

PCSI

MÉCANIQUE :

**B. STATIQUE
DES SOLIDES**

Objet de la statique. Définitions

■ Objet de la statique

La statique est une partie de la mécanique qui a pour objet l'étude de l'équilibre des systèmes matériels au repos, par rapport à un repère fixe ou en mouvement uniforme.

L'étude portera plus particulièrement sur la statique des solides. On se bornera généralement à exprimer une condition d'équilibre d'un solide et d'en tirer des relations entre les différents paramètres qui régissent cet équilibre (géométrie du solide, distances, actions, etc).

■ Système matériel

On appelle système matériel un ensemble de matières dont les atomes peuvent être de même nature ou non, déformable ou indéformable, compressible ou incompressible.

EXEMPLES – Un moteur à explosion, une automobile, un ordinateur, un appareil de levage.

■ Solide

On appelle solide, un système matériel géométriquement parfait, indéformable et constitué de matière homogène et isotrope.

Si A et B (fig. 1) sont deux points quelconques du solide, on a la relation :

$$AB = \text{Cte}, \forall t$$

EXEMPLES – Bielle ou vilebrequin d'un moteur à explosion, levier de commande d'un cric.

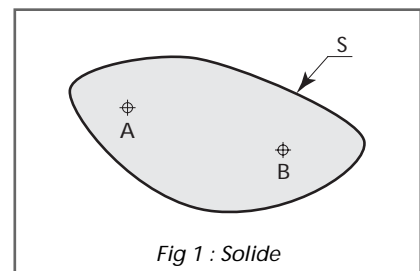


Fig 1 : Solide

■ Repère

On appelle « repère », un solide dans lequel on a choisi un système de coordonnées $\mathbf{R}\{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ (fig. 2).

On appelle « repère galiléen », un repère dans lequel on peut appliquer le principe fondamental de la dynamique sous la forme $\vec{F} = m\vec{I}$.

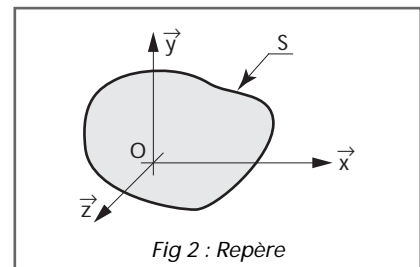


Fig 2 : Repère

1. MODÉLISATION DES ACTIONS MÉCANIQUES

■ Définition

On appelle « action mécanique » toute cause susceptible de :

- modifier le mouvement d'un solide ;
- maintenir un solide au repos ;
- déformer un solide.

1.1. Modélisation locale : actions à distance et de contact

Lorsque deux solides exercent mutuellement des actions mécaniques l'un sur l'autre, ces actions peuvent s'effectuer :

- soit par contact direct entre les deux solides : il s'agit alors d'**action mécanique de contact** ;
- soit par attraction ou répulsion sans contact direct entre eux : il s'agit alors d'**action mécanique à distance**.

EXEMPLES

- La pesanteur, l'attraction ou la répulsion magnétique sont des actions à distance.
- Les actions de liaison ou les actions qui ne peuvent exister qu'au travers d'un contact sont des actions de contact.

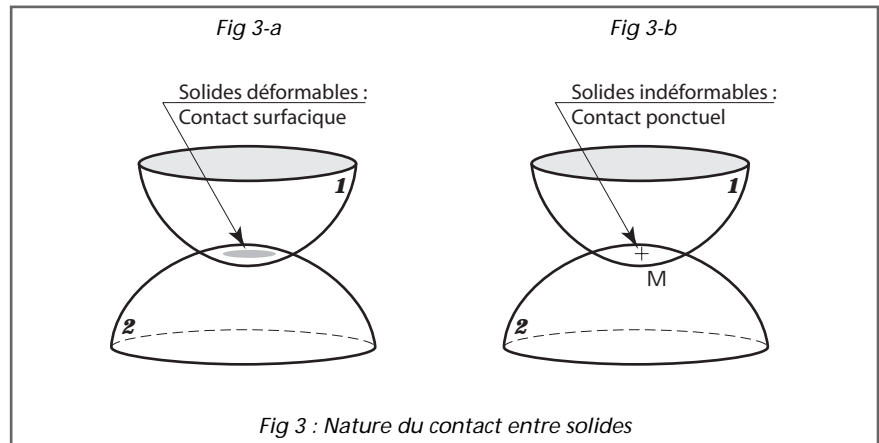
1.2. Lois de Coulomb. Résistance au roulement et au pivotement

1.2.1. Nature du contact entre solides

Compte tenu des déformations locales, le **contact réel** entre deux solides s'effectue suivant une **surface** (fig. 3-a).

Mais en supposant que les solides sont **indéformables**, on peut considérer que l'étendue de la surface est extrêmement faible et que le contact peut être assimilé à un point : c'est le **contact ponctuel** (fig. 3-b).

De plus, ce contact réel entre les solides s'effectue ici avec du **frottement**.



