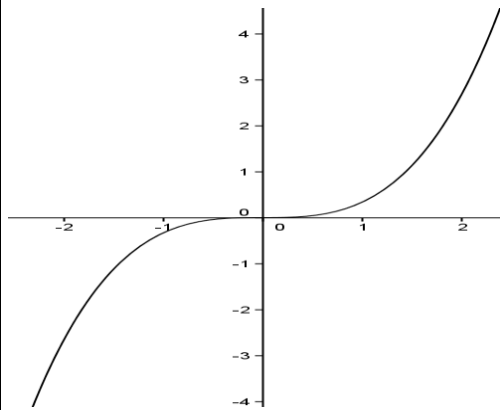
Donc : $f(x_1) < f(x_2)$

Donc f est strictement croissante

Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.5	-2	-1/4	0	1/4	2	6.5



10) Etude et représentation graphique de la fonction polynôme: $x \xrightarrow{f} \sqrt{a+x}$

Exemple : Soit f une fonction numérique définie par :

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

1) Déterminer D_f

2) étudier les variations de f et dresser le tableau de variation

3) tracer la dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C_f) de f

Solutions : 1)

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\} = [-2, +\infty[$$

2) soient $x_1 \in [-2; +\infty[$ et $x_2 \in [-2; +\infty[$ tq $x_1 < x_2$

Donc : $x_1 + 2 < x_2 + 2$ Donc : $\sqrt{x_1 + 2} < \sqrt{x_2 + 2}$

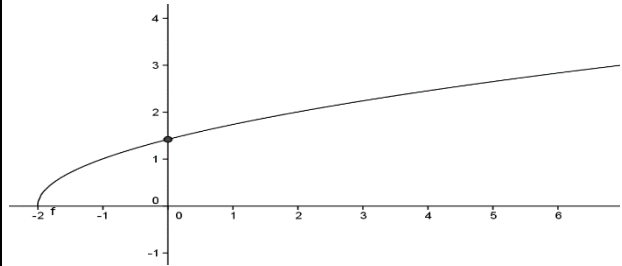
Donc : $f(x_1) < f(x_2)$

Donc f est strictement croissante

Tableau de variation :

x	-2	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$

x	-2	-1	0	2	7
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	2	3



11) Fonction Partie entière

12-1) Définition : Soit x un nombre réel

La partie entière de x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x .

Notation : La partie entière de x est maintenant notée :

$$E(x) \text{ ou } [x]$$

Exemples : $E(4,2) = 4$; $E(-3,75) = -4$;

12-2) Propriétés : 1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad E(x) \leq x < E(x) + 1$

2) $\forall x \in \mathbb{Z} \quad E(x) = x$

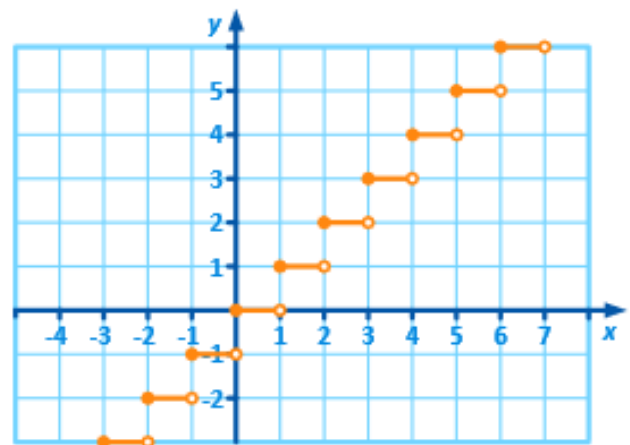
Un nombre x est entier si et seulement si il est égal à sa partie entière

2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad E(x+n) = n + E(x)$

12-3) représentation graphique de la

fonction $x \rightarrow E(x)$:

$\forall k \in \mathbb{Z}$ Si $k \leq x < k+1$ alors $E(x) = k$ donc Voici la courbe représentative de la fonction partie entière :



