

I. RAPPELS :

A. Fonction numérique :

a. Définition :

- Toute relation f qui associe chaque élément x de \mathbb{R} par un élément au plus y de \mathbb{R} est appelée

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

fonction numérique de la variable réelle x on note $x \mapsto f(x)$.

- Tous les éléments x de \mathbb{R} qui ont images par f constituent un ensemble, on l'appelle ensemble de définition (ou encore domaine de définition) on le note D_f ou D .

B. Fonction paire – fonction impaire :

a. Définition :

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f .

- (f est **paire** sur D_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f, -x \in D_f \\ \forall x \in D_f, f(-x) = f(x) \end{cases}$.
- (f est **impaire** sur D_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f, -x \in D_f \\ \forall x \in D_f, f(-x) = -f(x) \end{cases}$.

C. Monotonie d'une fonction numérique :

a. Définition :

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur un intervalle I .

- f est une fonction croissante (**strictement croissante**) sur $I \Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x'))$ ($\Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x < x' \Rightarrow f(x) < f(x'))$) . (le sens de l'inégalité ne change pas)
- f est une fonction décroissante (**strictement décroissante**) sur $I \Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x'))$ ($\Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x < x' \Rightarrow f(x) > f(x'))$) . (le sens de l'inégalité change)
- f est une fonction constante sur $I \Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; f(x) = f(x'))$.

b. Remarque :

- $D_f = I \cup I'$ tel que I et I' sont symétrique par rapport à zéro.
- Si f est paire ou impaire sur $D_f = I \cup I'$ alors il suffit d'étudier f sur $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+ = I$ on l'appelle ensemble d'étude (ou domaine d'étude).
- Si f est paire sur $D_f = I \cup I'$ alors les variations de f sont opposées sur I et I' .
- Si f est impaire sur $D_f = I \cup I'$ alors les variations de f sont les mêmes sur I et I' .

D. Extrémums d'une fonction :

a. Définition :

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f tel que $x_0 \in D_f$.

- $f(x_0)$ est valeur maximale absolue de f (f admet valeur maximale absolue au point x_0) si et seulement si : $\forall x \in D_f, f(x) \leq f(x_0)$.
- $f(x_0)$ est valeur minimale absolue de f (f admet valeur minimale absolue au point x_0) si et seulement si : $\forall x \in D_f, f(x_0) \leq f(x)$.

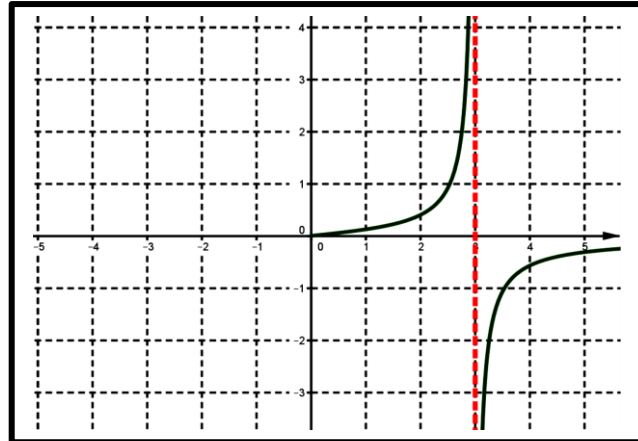
E. Applications :

Application 1 :

1. Compléter le tableau de variation et la courbe de la fonction f sachant que f set :

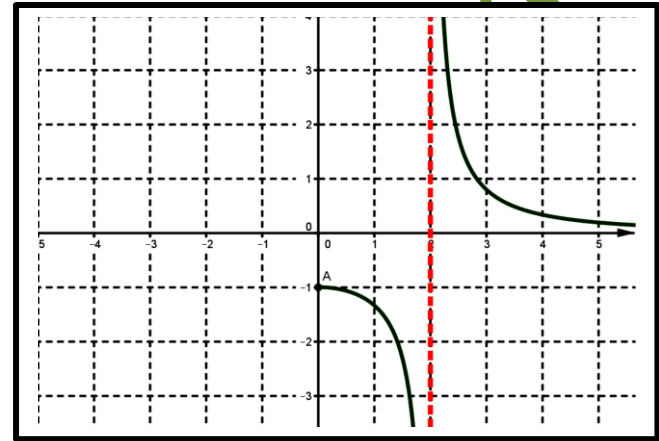
a. f est paire sur D_f (cas n° 1)

| X | $-\infty$ | -3 | 0 | 3 | $+\infty$ |
|------|-----------|----|---|---|-----------|
| f(x) | | | 0 | | |



b. f est impaire sur D_f (cas n° 2)

| X | $-\infty$ | -2 | 0 | 2 | $+\infty$ |
|------|-----------|----|----|---|-----------|
| f(x) | | | -1 | | |



2. Que représente $f(0)$ pour la fonction pour (cas n° 1).

Application 2 :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle définie par $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f .

2. Etudier la parité de f . On déduit l'ensemble D_E d'étude de f .

3. Etudier la monotonie de f sur $[0, 1[$ puis sur $]1, +\infty[$.

4. On déduit la monotonie de f sur $] -1, 0]$ puis sur $] -\infty, -1[$.

5. Dresser le tableau de variation de f sur D_E puis sur D_f .

6. Est-ce que f admet un extremum ? à déterminer.

II. A ajouter complément :

A. Extremums relatives :

a. Définition :

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f tel que $x_0 \in D_f$.

- $f(x_0)$ est valeur maximale relative de f (f admet valeur maximale relative au point x_0) si et seulement si : il existe un intervalle ouvert I_{x_0} de centre x_0 tel que $I_{x_0} \subset D_f$ on a :

$$\forall x \in I_{x_0}, f(x) \leq f(x_0).$$

- $f(x_0)$ est valeur minimale relative de f (f admet valeur minimale relative au point x_0) si et seulement si : il existe un intervalle ouvert I_{x_0} de centre x_0 tel que $I_{x_0} \subset D_f$ on a :

$$\forall x \in I_{x_0}, f(x_0) \leq f(x).$$

B. Taux d'accroissement d'une fonction f :

a. Définition :

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle I .

x et x' de I tel que $x \neq x'$ le nombre $\frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$ s'appelle le taux d'accroissement de la fonction

f entre x et x' , on note T_f .

b. Application :

Calculer le taux d'accroissement de la fonction f sur \mathbb{R} tel que : $f(x) = 2x$.

c. Propriétés :

T_f est le taux d'accroissement de la fonction f sur l'intervalle I .