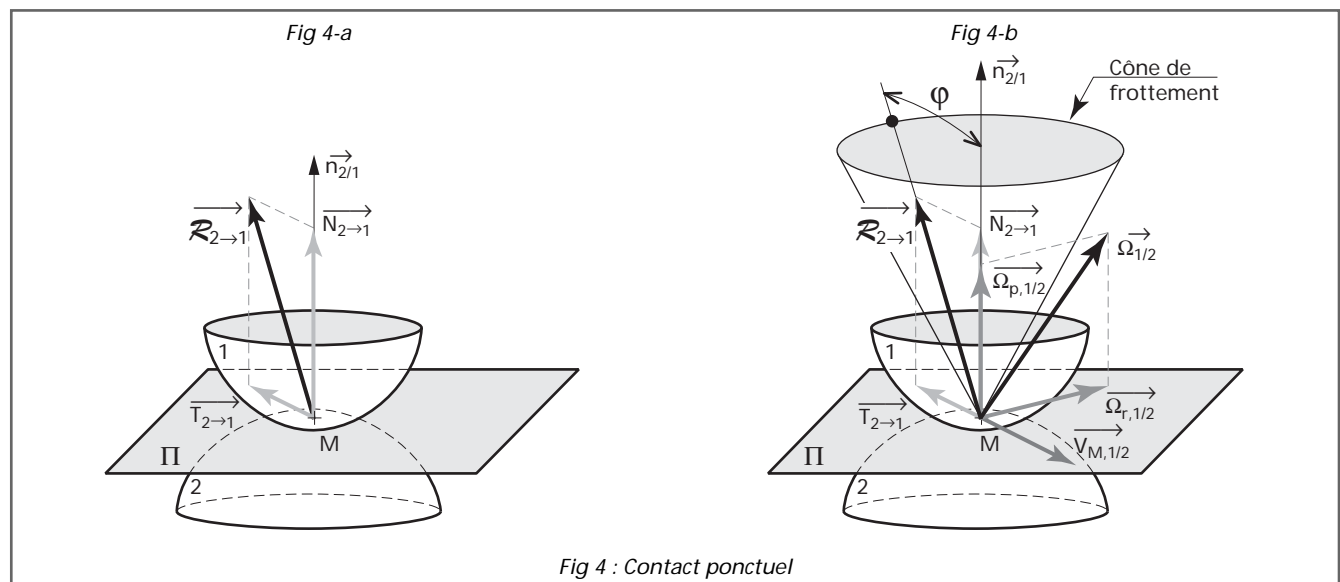
1.2.2. Modélisation

Dans un premier temps et de façon intuitive, on peut modéliser une action mécanique par un « **pointeur** », c'est-à-dire par l'ensemble d'un vecteur et d'un point origine. On caractérise donc l'action par son point d'application, sa direction, son intensité et son sens.

Mais on peut constater que les phénomènes ne changent pas si l'on utilise des pointeurs de même support. Une première extension est donc le modèle du « **glisseur** ». C'est cette modélisation que nous allons prendre en compte pour l'instant.

1.2.3. Lois de Coulomb : contact ponctuel avec frottement

Soient deux solides [1] et [2] en contact ponctuel au point M et Π le plan tangent commun aux solides en M (fig. 4-a).



Soit $\vec{n}_{2/1}$ le vecteur unitaire de la normale en M au plan Π , dirigé de [2] vers [1].

L'action de contact de [2] sur [1] projetée sur la normale $\vec{n}_{2/1}$ et sur le plan Π peut s'écrire :

$$\vec{R}_{2 \rightarrow 1} = N_{2 \rightarrow 1} \vec{n}_{2/1} + \vec{T}_{2 \rightarrow 1} \quad [1]$$

avec :

$N_{2 \rightarrow 1} \vec{n}_{2/1}$ = effort normal de contact, de valeur positive pour qu'il y ait contact ;

$\vec{T}_{2 \rightarrow 1}$ = effort tangentiel de contact, contenu dans le plan Π .

Considérons le torseur cinématique du mouvement du solide [1] par rapport au solide [2] réduit au point M de contact (fig 4-b) :

$$\left\{ V_{1/2} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{1/2} \\ \vec{V}_{M,1/2} \end{array} \right\}_M \quad [2]$$

$\vec{V}_{M,1/2}$ est la vitesse de glissement en M du solide [1] par rapport au solide [2]. Les lois de Coulomb distinguent deux cas suivant que $\vec{V}_{M,1/2} = \vec{0}$ ou que $\vec{V}_{M,1/2} \neq \vec{0}$.

■ Cas où $\vec{V}_{M,1/2} \neq \vec{0}$: glissement relatif

- Dans ce cas, la résultante $\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$ se trouve inclinée d'un **angle** φ par rapport à la normale $\vec{n}_{2/1}$ de telle sorte que sa composante $\vec{T}_{2 \rightarrow 1}$ s'oppose à la vitesse $\vec{V}_{M,1/2}$ (fig 4-b).
- L'angle φ est appelé « **angle de frottement** » et il est tel que **$\tan \varphi = f$** .
- f est appelé « **coefficient de frottement dynamique** » entre [1] et [2].
- L'ensemble des lieux possibles pour la droite support de la résultante $\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$ est appelé le « **cône de frottement** » en M.

Les relations [3] ci-dessous traduisent ce cas :

$$\left\| \vec{T}_{2 \rightarrow 1} \right\| = N_{2/1} f \quad \vec{V}_{M,1/2} \cdot \vec{T}_{2 \rightarrow 1} < 0 \quad [3]$$

■ Cas où $\vec{V}_{M,1/2} = \vec{0}$: pas de glissement

- Dans ce cas, la résultante $\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$ est portée par une droite inclinée de l'angle α ($\alpha < \varphi$) par rapport à la normale $\vec{n}_{2/1}$. Cette droite est à l'intérieur du cône de frottement.

La relation [4] ci-dessous traduit ce cas :

$$\left\| \vec{T}_{2 \rightarrow 1} \right\| < N_{2/1} f \quad [4]$$

■ Remarques

- Le frottement existe dans toutes les liaisons réelles. Il est négligé dans les liaisons parfaites.
- L'effort tangentiel de contact $\vec{T}_{2 \rightarrow 1}$, ou composante tangentielle de l'action de frottement, s'oppose toujours au déplacement du solide [1] par rapport au solide [2] (voir relation [3]).
- Le coefficient de frottement f est un terme sans dimension. Sa valeur peut varier de 0,05 (frottement lubrifié acier sur bronze) à 0,2 (frottement acier sur acier à sec). Il peut aller jusqu'à 1 dans le cas du contact à sec d'un pneu sur du goudron.

