Série des exercices : Notions de logique

Exercice 01 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes s'il est possible.

1) $P:"\forall x\in\mathbb{R}/x^2\geq 0"$
2) $Q:"\exists x\in\mathbb{R}/x^2-2=0"$
3) $R:"\forall x,y\in\mathbb{R}:x^2\neq y^2"$
4) $S:"\ \forall n\in\mathbb{N}\quad \exists m\in\mathbb{N}\ :n<m"$
5) $T:"\ \forall x\in\mathbb{R}\quad \exists y\in\mathbb{Q}\ \ /x=y\ ou\ x>y"$
6) $V:"\ \exists y\in\mathbb{Q}\quad \forall x\in\mathbb{R}\ \ /x=y\ ou\ x>y"$
7) $M:"\ \forall x\in\mathbb{R}\quad \exists y\in\mathbb{Q}\ :y^2=x"$
8) $N:"\ \forall x\in\mathbb{R}\quad \forall y\in\mathbb{R}\ \ /x^2=y^2\ et\ x=y"$
9) $P_1:"\forall x\in\mathbb{R}/-1\leq\cos\ x\ \leq 1"$
10) $P_2:"a=b=c"$
11) $P_3:"a>b\Rightarrow a\geq c"$
12) $P_4:"\forall\ \ x,y\ \in\mathbb{R}^2:x-y=1\Leftrightarrow x>1"$

Exercice 02 : Écrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes.

1. Il existe un réel M tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $x\leq M$
2. Le carré de tout réel est positif.
3. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
4. Il n'existe aucun nombre rationnel, qui résoudre l'équation $x^2=2$.
5. f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
6. Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.
7. Il existe un entier multiple de tous les autres.

Exercice 03 : ֍ **Raisonnement par Déduction** ֍

1. Soit $x,y\in\mathbb{R}$

   Montrer que : $\begin{cases}0\leq x<2\\0\leq y<2\end{cases}\Rightarrow\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}>1$

2. Soit $x\in\mathbb{R}^+$

   Montrer que : $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}=1-\sqrt{x}\Rightarrow x=0$

3. A- Montrer que

   $\forall\ \ a,b\ \in\mathbb{R}^2\ \ :a^2+b^2=0\Rightarrow a=0\ et\ b=0$

   B- $x\in\mathbb{R}^+$ et $y\in\mathbb{R}^+$, montrer que :

   $x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}\Rightarrow x=y=1$

Exercice 04 : ֍ **Raisonnement par Contre-exemple** ֍

1. Donner avec justification la valeur de vérité de P

   P : « Tous les nombres premiers sont impairs »
2. Montrer que cette assertion est fausse :

   « $\forall n\in\mathbb{N}\ :n^2+n+1$ est un nombre premier »
3. Montrer que les propositions suivantes sont fausses :

   $P_1:\ \forall x\in\mathbb{R}\quad \forall y\in\mathbb{R}\ \ /x^2+y^2\geq x+y$

   $P_2:\ \forall\ \ a,b\ \in\mathbb{R}^2\ \ /\sqrt{a^2+b^2}=a+b$

Exercice 05 : ֍ **Raisonnement par Contraposée** ֍

1. Montrer que $x\neq 2\ et\ y\neq 2\Rightarrow 2x+2y-xy-2\neq 2$
2. Montrer que $x\neq y\Rightarrow\ \ x+1\quad y-1\ \neq\ x-1\quad y+1$
3. Soit $n\in\mathbb{N}$, montrer que si n^2 est impair alors n est impair.
4. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N};n\ \ n+1\quad n+2$ est divisible par 3

Exercice 06 : ֍ **Raisonnement par Équivalences** ֍

Soit $x\in\mathbb{R}$, montrer que : $\left|x-1\right|\leq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{2}{5}\leq\dfrac{1}{x+1}\leq\dfrac{2}{3}$

Exercice 07 : ֍ **Raisonnement par Disjonction des cas** ֍

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

   $$\left|x-1\right|+2x-3\geq 0$$
2. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}\ :\left|x-1\right|\leq x^2-x+1$
3. Soit $n,p\in\mathbb{N}$, montrer que $n\times p$ est pair ou n^2-p^2 est un multiple de 8.

Exercice 08 : ֍ **Raisonnement par l'Absurde** ֍

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.
2. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*\ :\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\notin\mathbb{Q}$
3. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}\ :\dfrac{n+1}{n+2}\notin\mathbb{N}$
4. Soit $n\in\mathbb{N}$ Posons $A=\dfrac{n+3}{n+5}$, Montrer que $A\neq 1$

Exercice 09 : ֍ **Raisonnement par Récurrence** ֍

1. Montrer par récurrence les formules suivantes :

   a- $\forall n\in\mathbb{N}:\sum_{k=1}^{k=n}k=1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

   b- $\forall n\in\mathbb{N}:\sum_{k=1}^{k=n}k^2=1^2+2^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   c- $\forall n\in\mathbb{N}^*:1+3+5+...+\ \ 2n+1\ \ =\ \ n+1\ ^2$
2. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N};\ 4^n+6n-1$ est divisible par 9.
3. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N};\ 7^n-1$ est divisible par 6.
4. Soit $a\in\mathbb{R}^*_+$ (Nombre réel fixe)

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N};\quad 1+a\ ^n\geq 1+n\times a$

֍֍ Prof. Mohamed SELLAH ֍֍