- Si $T_f \leq 0$ alors la fonction f est décroissante sur I .
- Si $T_f < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I .
- Si $T_f \geq 0$ alors la fonction f est croissante sur I .
- Si $T_f < 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I .
- Si $T_f = 0$ alors la fonction f est constante sur I .

C. Fonction périodique :

a. Activité :

La figure ci-contre présente la courbe d'une fonction f définie sur \mathbb{R} . On prend x de \mathbb{R} .

1. Placer sur l'axe des abscisses x et x + 3 .

2. Déterminer graphiquement f(x) puis f(x + 3) .

3. Quelle remarque peut-on tirer ?

b. Vocabulaire :

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + 3) = f(x)$ on dit que la fonction f est périodique sur \mathbb{R} et son période est 3 on note : $T = 3$ ou $P = 3$.

c. Définition :

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f tel que $T \in \mathbb{R}^+$ ($T > 0$) .

la fonction f est périodique sur D_f et son période est T si et seulement si :

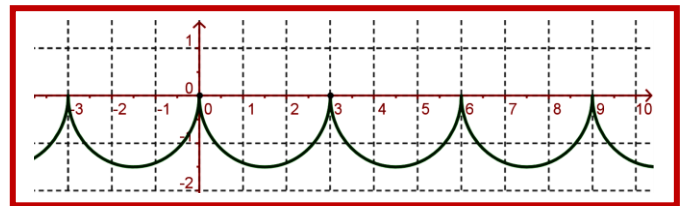
- $x \in D_f \Rightarrow (x + T \in D_f \text{ et } x - T \in D_f)$. (1)
- $\forall x \in D_f : f(x + T) = f(x)$. (2)

d. Remarque :

- T le plus petit réel strictement supérieur à 0 qui vérifie la relation (2) .
- $f(x) = \sin x$ et $f(x) = \cos x$ sont périodique de période $T = 2\pi$.
- $f(x) = \tan x$ est périodique de période $T = \pi$.

e. Application :

- Montrer que $f(x) = \sin ax$ (avec $a \neq 0$) est une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{|a|}$.
- f est une fonction périodique de période T sur D_f . montrer que :



1. $\forall n \in \mathbb{N} ; \forall x \in D_f : f(x+nT) = f(x) .$

2. $\forall n \in \mathbb{N} ; \forall x \in D_f : f(x-nT) = f(x)$

3. Quel propriété obtenue ?

f. La courbe d'une fonction périodique :

f est une fonction périodique de période T sur D_f .

▪ On considère les ensembles suivants : $I_k = [a+kT, a+(k+1)T] \cap D_f$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

($[a+kT, a+(k+1)T]$ est un intervalle de longueur T) .

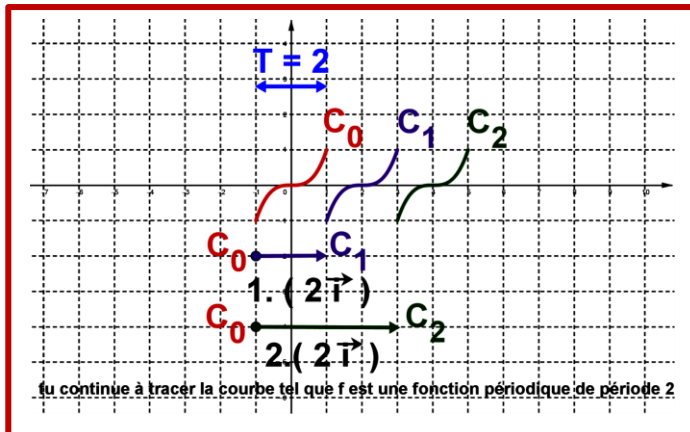
▪ C_k les courbes représentative de f sur I_k .

▪ Pour construire les courbes C_k , on construit d'abord C_0 sur $I_0 = [a, a+T] \cap D_f$.

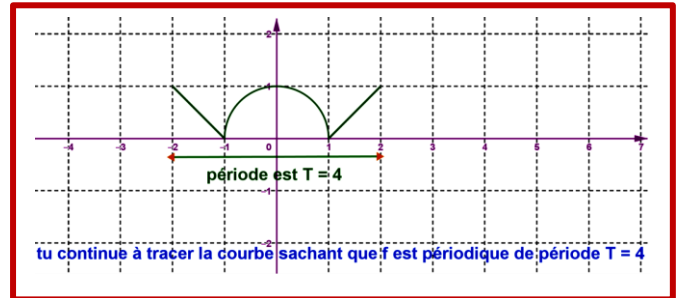
▪ Puis on translate la courbe C_0 par des translations de vecteurs $\vec{u} = kT\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

▪ Exemples :

Exemple n° 1



Exemple n° 2



III. Fonction majorée – fonction minorée – fonction bornée - extremums d'une fonction f :

A. Fonction majorée – fonction minorée – fonction bornée :

a. Activité :

La figure ci-contre présente la courbe d'une fonction f définie sur D_f .

Compléter par le symbole qui convient :

1. $\forall x \in [-4;11] : f(x) \dots 5$.

2. $\forall x \dots [-4;11] : -4 \dots f(x)$.

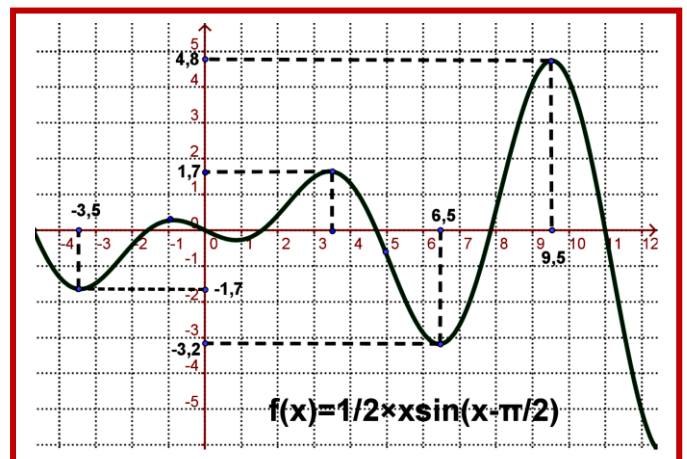
3. $\forall x \in [\dots, \dots] : -4 \dots f(x) \dots 5$.

b. Vocabulaire : on dit que :

▪ La fonction f est majorée par 5 sur $[-4,11]$ (ou par 6) .