1.2.4. Résistance au roulement et au pivotement

■ Vecteurs rotations

Le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{1/2}$ du solide [1] par rapport au solide [2] projeté sur la normale $\vec{n}_{2/1}$ et sur le plan Π peut s'écrire :

$$\vec{\Omega}_{1/2} = \Omega_{p,1/2} \vec{n}_{2/1} + \vec{\Omega}_{r,1/2} \quad [5]$$

Statique des solides

avec :

$\vec{\Omega}_{p,1/2} \vec{n}_{2/1}$ = vecteur vitesse de rotation de pivotement autour de la normale au contact ;

$\vec{\Omega}_{r,1/2}$ = vecteur vitesse de rotation de roulement, contenu dans le plan Π .

■ Résistance au roulement

Lorsque le solide [1] roule sur le solide [2], la résistance au roulement se manifeste par une « opposition » à la rotation autour de l'axe instantané de rotation (AIR) contenu dans le plan Π et portant le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{r,1/2}$.

Elle est modélisée par un **vecteur moment de résistance au roulement** noté \vec{M}_r (voir §1.3.3).

Dans la pratique, elle est modélisée par un décalage noté δ du point d'application de l'action de contact entre les deux solides. Ce décalage est reporté vers l'avant du mouvement (fig. 5).

■ Résistance au pivotement

Lorsque le solide [1] pivote sur le solide [2], la résistance au pivotement se manifeste par une « opposition » à la rotation autour de l'axe instantané de rotation (AIR) porté par la normale $\vec{n}_{2/1}$ au plan Π et portant le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{p,1/2}$.

Elle est modélisée par un **vecteur moment de résistance au pivotement** noté \vec{M}_p (voir §1.3.3).

1.3. Modélisation globale, torseur associé

Dans certains cas, le modèle « glisseur » de l'action considérée ne rend pas bien compte de phénomènes plus fins dus à la nature de la liaison entre les solides notamment. On utilise alors le modèle « torseur » qui correspond à une représentation plus globale de cette action.

L'action de contact du solide [2] sur le solide [1] sera notée :

$$\left\{ \tau_{2 \rightarrow 1} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{2 \rightarrow 1} \\ \vec{M}_{A, 2 \rightarrow 1} \end{array} \right\}_A \quad [6] \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{2 \rightarrow 1} = \text{Résultante de l'effort entre [2] et [1]} \\ \vec{M}_{A, 2 \rightarrow 1} = \text{Moment résultant en A entre [2] et [1]} \end{array} \right.$$

1.3.1. Propriétés

Considérons un système matériel S.

■ Additivité

Considérons 2 systèmes matériels E et F disjoints appartenant à \bar{S} et ayant des actions sur S. Les actions mécaniques du système E+F sur S sont caractérisées par un torseur qui est la somme des actions individuelles de E et F sur S.

$$\left\{ \tau_{E+F \rightarrow S} \right\} = \left\{ \tau_{E \rightarrow S} \right\} + \left\{ \tau_{F \rightarrow S} \right\} \quad [7]$$

■ Partition

Soient S1 et S2 une partition de S. Les actions mécaniques d'un système E sur S sont caractérisées par la somme des actions mécaniques de E sur S1 et de E sur S2.

$$\left\{ \tau_{E \rightarrow S1+S2} \right\} = \left\{ \tau_{E \rightarrow S1} \right\} + \left\{ \tau_{E \rightarrow S2} \right\} \quad [8]$$

■ Conséquences

- Le torseur $\left\{ \tau_{\bar{S} \rightarrow S} \right\}$ est indépendant de la partition faite sur S.
- Il est possible de scinder un système matériel S en plusieurs parties, de même que \bar{S} . La détermination des actions mécaniques des différentes parties les unes sur les autres pourra donc se faire dans n'importe quel ordre et on pourra effectuer les sommes.

1.3.2. Système d'actions mécaniques

Un système d'actions mécaniques est l'ensemble des actions mécaniques qui s'exercent sur un système matériel.

Tout système d'actions mécaniques peut se réduire à un torseur unique qui est la somme des torseurs associés à chacune des actions mécaniques.

ATTENTION – Tous les torseurs doivent être exprimés au même point pour en effectuer la somme.

1.3.3. Torseur d'action de contact ponctuel avec frottement

Le torseur de l'action de contact ponctuel entre un solide [2] et un solide [1] (fig. 4) peut s'écrire :

$$\left\{ \tau_{2 \rightarrow 1} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{2 \rightarrow 1} = N_{2 \rightarrow 1} \vec{n}_{2/1} + \vec{T}_{2 \rightarrow 1} \\ \vec{M}_{M,2 \rightarrow 1} = M_p \vec{n}_{2/1} + \vec{M}_r \end{array} \right\}_M \quad [9]$$

avec :

$N_{2 \rightarrow 1} \vec{n}_{2/1}$ = effort normal de contact, de valeur positive pour qu'il y ait contact ;

$\vec{T}_{2 \rightarrow 1}$ = effort tangentiel de contact contenu dans le plan Π ;

$M_p \vec{n}_{2/1}$ = moment de résistance au pivotement ;

\vec{M}_r = moment de résistance au roulement contenu dans le plan Π .

