## 01.

**1.** Déterminer la valeur de vérité et la négation de chaque proposition suivante .

a. $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 \le x \Rightarrow |x| = x$

b. $x \in \mathbb{R}\ ;\ \left(x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2\right)$.

c. $(7 < 5 \text{ et } 2+1=3)$ ou $(-3 \in \mathbb{N})$

d. $(7 < 5 \Rightarrow 2+1=0)$ ou $(-3 \in \mathbb{N})$

e. $\exists n \in \mathbb{Z},\ n^2 \le n$ . $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 < x$.

f. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x - y + 3 = 0$ . $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x - y + 3 = 0$.

g. $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \sqrt{x^2+3} \ge 2 \Leftrightarrow x \ge 1$.

## 02.

Ecrire les expressions suivantes on utilise les quantificateurs qui correspond .

a. Le carré d'un nombre réel est positif .

b. Il n'existe pas un nombre rationnel est solution de l'équation $x^2 - 3 = 0$ .

c. Pour tout nombre entier naturel $n$, il existe au moins un entier naturel $k$ til que $k \le n$.

## 03.

Déterminer la valeur de vérité qui suit

a. $x \in \mathbb{R}\ ;\ \left(x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2\right)$ .

b. $(7 < 5 \text{ et } 2+1=3)$ ou $(-3 \in \mathbb{N})$.

c. $(7 < 5 \Rightarrow 2+1=0)$ ou $(-3 \in \mathbb{N})$ .

d. $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 \le x \Rightarrow |x| = x$ .

## 04.

**1.** On utilise le raisonnement par contre exemple , montrer que la relation suivante est fausse :
$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} : xy = 2$ .

**2.** On utilise le raisonnement par contre posé , montrer que :
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : (x \ne 1 \wedge y \ne 1) \Rightarrow xy + 1 \ne x + y$ .

**3.** On utilise le raisonnement par contre posé , tel que $a$ et $b$ de $\mathbb{R}$ avec $b \ne 2a$ montrer que :

$$b \ne \frac{a}{4} \Rightarrow \frac{a+2b}{2a-b} \ne \frac{6}{7} .$$

**4.** Sachant que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ montrer par raisonnement par l'absurde que : $\forall r \in \mathbb{Q},\ r + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

**5.** On utilise le raisonnement par l'absurde

a. montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : a + b = 0 \Rightarrow (a = 0 \wedge b = 0)$ .

b. on déduit que : les solutions de l'équation suivante : $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$.

**6.** On utilise le raisonnement par disjonctions des cas , montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbb{N}$ .

**7.** On utilise le raisonnement par des équivalences successives montrer que $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \text{ et } q) \Rightarrow r)$

**8.** Soient $x$ et $y$ de $\mathbb{R}^+$ , montrer que : $x+y+2 = 2\sqrt{x}+2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$ .

## 05.

Soient $p$ et $q$ deux propositions , montrer par deux méthodes différentes que chaque proposition est une loi logique :

a. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ .

b. $p \Rightarrow (\overline{p} \Rightarrow q)$ .

c. $(\rceil p \Rightarrow q) \Rightarrow p$ est elle proposition ?.

## 06.

On considère l'implication suivante $P(a,b)$ : $a+b+ab+1=0 \Rightarrow (a=-1 \text{ ou } b=-1)$ .

**1.** Déterminer l'implication contre posée de $P(a,b)$ .

**2.** Déterminer la négation de $P(a,b)$ .

**3.** Montrer que $P(a,b)$ est une implication vraie.

## 07.

On considère l'implication suivante $P$ :

$$" \ \forall x \in [0,+\infty[, \forall y \in [1,+\infty[ : \left(\sqrt{x}+\sqrt{y-1} = \frac{1}{2}(x+y+1)\right) \Rightarrow (x=1 \text{ et } y=2) \ ".$$

**1.** Ecrire $P$ sans utiliser le connecteur logique $\Rightarrow$ et sans utiliser l'expression : « si …alors … » .

**2.** Déterminer la négation de $P$ .

**3.** Déterminer l'implication contre posée de $P$ .

**4.** Déterminer la valeur de vérité de $P$ .

## 08.

On utilise le raisonnement par , montrer que :

a. Pour tout n de $\mathbb{N}$ , le nombre $3^{3n+2}+2^{n+4}$ est divisible par 5 .

b. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ , le nombre $3^{3n+2}+2^{n+4}$ est divisible par 5 .

c. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ ,3 divise le nombre $4n^3-n$ .

d. Pour tout n de $\mathbb{N}$ ,8 divise le nombre $1+5^{n+1}+2\times3^n$ .

e. Pour tout n de $\mathbb{N}$ ,9 divise le nombre $4^n+6n-1$ .

f. Pour tout n de $\mathbb{N}$ ,17 divise le nombre $3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}$ .

g. $\forall n \in \mathbb{N}$ : $1+3+5+7+\cdots+(2n+1) = \sum_{i=0}^{i=n}(2i+1) = (n+1)^2$

h. $\forall n \in \mathbb{N}^* \ : \ 1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n\times(n+1)=\sum_{i=1}^{i=n} i(i+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

i. $\forall n \in \mathbb{N}^* \ : \ \sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{(2i-1)(2i+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

j. $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$.

k. $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^{k=n}k(n+k)=\frac{n(n+1)(5n+1)}{6}$