▪ La fonction f est minorée par -4 sur $[-4,11]$ (ou par -7) .

▪ La fonction f est bornée 5 sur $[-4,11]$.



c. Définitions :

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur I ($I \subset \mathbb{D}_f$). M et m de \mathbb{R} .

- La fonction f est majorée par M sur I si et seulement si : $\forall x \in I ; f(x) \leq M$ (ou $f(x) < M$)
- La fonction f est minorée par m sur I si et seulement si : $\forall x \in I ; m \leq f(x)$ (ou $m < f(x)$)
- La fonction f est bornée par M sur I si et seulement si : f est majorée et minorée sur I .
- Remarque :** (La fonction f est bornée sur I) $\Leftrightarrow (\exists A \in \mathbb{R}^+, \forall x \in I : |f(x)| \leq A)$.

d. Applications :

❖ f est une fonction tel que son tableau de variation (ci-contre) :

| X | -3 | 0 | 5 | 9 | $+\infty$ |
|--------|----|----|-----|----|-----------|
| $f(x)$ | | 7 | | -6 | |
| | | ↗ | ↘ | ↗ | ↘ |
| | | -1 | -14 | | -12 |

1. f est elle majorée ? f est elle minorée ?

f est elle bornée ? sur $[-3, +\infty[$.

2. Que représente 7 puis -14 pour la fonction f sur $[-3, 11]$?

3. Que représente 7 puis -6 pour la fonction f ?

❖ f est une fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $I = [1; +\infty[$.

1. Montrer que : f est majorée par 1 sur I .

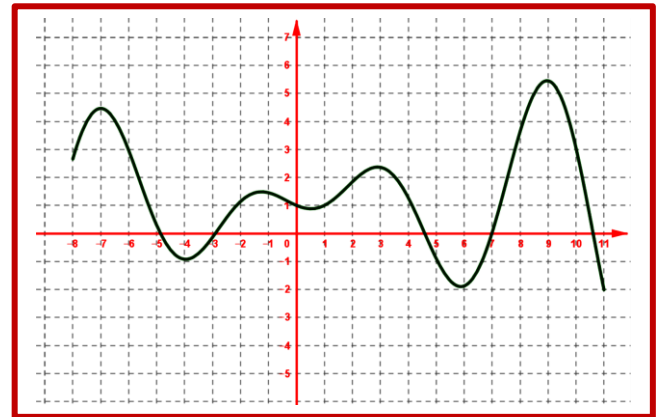
2. Montrer que : f est minorée sur I .

3. Est-ce que f est bornée sur I .

❖ La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction f

1. Est-ce que f est majorée ? f est minorée ?

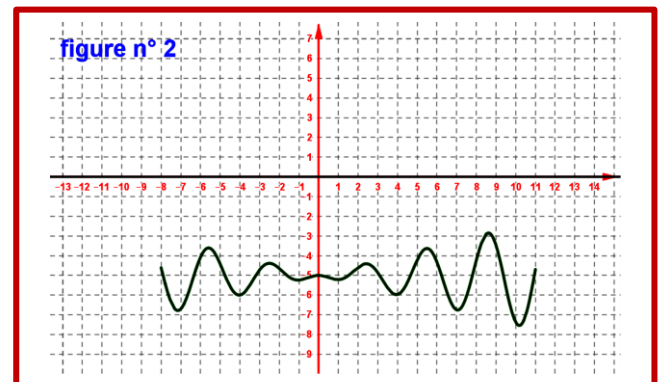
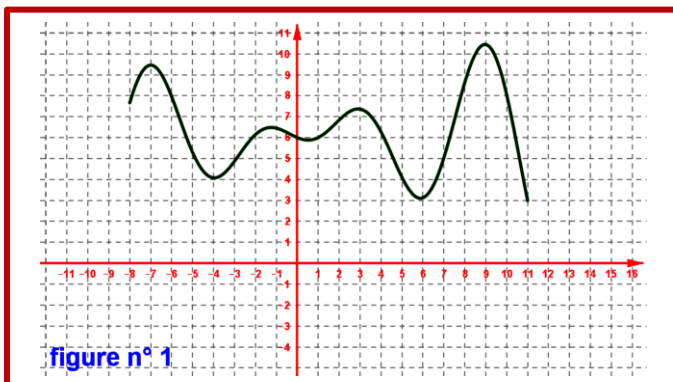
f est bornée ? sur $[-8, 11]$.



IV. Comparaison deux fonctions et interprétation géométrique

A. Fonction positive – fonction négative :

a. Activité :



La figure n° 1 représente une fonction positive sur $[-8, 11]$.

La figure n° 2 représente une fonction négative sur $[-8, 11]$.

1. Quelle remarque peut-on tirer ?

2. Exprimer la remarque on utilise des symboles.

b. Définition :

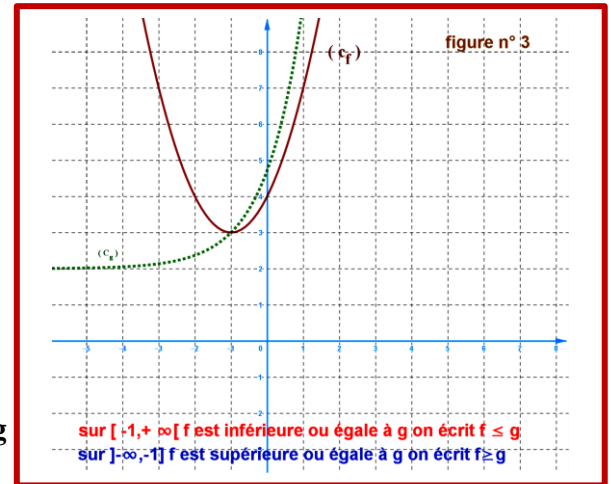
f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f .

- f est une fonction positive sur D_f si et seulement si $\forall x \in D_f : f(x) \geq 0$. la courbe (C_f) de f est située au dessus de l'axe des abscisses.
- f est une fonction strictement négative sur D_f si et seulement si $\forall x \in D_f : f(x) < 0$. la courbe (C_f) de f est située strictement au dessous de l'axe des abscisses.