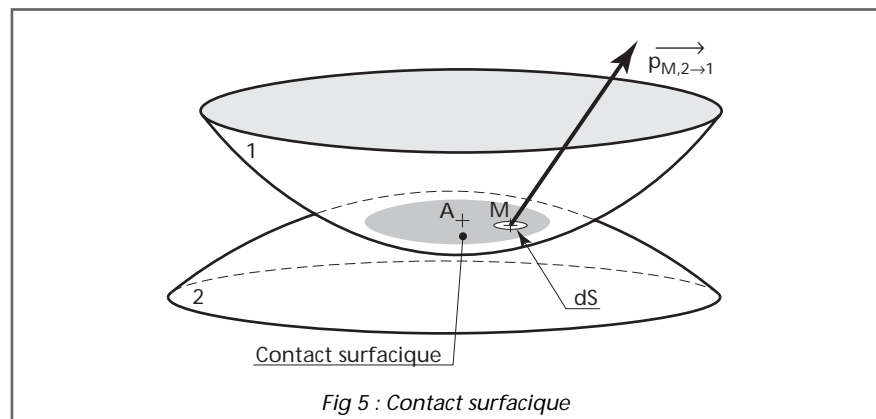
L'expérience montre que les valeurs des moments de résistance au pivotement et au roulement sont très faibles et peuvent être négligées. L'action de contact entre les solides peut donc être modélisée par le torseur :

$$\left\{ \tau_{2 \rightarrow 1} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{2 \rightarrow 1} = N_{2 \rightarrow 1} \vec{n}_{2/1} + \vec{T}_{2 \rightarrow 1} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M \quad [10]$$

1.3.4. Torseur d'action de contact surfacique

Soit M un point de la surface S de contact entre les solides [1] et [2].

En chaque point M, il existe un champ de vecteur $\vec{p}_{M,2/1}$ représentant la densité surfacique de l'action de contact sur la surface élémentaire dS entre [2] et [1], qui étendue à toute la surface S donne le torseur d'action de contact :



$$\left\{ \tau_{2 \rightarrow 1} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{2 \rightarrow 1} = \int_{M \in S} \vec{p}_{M,2 \rightarrow 1} dS \\ \vec{M}_{A,2 \rightarrow 1} = \int_{M \in S} \vec{AM} \wedge \vec{p}_{M,2 \rightarrow 1} dS \end{array} \right\}_A \quad [11]$$

1.3.5. Torseur des actions de pesanteur

■ Masse et poids

La **masse** est un **scalaire** associé à tout point d'un ensemble matériel.

Le **poids** d'un point matériel M est une action à distance caractérisée par un **glisseur** (vecteur glissant) passant par M tel que $\vec{p} = m \vec{g}$, \vec{g} étant un vecteur caractérisant le champ de la pesanteur.

■ Torseur des actions de pesanteur d'un ensemble matériel

Soit dm la masse élémentaire d'un point matériel M d'un ensemble E de masse m_E placé dans le champ de la pesanteur.

Son poids élémentaire est caractérisé par le glisseur : $d\vec{p}(M) = \vec{g} dm$

A ce champ de vecteur, on peut associer, en tout point A , le torseur :

$$\left\{ \tau_{p \rightarrow E} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \int_{M \in E} d\vec{p}(M) \\ \int_{M \in E} \vec{AM} \wedge d\vec{p}(M) \end{array} \right\}_A$$

Mais si \vec{g} est constant, on a donc :

$$\begin{aligned} \int_{M \in E} d\vec{p}(M) &= \int_{M \in E} \vec{g} dm = m_E \vec{g} \\ \int_{M \in E} \vec{AM} \wedge d\vec{p}(M) &= \int_{M \in E} \vec{AM} dm \wedge \vec{g} = \int_{M \in E} (\vec{AG} + \vec{GM}) dm \wedge \vec{g} = \int_{M \in E} \vec{AG} dm \wedge \vec{g} + \int_{M \in E} \vec{GM} dm \wedge \vec{g} = m_E \vec{AG} \wedge \vec{g} \end{aligned}$$

car $\int_{M \in E} \vec{GM} dm = \vec{0}$ par définition du centre de masse.

De plus, si l'on prend, comme c'est toujours le cas, le point A au point G , on a donc $\int_{M \in E} \vec{AM} \wedge d\vec{p}(M) = \vec{0}$.

Le torseur des actions de pesanteur peut donc s'écrire :

$$\left\{ \tau_{p \rightarrow E} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} m_E \vec{g} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G \quad [12]$$

2. ACTION MÉCANIQUE TRANSMISSIBLE PAR UNE LIAISON SANS FROTTEMENT

2.1. Puissance des inter-efforts

Soient les solides [1] et [2] en contact entre eux et en mouvement dans le repère \mathbf{R} .

On note $\{V_{1/R}\}$ et $\{V_{2/R}\}$ les torseurs cinématiques du mouvement de [1] par rapport à \mathbf{R} et de [2] par rapport à \mathbf{R} . On rappelle que (voir le cours de cinématique) :

$$\{V_{1/R}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{1/R} \\ \vec{V}_{M,1/R} \end{array} \right\}_M \quad \text{et} \quad \{V_{2/R}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{2/R} \\ \vec{V}_{M,2/R} \end{array} \right\}_M$$

On note $\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{2 \rightarrow 1} = N_{2 \rightarrow 1} \vec{n}_{2/1} + \vec{T}_{2 \rightarrow 1} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M$ le torseur modélisant l'action de contact de [2] sur [1].

La puissance d'une action de contact étant donnée par le comoment $P = \{\tau\} \{V\}$, on montre que la puissance des inter-efforts entre [1] et [2] est indépendante du repère \mathbf{R} et a pour valeur :

$$P_{(2 \leftrightarrow 1)} = \{\tau_{2 \rightarrow 1}\} \{V_{1/2}\} \quad [13]$$

■ Contact parfait

On dit que le contact entre deux solides est parfait si la puissance développée par les inter-efforts est nulle :

$$P_{(2 \leftrightarrow 1)} = \{\tau_{2 \rightarrow 1}\} \{V_{1/2}\} = 0 \quad [14]$$

$$\text{soit } (N_{2 \rightarrow 1} \vec{n}_{2/1} + \vec{T}_{2 \rightarrow 1}) \cdot \vec{V}_{M,1/2} = 0$$

$$\text{Si } \vec{V}_{M,1/2} = V_{1/2} \vec{n}_{2/1} + \vec{V}_{g,1/2} \text{ avec } V_{1/2} \vec{n}_{2/1} = \vec{0} \Rightarrow P_{(2 \leftrightarrow 1)} = \vec{T}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{V}_{g,1/2}$$

$$\text{alors } P_{(2 \leftrightarrow 1)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{soit } \vec{V}_{g,1/2} = \vec{0} & (\text{pas de glissement}) \\ \text{soit } \vec{T}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0} & (\text{pas de contact}) \\ \text{soit } \vec{T}_{2 \rightarrow 1} \perp \vec{V}_{g,1/2} \end{cases}$$

