

## Raisonnement par récurrence

$\mathcal{P}(n)$  désigne une certaine propriété dépendant d'un entier  $n$  et  $n_0$  désigne un entier naturel donné.

On veut démontrer que pour tout entier naturel  $n \geq n_0$ , la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

Pour cela, on procède en deux étapes :

**Etape 1.** On vérifie que  $\mathcal{P}(n_0)$  est vraie,

**Etape 2.** On se donne un entier  $n \geq n_0$  quelconque.

On suppose que pour cet entier  $n$  la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie (c'est l'hypothèse de récurrence) et on montre que sous cette hypothèse la propriété  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

**Exemple 1.** Montrer par récurrence que pour tout entier  $n \geq 6$ ,  $2^n \geq 6n + 7$ .

**Solution 1.**

• Si  $n = 6$ ,  $2^n = 2^6 = 64$  et  $6n + 7 = 6 \times 6 + 7 = 43$ . Comme  $43 < 64$ , l'inégalité de l'énoncé est vraie quand  $n = 6$ .

• Soit  $n \geq 6$ . Supposons que  $2^n \geq 6n + 7$  et montrons que  $2^{n+1} \geq 6(n+1) + 7$ .

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \\ &\geq 2(6n + 7) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= 12n + 14 = 6(n + 1) + 7 + 6n + 1 \\ &\geq 6(n + 1) + 7. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que, pour tout entier naturel  $n \geq 6$ ,  $2^n \geq 6n + 7$ .

**Exemple 2.** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 2$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$ . Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$ .

**Solution 2.**

• Si  $n = 0$ ,  $4 - \frac{1}{2^{n-1}} = 4 - 2 = 2 = u_0$ . L'égalité de l'énoncé est vraie quand  $n = 0$ .

• Soit  $n \geq 0$ . Supposons que  $u_n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$  et montrons que  $u_{n+1} = 4 - \frac{1}{2^{(n+1)-1}}$ .

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n + 2 \\ &= \frac{1}{2} \left( 4 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) + 2 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= 2 - \frac{1}{2} \frac{1}{2^{n-1}} + 2 = 4 - \frac{1}{2^{(n+1)-1}}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$ .

**Exemple 3.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $2^{2n} + 2$  est un entier divisible par 3.

**Solution 3.**

• Si  $n = 0$ ,  $2^{2n} + 2 = 2^0 + 2 = 3$  qui est bien divisible par 3. L'affirmation de l'énoncé est vraie quand  $n = 0$ .

• Soit  $n \geq 0$ . Supposons que  $2^{2n} + 2$  est un entier divisible par 3, et montrons que  $2^{2(n+1)} + 2$  est un entier divisible par 3.

On a

$$2^{2(n+1)} + 2 = 2^{2n+2} + 2 = 4 \cdot 2^{2n} + 2 = 3 \cdot 2^{2n} + 1 \cdot 2^{2n} + 2 = 2^{2n} + 2 + 3 \cdot 2^{2n}.$$

Par hypothèse de récurrence, il existe un entier naturel  $k$  tel que  $2^{2n} + 2 = 3k$ . Mais alors,

$$2^{2(n+1)} + 2 = 2^{2n} + 2 + 3 \cdot 2^{2n} = 3k + 3 \cdot 2^{2n} = 3(2^{2n} + k).$$

Comme  $2^{2n} + k$  est un entier, on en déduit que  $2^{2(n+1)} + 2$  est un entier divisible par 3.

On a montré par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $2^{2n} + 2$  est un entier divisible par 3.