B. Comparaison de deux fonctions :

a. Activité :

La figure ci-contre n° 3 présente la courbe d'une fonction f définie sur D_f .



- On dit que : la fonction f est inférieure ou égale à la fonction g sur $[-1, +\infty[$.
- On dit que : la fonction f est strictement supérieure à la fonction g sur $[-1, +\infty[$.

1. Exprimer les propositions présidentes par des symboles.

2. Que peut-on dire pour le cas de la fonction f est égale à g

b. Définition :

Soient f et g deux fonctions définies sur I .

- $(f \leq g \text{ sur } I) \Leftrightarrow (\forall x \in I : f(x) \leq g(x))$.
la courbe (C_f) de f est située au dessous de la courbe de (C_g) de g sur I .
- $(f > g \text{ sur } I) \Leftrightarrow (\forall x \in I : f(x) > g(x))$.
la courbe (C_f) de f est située strictement au dessus de la courbe de (C_g) de g sur I .
- $(f = g \text{ sur } I) \Leftrightarrow (\forall x \in I : f(x) = g(x))$.
la courbe (C_f) de f et la courbe de (C_g) de g sont confondues sur I .

V. Composée de deux fonctions :

a. Activité :

Soient f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2x + 3$; $g(x) = x^2 + 1$.

1. Déterminer D_f puis D_g .

2. Calculer $f(1)$; $g(5)$; puis écrire $g(5)$ en fonction de f et 1 .

3. Calculer $g(f(3))$ puis $g(f(x))$.

b. Vocabulaire – notation :

- La fonction $h : x \mapsto h(x) = g(f(x))$ on la note par $h = g \circ f$ d'où : $h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$.
- La fonction $g \circ f$ est appelée la composée des fonction f et g dans cet ordre.
- On peut faire le diagramme suivant pour $g \circ f$:

$$h = g \circ f : D_f \xrightarrow{f} f(D_f) \subset D_g \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) \in D_g \mapsto g(f(x)) = g \circ f(x) = h(x)$$

c. Définition :

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g et $f(D_f) \subset D_g$.

On pose : $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$.

La fonction h définie sur $D_{g \circ f}$ par $h(x) = g(f(x))$ est appelée la composée des fonction f et g dans cet ordre et on note $h = g \circ f$.

d. Application :

Soient f et g deux fonctions définies respectivement par : $f(x) = 2x^2 + 3x$; $g(x) = 5x - 7$.

1. Déterminer $D_{g \circ f}$ puis $D_{f \circ g}$.

2. Calculer : $g \circ f$ puis $f \circ g$.

3. Calculer : $g \circ f(2)$ puis $f \circ g(2)$. que remarquez-vous ?

VI. Monotonie de : $f+c$ et $c.f$ et $f \circ g$ avec c de \mathbb{R}^* - $g \circ f$:A. Monotonie de : $f+c$ et $c.f$ et $f \circ g$ avec c de \mathbb{R}^* .a. Activité :

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur I .

T_f est le taux d'accroissement de la fonction f sur I .

1. Déterminer T_h le taux d'accroissement de la fonction $h(x) = f(x) + c$ sur I . (avec $c \in \mathbb{R}$).

2. Déterminer T_g le taux d'accroissement de la fonction $g(x) = c \times f(x)$ sur I . (avec $c \in \mathbb{R}$).

3. Donner la propriété obtenue.

Correction :

1. Calculons T_h :

Soient : x et x' de I tel que $x' \neq x$.

$$\text{On a : } T_h = \frac{h(x) - h(x')}{x - x'} = \frac{f(x) + c - (f(x') + c)}{x - x'} = \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = T_f.$$

$$\text{D'où : } T_h = T_{f+c} = T_f$$

Conclusion : f et $f+c$ varient dans le même sens sur I (ont même sens de variation sur I).

2. Calculons T_g :

Soient : x et x' de I tel que $x' \neq x$.

$$\text{On a : } T_g = \frac{g(x) - g(x')}{x - x'} = \frac{c \times f(x) - c \times f(x')}{x - x'} = \frac{c \times (f(x) - f(x'))}{x - x'} = c \times T_f. \text{ D'où } T_g = T_{c \times f} = c \times T_f$$

Conclusion :

- Si $c > 0$ alors f et $c \times f$ varient dans le même sens sur I .
- Si $c < 0$ alors f et $c \times f$ leurs variations sont opposées sur I .

b. Propriété :

T_f est le taux d'accroissement d'une fonction f sur I et $c \in \mathbb{R}$.

- Les fonctions f et $f+c$ varient dans le même sens sur I (ont même sens de variation sur I).
- Si $c > 0$ alors f et $c \times f$ varient dans le même sens sur I .
- Si $c < 0$ alors f et $c \times f$ leurs variations sont opposées sur I .

B. Monotonie de : $g \circ f$

a. Activité :

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g et $f(D_f) \subset D_g$ (c.à.d.

$$\forall x \in D_f ; f(x) \in f(D_f) \subset D_g$$

1. Montrer que si f et g varient dans le même sens respectivement sur D_f et $f(D_f) \subset D_g$ alors $g \circ f$ est croissante sur D_f .

2. Montrer que si f et g leurs variations sont opposées respectivement sur D_f et $f(D_f) \subset D_g$ alors $g \circ f$ est strictement décroissante sur D_f .

3. Donner la propriété obtenue.

b. Propriété :

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g et $f(D_f) \subset D_g$.

- si f et g ont même monotonie (**strictement monotone**) respectivement sur D_f et $f(D_f) \subset D_g$ alors $g \circ f$ est croissante sur D_f (**$g \circ f$ est strictement croissante sur D_f**).
- si f et g ont monotonie (**strictement monotone**) opposées respectivement sur D_f et $f(D_f) \subset D_g$ alors $g \circ f$ est décroissante sur D_f (**$g \circ f$ est strictement décroissante sur D_f**).

c. Application :

Soient f et g deux fonctions définies respectivement par : $f(x) = |x| + 5$ et $g(x) = x^2$.