2.2. Liaisons parfaites entre solides

2.2.1. Liaison parfaite

Comme défini précédemment, la condition pour qu'une liaison soit considérée comme parfaite est que la puissance développée par les inter-efforts dans le mouvement du solide [2] par rapport au solide [1] soit nulle :

$$P_{(2 \leftrightarrow 1)} = \left\{ \vec{\tau}_{2 \rightarrow 1} \right\} \left\{ \vec{V}_{1/2} \right\} = 0$$

Dans une base orthonormée $\mathbf{R}\{\vec{A}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ liée au centre géométrique de la liaison, on exprime les deux torseurs comme suit :

$$\left\{ \vec{\tau}_{2 \rightarrow 1} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{2 \rightarrow 1} = X_{21} \vec{u} + Y_{21} \vec{v} + Z_{21} \vec{w} \\ \vec{M}_{A,2 \rightarrow 1} = L_{21} \vec{u} + M_{21} \vec{v} + N_{21} \vec{w} \end{array} \right\}_{A,R} \quad \text{et} \quad \left\{ \vec{V}_{1/2} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{1/2} = p_{12} \vec{u} + q_{12} \vec{v} + r_{12} \vec{w} \\ \vec{V}_{A,1/2} = u_{12} \vec{u} + v_{12} \vec{v} + w_{12} \vec{w} \end{array} \right\}_{A,R}$$

$$\text{ce qui donne } P_{(2 \leftrightarrow 1)} = \vec{\Omega}_{1/2} \cdot \vec{M}_{A,2 \rightarrow 1} + \vec{V}_{A,1/2} \cdot \vec{R}_{2 \rightarrow 1} = 0$$

$$\text{Soit } \boxed{p_{12} L_{21} + q_{12} M_{21} + r_{12} N_{21} + u_{12} X_{21} + v_{12} Y_{21} + w_{12} Z_{21} = 0} \quad [15]$$

Pour une liaison parfaite, cette condition doit être vérifiée quelles que soient les valeurs des paramètres cinématique p_{12} , q_{12} , r_{12} , u_{12} , v_{12} et w_{12} .

2.2.2. Liaisons normalisées entre deux solides – Modélisation spatiale

Le tableau de la page 8 décrit, cas par cas, les liaisons normalisées entre les solides [1] et [2], en précisant :

- leur représentation symbolique plane relativement à un repère $\mathbf{R}\{\vec{A}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ centré sur la liaison et correctement orienté ;
- leur représentation symbolique spatiale ;
- le torseur statique modélisant l'action de [2] sur [1] avec les caractéristiques spécifiques des éléments de réduction. Ce torseur est aussi appelé « **torseur des efforts transmissibles par la liaison** ».

2.2.3. Liaisons normalisées entre deux solides – Cas de la modélisation plane

■ Intérêt de la modélisation plane

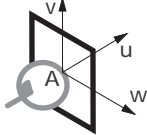
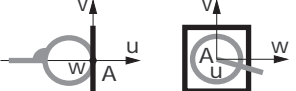
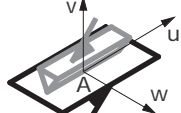
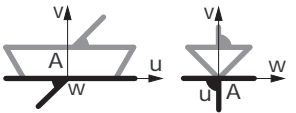
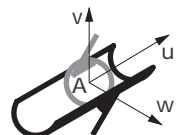
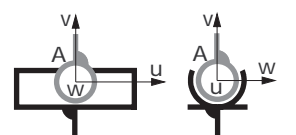
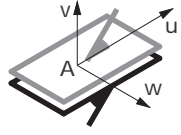
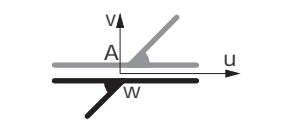
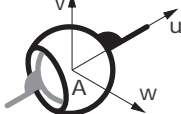
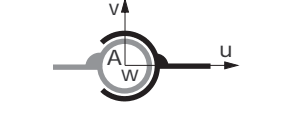
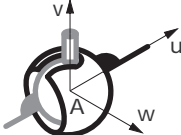
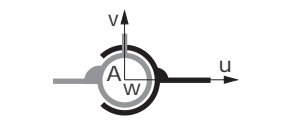
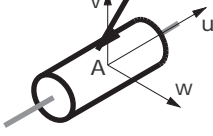
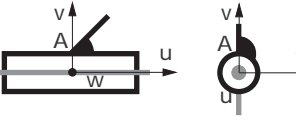
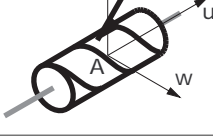
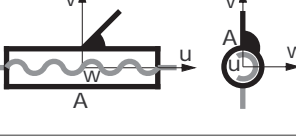
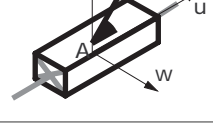
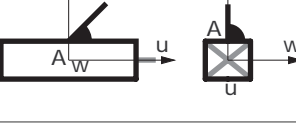
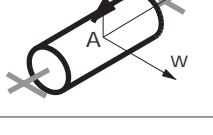
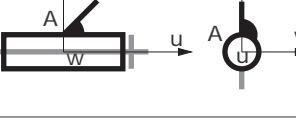
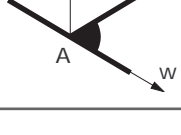
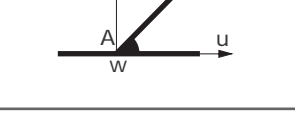
Généralement, la résolution analytique spatiale d'un problème de statique conduit à l'écriture de 6 équations scalaires. Mais dans le cas des problèmes plans (ou ramenés dans le plan), seules 3 équations scalaires sont nécessaires. Il est donc préférable de traiter dès le départ le problème dans le plan. **L'écriture des torseurs s'en trouve simplifiée ainsi que la résolution.**

■ Modélisation plane des liaisons normalisées

Dans l'écriture du torseur statique plan d'une liaison, seules subsistent, par rapport au torseur statique spatial :

- les deux composantes de la résultante qui sont contenues dans le plan ;
- la composante du moment résultant qui est perpendiculaire au plan.