12) La composée de deux fonctions

12-1) Définition : Soit la fonction définie sur l'ensemble I et g la fonction définie sur l'ensemble J tel que :

$$\forall x \in I \quad f(x) \in J$$

La composée des deux fonctions f et g est la fonction notée :

$$g \circ f \text{ définie sur I par : } (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in I$$

On peut alors faire le schéma suivant :

$$x \rightarrow f(x) = y \rightarrow g(f(x)) = z$$

Remarque : 1) La composée de deux fonctions n'est pas commutative

$$\text{c.-à-d. } g \circ f \neq f \circ g$$

2) Soit D_f et D_g les ensembles de définition des fonctions f et g.

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$$

12-2) Variations d'une fonction composée

Théorème : Soit une fonction f définie sur un intervalle I et une fonction g définie sur f(I).

$\Leftrightarrow$ Si f et g ont même variation respectivement sur I et f(I) alors la fonction $g \circ f$ est croissante sur I.

$\Leftrightarrow$ Si f et g ont des variations opposées respectivement sur I et f(I) alors la fonction $g \circ f$ est décroissante sur I.

13) Fonctions périodiques :

Définition : On considère une fonction réelle f dont on note D l'ensemble de définition.

On dit que f est périodique de période T si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\text{a) } \forall x \in D \text{ on a } x+T \in D$$

$$\text{b) } \forall x \in D \text{ on a } f(x+T) = f(x)$$

et la période de f c'est le plus petit réel strictement positif qui vérifie les conditions

Exemple de fonctions périodiques :

1. Une fonction constante sur $\mathbb{R}$ est périodique ; tout réel non nul en est une période.

2. La fonction $x \rightarrow E(x)$ est périodique, 1 est une période ainsi que tout entier non nul.

3. les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période $T = 2\pi$

4. la fonction tangente est périodique de période $T = \pi$

5. La période des fonctions: $f: x \rightarrow \cos(ax)$ et

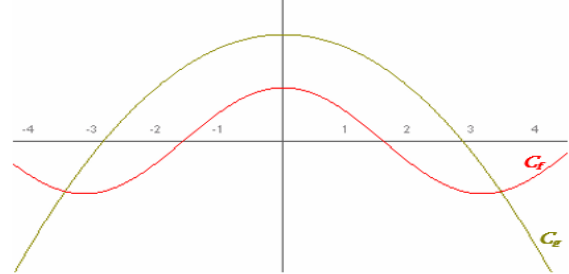
$$f: x \rightarrow \sin(ax) \quad a \neq 0 \text{ est } T = \frac{2\pi}{a}$$

Remarque : La périodicité permet de réduire l'étude des variations d'une fonction à un intervalle de longueur égale à la période. Donc pour tracer la représentation graphique d'une fonction T-périodique, il suffit donc de construire la courbe sur un intervalle de longueur T puis de translater autant de fois que nécessaire.

14) Applications : Position relative de courbes, interprétation graphique d'équations et d'inéquations

1) Position relative de deux courbes et intersection

Soient (C_f) la courbe représentative de f et (C_g) la courbe représentative de g.



On a les relations suivantes :

$$M(x; y) \in (C_f) \text{ ssi } y = f(x)$$

$$M(x; y) \in (C_g) \text{ ssi } y = g(x)$$

Aux points d'intersection de (C_f) et de (C_g) , on a

$$M \in (C_f) \text{ et } M \in (C_g) \text{ donc}$$

$$\text{soit } f(x) = g(x)$$

A retenir :

- les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) et de (C_g)
- les solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au-dessus de (C_g) .
- les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au-dessous de (C_g)

Un cas particulier :

équation $f(x) = m$ et inéquation $f(x) \geq m$

- Les solutions de l'équation $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $y = m$
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq m$ sont les abscisses des points de (C_f) situés au-dessus de la droite d'équation $y = m$.

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

Prof : Atmani najib