1. Déterminer D_f puis D_g .

2. Etudier la monotonie de f et g .

3. Déterminer la monotonie de $g \circ f$ sur \mathbb{R} à travers un tableau.

VII. Etude et représentation graphique de certain fonctions :

A. Etude et représentation graphique de $x \mapsto ax^2 + bx + c$ (polynôme du deuxième degré).

a. Activité :

f est une fonction définie par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a et b et c de \mathbb{R} et $a \neq 0$.

$$\text{On a : (1) : } f(x) = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

$$\text{D'où : } f \left(-\frac{b}{2a} \right) = -\frac{\Delta}{4a}.$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite : (1) } &\Leftrightarrow f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + f \left(-\frac{b}{2a} \right) \\ &\Leftrightarrow f(x) - f \left(-\frac{b}{2a} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 ; (2) . \end{aligned}$$

1^{er} cas $a > 0$:

$$(2) \Rightarrow f(x) - f \left(-\frac{b}{2a} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x) - f\left(-\frac{b}{2a}\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

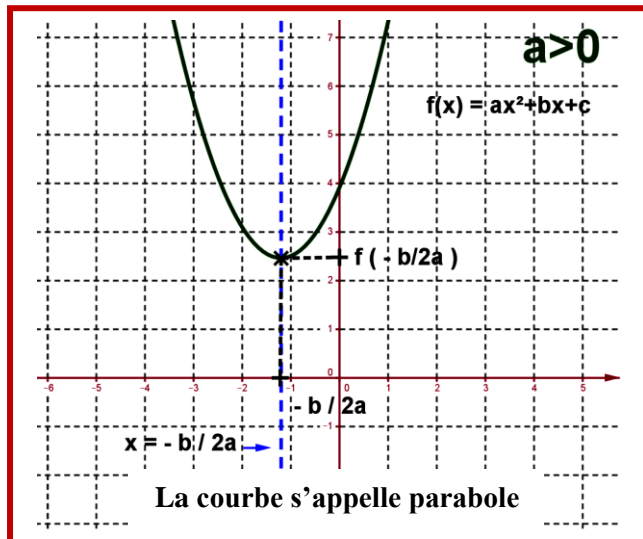
$$\Rightarrow f\left(-\frac{b}{2a}\right) \leq f(x)$$

▪ Donc : $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ est la valeur minimale absolue pour f sur \mathbb{R} .

▪ Tableau de variation de f est :

| x | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$ | $+\infty$ |
|------|-----------|-------------------------------|-----------|
| f(x) | | $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ | |

▪ La courbe représentative de f est :



❖ Vocabulaire :

- $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a > 0$
- La courbe obtenue est appelée **parabole**, orienté vers le haut de **sommet**
 $S\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.
- Son axe de symétrie est la droite (D)
d'équation : (D) : $y = -\frac{b}{2a}$

2^{ème} cas $a < 0$:

$$(2) \Rightarrow f(x) - f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$$

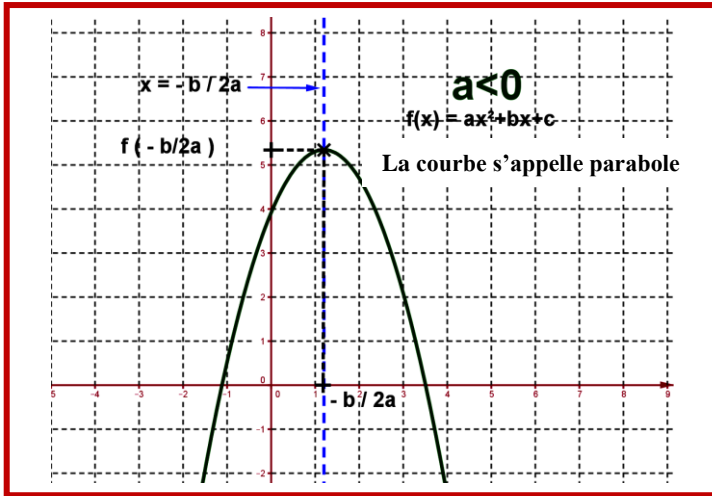
$$\Rightarrow f(x) \leq f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

▪ Donc : $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ est la valeur maximale absolue pour f sur \mathbb{R} .

▪ Tableau de variation de f est :

| x | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$ | $+\infty$ |
|------|-----------|-------------------------------|-----------|
| f(x) | | $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ | |

- La courbe représentative de f est :



Vocabulaire :

- $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a < 0$
 - La courbe obtenue est appelée parabole , orienté vers le bas de sommet $S\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.
 - Son axe de symétrie est la droite (D)
- d'équation : (D) : $y = -\frac{b}{2a}$

b. Application :

- f est une fonction définie par : $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$.

- Déterminer les éléments caractéristiques de la courbe (C_f) de f .
- Dresser le tableau de variation de f .
- Construire la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Correction :

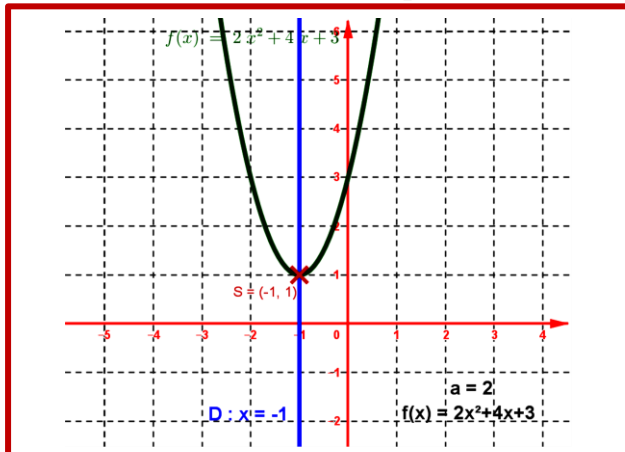
- Les éléments caractéristiques de la courbe (C_f) de f .

- La courbe de f est appelée parabole , orienté vers le haut de sommet $S(-1, 1)$.
- Son axe de symétrie est la droite (D) d'équation : (D) : $y = 2$.

- Le tableau de variation de f .

| | | | |
|------|------------|---|------------|
| x | $-\infty$ | -1 | $+\infty$ |
| f(x) | \searrow | $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(-1) = 1$ | \nearrow |

- On construit la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .



❖ f est une fonction définie par : $f(x) = -x^2 + 4x$.