Le tableau de la page 9 propose, pour chaque liaison normalisée, la modélisation plane suivant une ou deux vues, le torseur associé et éventuellement la liaison équivalente (à titre indicatif).

Nom de la liaison	Représentation spatiale	Représentation plane	Torseur statique ou torseur des efforts transmissibles
Liaison sphère-plan			$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} \vec{u} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$
Liaison linéaire rectiligne			$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} Y_{21} \vec{v} \\ N_{21} \vec{w} \end{Bmatrix}_A$
Liaison sphère-cylindre			$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} Y_{21} \vec{v} + Z_{21} \vec{w} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$
Liaison appui plan			$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} Y_{21} \vec{v} \\ L_{21} \vec{u} + N_{21} \vec{w} \end{Bmatrix}_A$
Liaison rotule, ou liaison sphérique			$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} \vec{u} + Y_{21} \vec{v} + Z_{21} \vec{w} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$
Liaison rotule à doigt			$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} \vec{u} + Y_{21} \vec{v} + Z_{21} \vec{w} \\ L_{21} \vec{u} \end{Bmatrix}_A$
Liaison pivot glissant			$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} Y_{21} \vec{v} + Z_{21} \vec{w} \\ M_{21} \vec{v} + N_{21} \vec{w} \end{Bmatrix}_A$
Liaison hélicoïdale			$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} \vec{u} + Y_{21} \vec{v} + Z_{21} \vec{w} \\ L_{21} \vec{u} + M_{21} \vec{v} + N_{21} \vec{w} \end{Bmatrix}_A$ avec $L_{21} = X_{21} R_{moy} \tan(\alpha + \varphi)$
Liaison glissière			$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} Y_{21} \vec{v} + Z_{21} \vec{w} \\ L_{21} \vec{u} + M_{21} \vec{v} + N_{21} \vec{w} \end{Bmatrix}_A$
Liaison pivot			$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} \vec{u} + Y_{21} \vec{v} + Z_{21} \vec{w} \\ M_{21} \vec{v} + N_{21} \vec{w} \end{Bmatrix}_A$
Liaison encastrement			$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} \vec{u} + Y_{21} \vec{v} + Z_{21} \vec{w} \\ L_{21} \vec{u} + M_{21} \vec{v} + N_{21} \vec{w} \end{Bmatrix}_A$

Nom de la liaison	Représentation spatiale	Modélisation(s) plane(s)	Torseur statique associé	Liaison équivalente
Liaison sphère-plan		 $\left\{ \tau_{2 \rightarrow 1} \right\} = \begin{pmatrix} X_{21} \bar{u} \\ \bar{0} \end{pmatrix}_A$		
Liaison linéaire rectiligne		 $\left\{ \tau_{2 \rightarrow 1} \right\} = \begin{pmatrix} Y_{21} \bar{v} \\ N_{21} \bar{w} \end{pmatrix}_A$		
		 $\left\{ \tau_{2 \rightarrow 1} \right\} = \begin{pmatrix} Y_{21} \bar{v} \\ N_{21} \bar{w} \end{pmatrix}_A$	$\left\{ \tau_{2 \rightarrow 1} \right\} = \begin{pmatrix} Y_{21} \bar{v} \\ \bar{0} \end{pmatrix}_A$	
Liaison sphère-cylindre		 $\left\{ \tau_{2 \rightarrow 1} \right\} = \begin{pmatrix} Y_{21} \bar{v} + Z_{21} \bar{w} \\ \bar{0} \end{pmatrix}_A$	$\left\{ \tau_{2 \rightarrow 1} \right\} = \begin{pmatrix} Y_{21} \bar{v} \\ \bar{0} \end{pmatrix}_A$	
		 $\left\{ \tau_{2 \rightarrow 1} \right\} = \begin{pmatrix} Y_{21} \bar{v} + Z_{21} \bar{w} \\ \bar{0} \end{pmatrix}_A$		
Liaison appui plan		 $\left\{ \tau_{2 \rightarrow 1} \right\} = \begin{pmatrix} Y_{21} \bar{v} \\ L_{21} \bar{u} + N_{21} \bar{w} \end{pmatrix}_A$	$\left\{ \tau_{2 \rightarrow 1} \right\} = \begin{pmatrix} Y_{21} \bar{v} \\ N_{21} \bar{w} \end{pmatrix}_A$	
Liaison rotule, ou liaison sphérique		 $\begin{pmatrix} X_{21} \bar{u} + Y_{21} \bar{v} + Z_{21} \bar{w} \\ \bar{0} \end{pmatrix}_A$	$\left\{ \tau_{2 \rightarrow 1} \right\} = \begin{pmatrix} X_{21} \bar{u} + Y_{21} \bar{v} \\ \bar{0} \end{pmatrix}_A$	
Liaison rotule à doigt		 $\begin{pmatrix} X_{21} \bar{u} + Y_{21} \bar{v} + Z_{21} \bar{w} \\ L_{21} \bar{u} \end{pmatrix}_A$		
Liaison pivot glissant		 $\begin{pmatrix} Y_{21} \bar{v} + Z_{21} \bar{w} \\ M_{21} \bar{v} + N_{21} \bar{w} \end{pmatrix}_A$	$\left\{ \tau_{2 \rightarrow 1} \right\} = \begin{pmatrix} Y_{21} \bar{v} \\ N_{21} \bar{w} \end{pmatrix}_A$	
		 $\left\{ \tau_{2 \rightarrow 1} \right\} = \begin{pmatrix} Y_{21} \bar{v} + Z_{21} \bar{w} \\ M_{21} \bar{v} + N_{21} \bar{w} \end{pmatrix}_A$	$\begin{pmatrix} Y_{21} \bar{v} + Z_{21} \bar{w} \\ \bar{0} \end{pmatrix}_A$	
Liaison hélicoïdale		 $\begin{pmatrix} X_{21} \bar{u} + Y_{21} \bar{v} + Z_{21} \bar{w} \\ L_{21} \bar{u} + M_{21} \bar{v} + N_{21} \bar{w} \end{pmatrix}_A$	$\left\{ \tau_{2 \rightarrow 1} \right\} = \begin{pmatrix} Y_{21} \bar{v} \\ N_{21} \bar{w} \end{pmatrix}_A$	
Liaison glissière		 $\begin{pmatrix} Y_{21} \bar{v} + Z_{21} \bar{w} \\ L_{21} \bar{u} + M_{21} \bar{v} + N_{21} \bar{w} \end{pmatrix}_A$	$\left\{ \tau_{2 \rightarrow 1} \right\} = \begin{pmatrix} Y_{21} \bar{v} \\ N_{21} \bar{w} \end{pmatrix}_A$	
		 $\begin{pmatrix} Y_{21} \bar{v} + Z_{21} \bar{w} \\ L_{21} \bar{u} + M_{21} \bar{v} + N_{21} \bar{w} \end{pmatrix}_A$	$\begin{pmatrix} Y_{21} \bar{v} + Z_{21} \bar{w} \\ L_{21} \bar{u} \end{pmatrix}_A$	
Liaison pivot		 $\begin{pmatrix} X_{21} \bar{u} + Y_{21} \bar{v} + Z_{21} \bar{w} \\ M_{21} \bar{v} + N_{21} \bar{w} \end{pmatrix}_A$	$\begin{pmatrix} X_{21} \bar{u} + Y_{21} \bar{v} \\ N_{21} \bar{w} \end{pmatrix}_A$	
		 $\begin{pmatrix} X_{21} \bar{u} + Y_{21} \bar{v} + Z_{21} \bar{w} \\ M_{21} \bar{v} + N_{21} \bar{w} \end{pmatrix}_A$	$\begin{pmatrix} Y_{21} \bar{v} + Z_{21} \bar{w} \\ \bar{0} \end{pmatrix}_A$	