1. Déterminer les éléments caractéristiques de la courbe (C_f) de f .

2. Dresser le tableau de variation de f et Construire la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

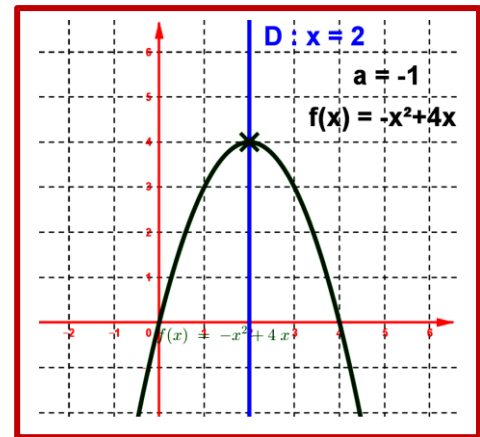
Correction :

1. Les éléments caractéristiques de la courbe (C_f) de f .

- La courbe de f est appelée parabole, orienté vers le bas de sommet $S(2, 4)$.
- Son axe de symétrie est la droite (D) d'équation : $(D) : y = -1$.

2. Le tableau de variation de f et On construit la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

| | | | |
|------|--|---|-----------|
| x | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
| f(x) | $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(2) = 4$ | | |
| | | ↗ | ↘ |



B. Etude et représentation graphique de $(a \neq 0)$; $f(x) = ax^3$.

a. Activité :

f est une fonction définie par : $f(x) = ax^3$ avec et $a \neq 0$.

- Ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R}$. (car f est une fonction polynomiale).
- f est une fonction impaire car $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a(-x)^3 = -ax^3 = f(x)$.
- Ensemble de d'étude est : $D_E = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$.
- La monotonie de f : soient x et x' de D_E tel que $x < x'$ on a (1) : $x < x' \Rightarrow x^3 < (x')^3$

1^{er} cas $a > 0$:

$$(1) \Rightarrow ax^3 < a(x')^3$$

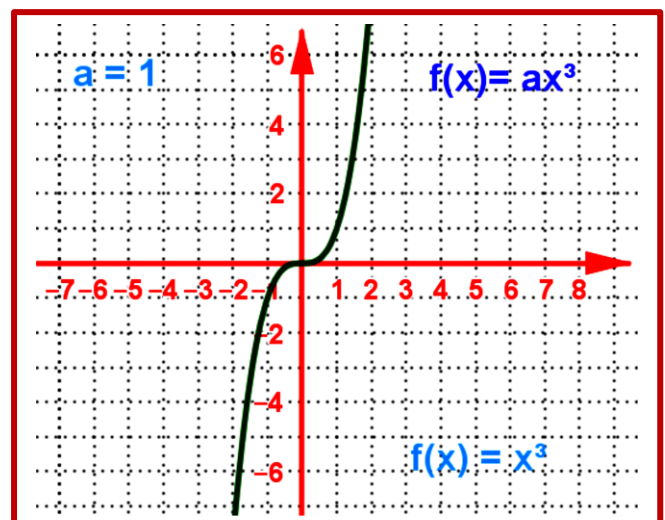
$$\Rightarrow f(x) < f(x')$$

D'où f est strictement croissante sur $D_E = \mathbb{R}^+$

et aussi sur \mathbb{R}^- car la fonction est impaire.

- Le tableau de variation de f et La courbe représentative de f est

| | | | |
|------|-----------|---|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| f(x) | | 0 | |
| | | ↗ | ↘ |



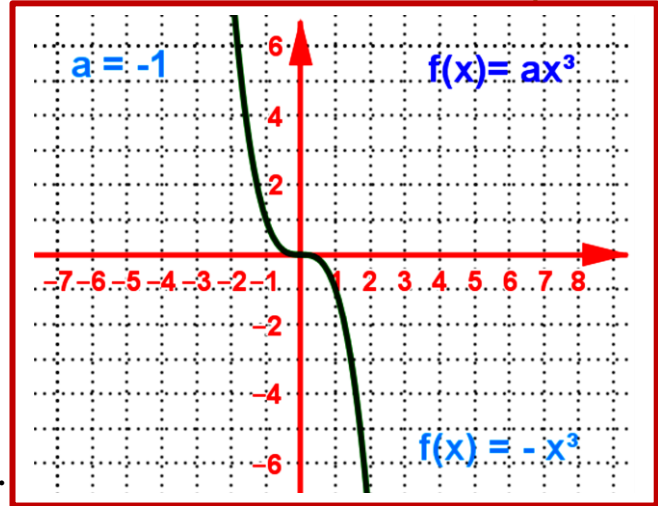
1^{er} cas $a < 0$:

$$(1) \Rightarrow ax^3 > a(x')^3 \\ \Rightarrow f(x) > f(x')$$

D'où f est strictement décroissante sur $D_E = \mathbb{R}^*$ et aussi sur \mathbb{R}^- car la fonction est impaire .

Le tableau de variation de f et La courbe représentative de f est :

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|--------|-----------|---|-----------|
| $f(x)$ | | 0 | |



b. Application :

❖ f est une fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x^3$.

1. Dresser le tableau de variation de f .

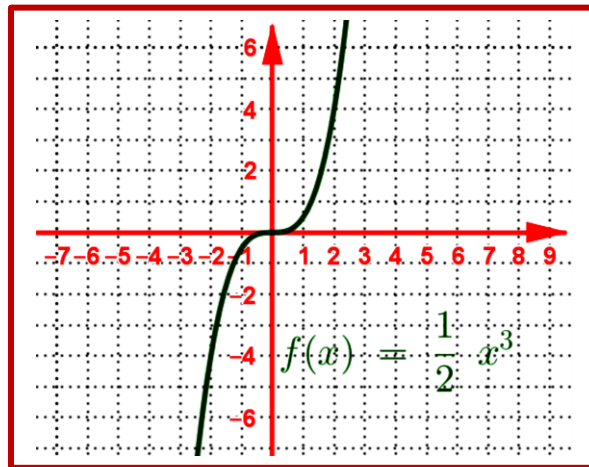
2. Construire la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Correction :

1. Le tableau de variation de f est :

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|--------|-----------|---|-----------|
| $f(x)$ | | 0 | |

2. On construit la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .



❖ f est une fonction définie par : $f(x) = -\frac{2}{3}x^3$.

1. Dresser le tableau de variation de f .

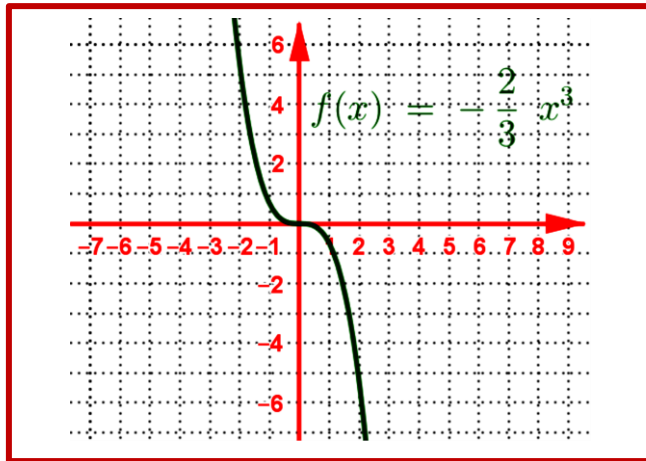
2. Construire la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Correction :

1. Le tableau de variation de f est :

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|--------|-----------|---|-----------|
| $f(x)$ | | 0 | |

2. On construit la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .



C. Etude et représentation graphique de la fonction homographique : $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$; ($c \neq 0$).

■ Ensemble de définition :

On a :

$$x \in D_f \Leftrightarrow cx + d \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq -\frac{d}{c}$$

$$D'ou : D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} = \left] -\infty, -\frac{d}{c} \right[\cup \left] -\frac{d}{c}, +\infty \right[.$$

■ La monotonie de f : soient x et x' de D_E tel que $x \neq x'$.

on a :

$$T_f = \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} ; (x \neq x')$$

$$= \frac{\frac{ax+b}{cx+d} - \frac{ax'+b}{cx'+d}}{x - x'}$$

$$= \frac{(ax+b)(cx'+d) - (ax'+b)(cx+d)}{(cx+d)(cx'+d)(x-x')}$$

$$= \frac{adx + bcx' - adx' - bcx}{(cx+d)(cx'+d)(x-x')}$$

$$= \frac{x(ad-bc) - x'(ad-bc)}{(cx+d)(cx'+d)(x-x')} \\ = \frac{(ad-bc)(x-x')}{(cx+d)(cx'+d)(x-x')} = \frac{(ad-bc)}{(cx+d)(cx'+d)} = \frac{\Delta}{(cx+d)(cx'+d)} ; \left(\Delta = ad-bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right)$$

- On a le signe de $(cx+d)(cx'+d) > 0$ sur $\left]-\frac{d}{c}, +\infty\right[$ et de même sur $\left]-\infty, -\frac{d}{c}\right[$.

D'où le signe de T_f est le signe de $\Delta = ad-bc$ donc la monotonie de f sur $\left]-\frac{d}{c}, +\infty\right[$ et de même sur $\left]-\infty, -\frac{d}{c}\right[$ dépend du signe de $\Delta = ad-bc$.

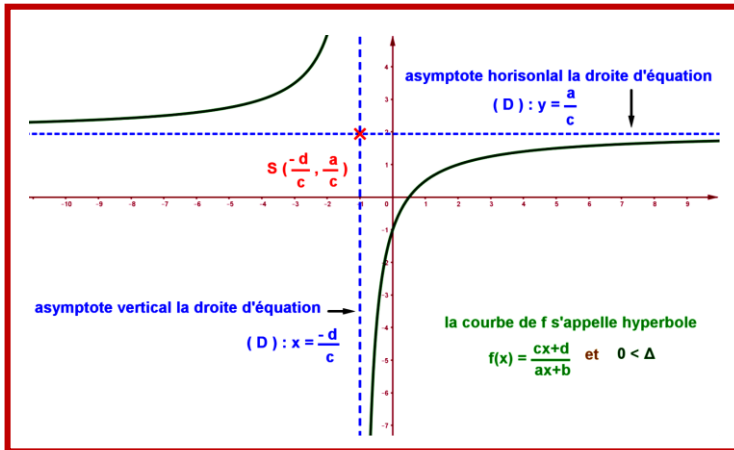
1^{er} cas $\Delta = ad-bc > 0$: donc $T_f > 0$.

- D'où f est strictement croissante sur $\left]-\frac{d}{c}, +\infty\right[$ et aussi sur $\left]-\infty, -\frac{d}{c}\right[$.
- Le tableau de variation de f est :

| | | | |
|---|------------|----------------|------------|
| x | $-\infty$ | $-\frac{d}{c}$ | $+\infty$ |
| f | \nearrow | \parallel | \nearrow |

$\Delta > 0$

- La courbe représentative de f est :



❖ Vocabulaire :

- $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$; $(c \neq 0)$; $\Delta = ad-bc > 0$

- La courbe obtenue est appelée hyperbole.

- Son centre de symétrie est $\Omega\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$.

- Asymptote verticale est la droite (D)

d'équation : $D_v : x = -\frac{d}{c}$.

- Asymptote horizontale est la droite (D)

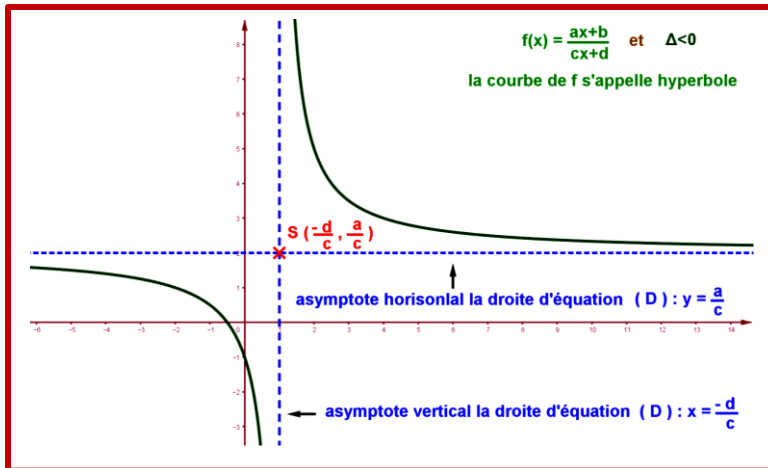
d'équation : $D_h : y = \frac{a}{c}$

2^{ème} cas $\Delta = ad-bc < 0$: donc $T_f < 0$.