REMARQUE – Dans le tableau, afin de mieux voir quelles sont les composantes du torseur statique spatial qui ont disparu, celles-ci ont été colorées en grisé.

■ **Condition liée à la structure du mécanisme permettant de ramener un problème spatial à un problème plan**

– Le mécanisme admet un plan de symétrie et les efforts extérieurs sont disposés symétriquement par rapport à ce plan.

■ **ATTENTION**

■ Ne pas confondre un mécanisme plan avec un mécanisme représenté en projection plane.

3. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE (PFS)

3.1. Théorèmes généraux

3.1.1. Équilibre d'un solide ou d'un ensemble de solides

On dit qu'un système matériel S (solide ou ensemble de solides) est en équilibre par rapport à un repère \mathbf{R} si, au cours du temps, chaque point de S conserve une position fixe par rapport au repère \mathbf{R} .

3.1.2. Principe fondamental de la statique

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un solide ou un ensemble de solides soit en équilibre dans un repère galiléen est que le torseur associé au système d'actions mécaniques extérieures à S , soit nul.

$$\left\{ \tau_{S \rightarrow S} \right\} = \{0\} \quad [16]$$

3.1.3. Théorèmes généraux de la statique

La relation [14] se traduit par $\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{S \rightarrow S} \\ \overrightarrow{M}_{A, S \rightarrow S} \end{array} \right\}_A = \{0\}$, ce qui donne les deux équations vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{R}_{S \rightarrow S} = \vec{0} \quad [17] \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M}_{A, S \rightarrow S} = \vec{0} \quad [18]$$

■ **Théorème de la résultante statique**

Pour tout système matériel S en équilibre par rapport à un repère galiléen \mathbf{R} , la résultante générale du torseur associé aux actions mécaniques extérieures à S est nulle.

La relation [17] traduit ce théorème.

■ **Théorème du moment statique**

Pour tout système matériel S en équilibre par rapport à un repère galiléen \mathbf{R} , le moment résultant du torseur associé aux actions mécaniques extérieures à S est nul en tout point.

La relation [18] traduit ce théorème.

REMARQUES

- L'utilisation du PFS sur un solide S donne, dans l'espace, **6 équations scalaires indépendantes**.
- Lorsque toutes les actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur S sont des glisseurs appartenant à un même plan et/ou des couples perpendiculaires à ce plan, on n'obtient plus que **3 équations scalaires indépendantes**.

3.1.4. Statisme

Lorsque le nombre d'inconnues scalaires est égal au nombre d'équations linéairement indépendantes, le problème admet une solution unique : il est dit **isostatique**.

Lorsque le nombre d'inconnues scalaires est plus grand que le nombre d'équations linéairement indépendantes, le problème n'admet pas une solution unique : il est dit **hyperstatique**. La différence entre le nombre d'inconnues et le nombre d'équations donne le *degré d'hyperstatisme*.

Lorsque le nombre d'inconnues scalaires est plus petit que le nombre d'équations linéairement indépendantes, le système matériel est dit **mobile**. La différence entre le nombre d'équations et le nombre d'inconnues donne le *degré de mobilité*.

3.2. Équilibre d'un solide, d'un ensemble de solides

3.2.1. Isolement d'un système

■ Système isolé

Isoler un solide ou un système de solides (système matériel), c'est le séparer, par la pensée, de tout ce qui l'entoure. La délimitation fictive ainsi définie autour du système est appelée « **frontière d'isolement** ».