- D'où f est strictement décroissante sur $\left]-\frac{d}{c}, +\infty\right[$ et aussi sur $\left]-\infty, -\frac{d}{c}\right[$.
- Le tableau de variation de f est :

| | | | | |
|--------------|------|------------|----------------|------------|
| | x | $-\infty$ | $-\frac{d}{c}$ | $+\infty$ |
| $\Delta < 0$ | f(x) | \searrow | \parallel | \searrow |

- La courbe représentative de f est



Vocabulaire :

▪ $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$; ($c \neq 0$) ; $\Delta = ad - bc < 0$

▪ La courbe obtenue est appelée hyperbole .

▪ Son centre de symétrie de la courbe est

$\Omega\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$.

▪ Asymptote verticale est la droite (D)

d'équation : $D_v : x = -\frac{d}{c}$.

▪ Asymptote horizontale est la droite (D)

d'équation : $D_h : y = \frac{a}{c}$

c. Application :

❖ f est une fonction définie par : $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

1. Déterminer les éléments caractéristiques de la courbe (C_f) de f .

2. Dresser le tableau de variation de f .

3. Construire la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Correction :

1. Les éléments caractéristiques de la courbe (C_f) de f .

▪ On a $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 1 \times 1 = 1 > 0$

▪ La courbe de f est un hyperbole .

▪ Centre de symétrie est $\Omega\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right) = \Omega(-1, 2)$.

▪ Asymptote verticale est la droite (D_v) d'équation : $D_v : x = -\frac{d}{c} = -1$.

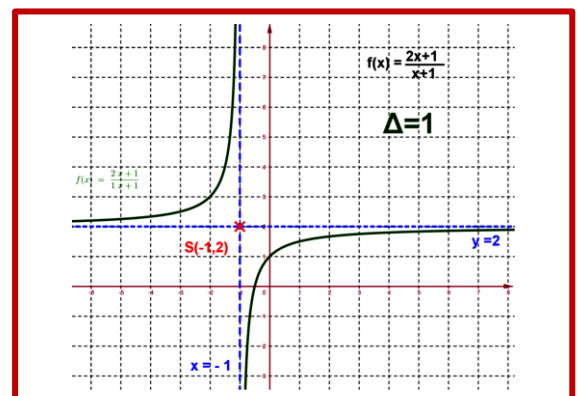
▪ Asymptote horizontale est la droite (D_h) d'équation : $D_h : y = \frac{a}{c} = 2$.

2. Le tableau de variation de f .

| | | | |
|-----|------------|---------------------|------------|
| x | $-\infty$ | $-\frac{d}{c} = -1$ | $+\infty$ |
| f | \nearrow | \parallel | \nearrow |

$\Delta > 0$

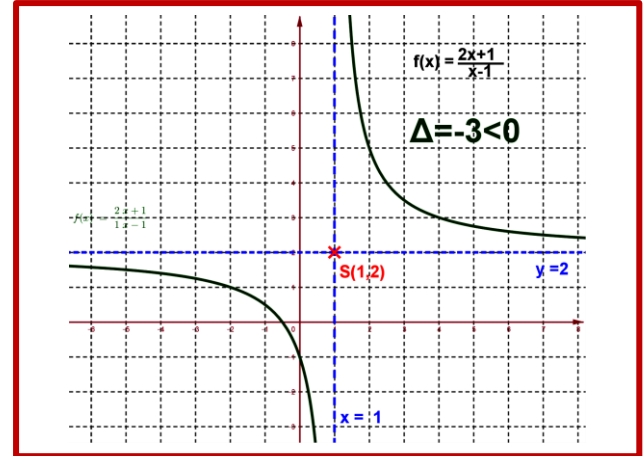
3. On construit la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .



- f est une fonction définie par : $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

| | | | |
|------|------------|--------------------|------------|
| x | $-\infty$ | $-\frac{d}{c} = 1$ | $+\infty$ |
| f(x) | \searrow | \parallel | \searrow |

$\Delta < 0$



D. Etude et représentation graphique de la fonction $f(x) = \sqrt{x+a}$:

- f est définie sur $D_f = [-a, +\infty[$.
- Monotonie de f sur $D_f = [-a, +\infty[$.
soient x et x' de $D_f = [-a, +\infty[$ tel que $x < x'$.

on a :

$$\begin{aligned} x < x' &\Rightarrow 0 \leq x+a < x'+a \\ &\Rightarrow 0 \leq \sqrt{x+a} < \sqrt{x'+a} \\ &\Rightarrow 0 \leq f(x) < f(x') \end{aligned}$$

D'où f est strictement croissante sur $D_f = [-a, +\infty[$.

- Le tableau de variation de f.

| | | |
|------|------|------------|
| x | $-a$ | $+\infty$ |
| f(x) | 0 | \nearrow |

- La courbe représentative de f est :

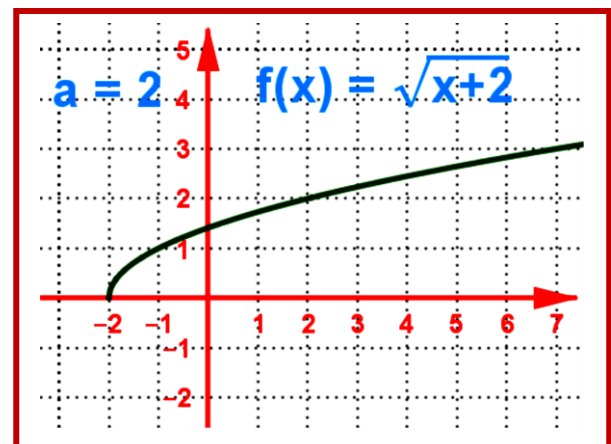
Cas : $f(x) = \sqrt{a-x}$

- f est définie sur $D_f =]-\infty, a]$.
- Monotonie de f sur $D_f =]-\infty, a]$.
soient x et x' de $D_f =]-\infty, a]$ tel que $x < x'$.

$$\begin{aligned} x < x' &\leq a \Rightarrow -a \leq -x < -x' \\ &\Rightarrow 0 \leq -x+a < -x'+a \\ &\Rightarrow 0 \leq \sqrt{-x+a} < \sqrt{-x'+a} \\ &\Rightarrow 0 \leq f(x) < f(x') \end{aligned}$$

D'où f est strictement décroissante sur $D_f =]-\infty, a]$.

- Le tableau de variation de f.
- La courbe représentative de f est :



| | | |
|------|-----------|------------|
| x | $-\infty$ | a |
| f(x) | 0 | \searrow |