On peut ainsi distinguer :

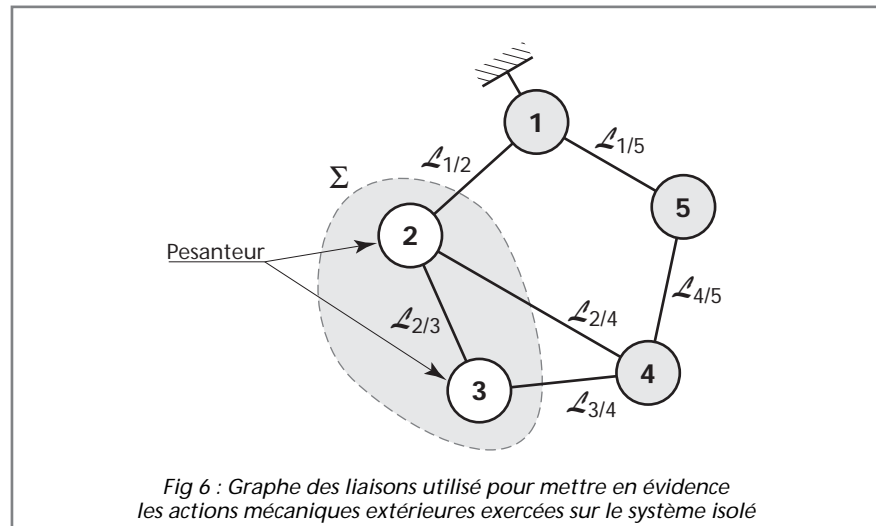
- le système isolé lui-même, noté S ;
- l'extérieur du système, ou tout ce qui ne lui appartient pas, noté \bar{S} .

■ Efforts extérieurs et efforts intérieurs

Lorsqu'un système est isolé, on remarque qu'il peut être soumis à deux types d'actions mécaniques qui sont, suivant le cas :

- des actions exercées par une partie du système isolé sur une autre partie du système isolé : ce sont les **actions intérieures**, ou **efforts intérieurs** ;
- des actions exercées par l'extérieur du système isolé sur le système isolé : ce sont les **actions extérieures**, ou **efforts extérieurs**.

REMARQUE – Lors de la recherche des **actions extérieures de contact** d'un système isolé, il faut chercher les zones où le système isolé est en contact avec l'extérieur pour mettre en évidence l'action extérieure correspondante : l'utilisation du graphe des liaisons est alors très intéressante (fig. 6).



3.2.2. Équilibre d'un ensemble de solides

■ Hypothèse

Soit une ensemble E constitué de n solides $1, 2, \dots, i, \dots, n$.

Chaque solide est en équilibre sous les actions mécaniques exercées par les autres solides et par les actions extérieures à E .

■ Théorème

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E , constitué de n solides soit en équilibre dans un repère galiléen est que, pour tout sous-ensemble F de p solides, le système des actions mécaniques extérieures à F soit nul.

■ Démonstration

Isolons un solide i du sous-ensemble F et faisons le bilan des actions mécaniques :

Notons $\{\tau_{T \rightarrow i}\}$ le torseur des actions extérieures à i .

$$\text{On a : } \{\tau_{T \rightarrow i}\} = \{\tau_{F \rightarrow i}\} + \sum_{j=1}^p \{\tau_{j \rightarrow i}\} \quad [19]$$

$\{\tau_{j \rightarrow i}\}$ est le torseur des actions exercées par le solide j de F sur le solide i .

$$\text{Le PFS appliqué au solide } i \text{ donne } \{\tau_{F \rightarrow i}\} + \sum_{j=1}^p \{\tau_{j \rightarrow i}\} = \{0\} \quad (i \neq j)$$

Additionnons membre à membre les torseurs de la relation [19] pour les p solides du sous-ensemble F :

$$\sum_{i=1}^p \{\tau_{T \rightarrow i}\} = \sum_{i=1}^p \{\tau_{F \rightarrow i}\} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \{\tau_{j \rightarrow i}\}$$

$$\text{Mais } \sum_{i=1}^p \{\tau_{F \rightarrow i}\} = \{\tau_{F \rightarrow F}\} ;$$

$$\{\tau_{T \rightarrow i}\} = \{0\} \text{ par application du PFS sur chaque solide ;}$$

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \{\tau_{j \rightarrow i}\} = \{0\} \text{ par application du principe des actions réciproques.}$$

On a donc $\{\tau_{F \rightarrow F}\} = \{0\}$, ce qui montre que le sous-ensemble F est en équilibre. Il en aurait été de même si l'on avait pris les n solides constituant l'ensemble complet E .

3.3. Théorème des actions réciproques

Si un solide [1] exerce, sur un solide [2], une action mécanique caractérisée par le torseur $\{\tau_{1 \rightarrow 2}\}$, le solide [2] exerce sur le solide [1] une action mécanique opposée caractérisée par le torseur :

$$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = -\{\tau_{1 \rightarrow 2}\} \quad [20]$$

4. APPLICATIONS

4.1. Mécanismes parfaits

■ Mécanisme (rappel)

Un mécanisme est un ensemble de pièces assemblées entre elles par des **liaisons**. Ces assemblages constituent des **chaînes de solides**.

■ Mécanisme parfait

Un mécanisme est dit parfait si les **liaisons** entre les pièces se font sans frottement (liaisons parfaites).

Dans la réalité, le frottement existe mais s'il est très faible devant les actions mises en jeu, il est négligé.

■ Conséquences

- Les liaisons à l'intérieur du mécanisme peuvent être modélisées comme dans le tableau de la page 8 (liaisons parfaites).
- L'écriture des équations découlant du PFS se trouve simplifiée ainsi que la résolution.